Chapitre D6

Déterminant

Objectifs

- Notion de déterminant.
- Caractérisation théorique du déterminant.
- Lien avec l'inversibilité.
- Calcul pratique de déterminant.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf mention contraire, n est un entier naturel non nul et E un ev de dimension n.

1 Applications multilinéaires

Définition D6.1

Soit $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}$-ev. On dit qu'une application $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est **n-linéaire** lorsque pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \ldots \times E_n$,

$$t \mapsto f(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n) \text{ est linéaire de } E_k \text{ dans } F.$$

Dans le cas où $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**. On dit **bilinéaire**, **trilinéaire** pour 2-linéaire, 3-linéaire respectivement.

Définition D6.2

On dit qu'une forme n-linéaire sur E^n est **alternée** lorsque $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ dont (au moins) deux vecteurs sont égaux.

Proposition et définition D6.3

Soit $n \geqslant 2$ et $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée. On pose $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

(i) On ne change pas la valeur de $f(x_1, \ldots, x_n)$ en ajoutant à l'un des vecteur x_i une combinaison linéaire des autres (invariance par transvection).

(ii) Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

(iii) Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$. Alors

$$f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = -f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots).$$

(iv) Soit $\sigma \in S_n$. Alors

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n).$$

Lorsqu'une des deux dernières propriétés est vérifiée, on dit que f est **antisymétrique**.

Proposition D6.4

Toute forme n-linéaire antisymétrique est alternée.

2 Déterminant

2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Théorème et définition D6.5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une unique application $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire et alternée qui prend la valeur 1 en $(e_1, \ldots, e_n)$. On l'appelle **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$, notée $\det_{\mathcal{B}}$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, si on note (a_{ij}) la matrice de cette famille dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}.$$

Proposition D6.6

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.

(i) Formule de changement de base : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F})$.

(ii) Caractérisation des bases : $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$

Proposition D6.7 (Interprétations géométriques)

- Dans le cas $n = 2$, le déterminant d'une famille de deux vecteurs (x_1, x_2) dans la base (b_1, b_2) représente l'aire du parallélogramme de côtés x_1 et x_2, l'unité d'aire étant celle du parallélogramme de côtés b_1 et b_2, affectée d'un signe représentant l'orientation de (x_1, x_2) par rapport à celle de (b_1, b_2).
- Avec des conventions similaires dans le cas $n = 3$, le déterminant de (x_1, x_2, x_3) dans la base (b_1, b_2, b_3) représente le volume algébrique du parallélépipède de côtés x_1, x_2 et x_3.

2.2 Déterminant d'une matrice

Définition D6.8

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant de la matrice** A le nombre

$$\det(A) = \det_{\mathcal{E}}(C_1, \ldots, C_n),$$

où les C_i sont les colonnes de la matrice A dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Notation. On note

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proposition D6.9

Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}.$$

Proposition D6.10

(i) $\det(I_n) = 1$.

(ii) Pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(iii) Le déterminant d'une matrice ayant deux lignes égales ou deux colonnes égales est nul.

(iv) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(v) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

(vi) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det(A^\top)$.

Dém. D6.10

(iv) $\boxed{\textbf{M1}}$ Notons $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ les colonnes de A. Si $B = (b_{ij})$, alors la j-ième colonne de AB est donnée par $(AB)_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} A_i$.
Comme le déterminant est une forme n-linéaire alternée sur $(\mathcal{M}_{n,1}(K))^n$, l'application

$$(A_1, \dots, A_n) \longmapsto \det\big((AB)_1, \dots, (AB)_n\big)$$

est elle-même n-linéaire alternée en les colonnes $A_1, \dots, A_n$.
En effet, pour le caractère alterné : si deux colonnes de A sont égales, alors les $(AB)_j$ sont engendrées par $n-1$ colonnes A_j au maximum, donc ne forment pas une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Donc leur déterminant est nul.
Par caractérisation du déterminant, il existe donc un scalaire $\lambda \in K$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(K),\ \Phi_B(A) = \lambda \det(A).$$

En évaluant en $A = I_n$, on obtient $\lambda = \Phi_B(I_n) = \det(I_n B) = \det(B)$. Ainsi,

$$\det(AB) = \det(B) \det(A).$$

$\boxed{\textbf{M2}}$ Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Par définition du déterminant,

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (AB)_{\sigma(j),j} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(j),k} b_{k,j} \right).$$

En développant le produit, on obtient

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),\varphi(j)} b_{\varphi(j),j}.$$

En échangeant les deux sommations,

$$\det(AB) = \sum_{\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),\varphi(j)} \right) \prod_{j=1}^{n} b_{\varphi(j),j}.$$

Fixons maintenant $\varphi \in S_n$. La somme $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),\varphi(j)}$ est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant, pour tout j, la j-ième colonne par la $\varphi(j)$-ième colonne de A. Si φ n'est pas injective, cette matrice a deux colonnes égales, donc son déterminant est nul. Et si $\varphi \in S_n$, cette matrice est obtenue à partir de A par la permutation de colonnes associée à φ, donc son déterminant vaut $\varepsilon(\varphi) \det(A)$.
Par conséquent,

$$\det(AB) = \det(A) \sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi) \prod_{j=1}^{n} b_{\varphi(j),j} = \det(A) \det(B).$$

CC BY NC SA

Corollaire D6.11

det induit un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$.

Corollaire D6.12

Les déterminants de deux matrices semblables sont égaux.

2.3 Calcul pratique

Proposition D6.13

(i) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux.

(ii) Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

Proposition D6.14

Le déterminant d'une matrice est inchangé lorsqu'on ajoute à une ligne (resp. une colonne) un multiple d'une autre ligne (resp. colonne).

Remarque. En particulier, on peut effectuer certaines opérations d'une méthode de pivot de Gauß sans changer la valeur du déterminant. Plus précisément, il suffit de s'interdire toute opération élémentaire de diagonale non constante égale à 1. Dès lors on peut espérer se ramener à un calcul de déterminant plus simple.

Définition D6.15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.

(i) On appelle **mineur** de A de position (i, j) le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la colonne j. On notera $\Delta_{ij}(A)$ ce déterminant.

(ii) On appelle **cofacteur** de A de position (i, j) le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)$.

(iii) On appelle **comatrice** de A la matrice $\mathrm{com}(A) = \big((-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

cc BY NC SA

Théorème D6.16 (Développement par rapport à une ligne ou colonne)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A)$.

(ii) Soit $1 \leqslant j \leqslant n$. Alors $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A)$.

Théorème D6.17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \times (\operatorname{com} A)^\top = (\operatorname{com} A)^\top \times A = \det(A) I_n$.
En particulier, A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ et dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} (\operatorname{com} A)^\top$.

2.4 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème et définition D6.18

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ considérée. Ce nombre s'appelle **déterminant de** u, noté $\det(u)$.

Proposition D6.19

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$.
- $\det(v \circ u) = (\det v)(\det u)$.
- $u \in \mathrm{GL}(E)$ si et seulement si $\det u \neq 0$. Dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

Proposition D6.20

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $X = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det u \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Méthodes

- Calculer un déterminant
  - ➢ triangulaire par blocs,
  - ➢ par opérations élémentaires,
  - ➢ par développement selon une ligne ou colonne,
  - ➢ en établissant une formule de récurrence.
- Étudier l'inversibilité d'une matrice.