TD D6. Déterminant

1 La théorie

Exercice D6.1 ✿

Soient A et B telles que : $AB = BA$, $\det A = 0$ et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^p = 0$. Montrer que $\det(A+B) = 0$.

Exercice D6.2 ✿

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers que l'on suppose inversible. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det(A^{-1}) \in \{-1, +1\}$.

Exercice D6.3 ✿

On suppose $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$. Calculer

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+i & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$,
2. $\begin{vmatrix} c & c-2b & a \\ f & f-2e & d \\ i & i-2h & g \end{vmatrix}$,
3. $\begin{vmatrix} a & b & 2a-c \\ 2g & 2h & 4g-2i \\ d & e & 2d-f \end{vmatrix}$.

Exercice D6.4 ✿✿

À quelle condition nécessaire et suffisante sur $n = \dim(E)$ existe-t-il $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\operatorname{id}_E$?

Exercice D6.5 ✿✿

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Étudier le rang de la comatrice de A en fonction de celui de A.

Exercice D6.6 ✿✿

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire sur E et linéaire sur $E \times E$. Montrer que φ est nulle.

2 La pratique

Exercice D6.7 ✿

Calculer les déterminants suivants (avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$,
2. $\begin{vmatrix} j & j \\ -1 & j \end{vmatrix}$,
3. $\begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}$,
4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$,
5. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$,
6. $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 8040 \\ 7 & 2 & 7020 \\ 6 & 1 & 6010 \end{vmatrix}$.

Exercice D6.8 ✿

Calculer en choisissant la méthode la plus judicieuse :

1. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,
2. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$,
3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$,
4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$,
5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 13 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{vmatrix}$,
6. $\begin{vmatrix} 25 & -15 & 23 & -5 \\ -15 & 10 & 19 & 5 \\ 23 & 19 & -15 & 9 \\ -5 & 5 & 9 & -5 \end{vmatrix}$.

Exercice D6.9 ✿

On pose $D_1 = 3$. On souhaite calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Calculer D_2 et D_3.
2. Pour tout $n > 2$, exprimer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}.
3. Conclure.

Exercice D6.10 ✿✿

Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$,
2. $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$,
3. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 5 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Exercice D6.11 ✿✿

Soit $n \geqslant 2$ et $a, b, c, x \in \mathbb{C}$.

On définit $A_n = \begin{pmatrix} a+x & & & & \\ & \ddots & & (b+x) & \\ & & \ddots & & \\ & (c+x) & & \ddots & \\ & & & & a+x \end{pmatrix}$ de taille n. Calculer $D_n = \det(A_n)$.

Exercice D6.12

On définit $P = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots 0 & a_1 & \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \det(\lambda I_n - C) = P(\lambda)$.

Exercice D6.13

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour quels a la matrice A est-elle inversible ? Calculer alors A^{-1}.

Exercice D6.14

Calculer le déterminant de chacun des endomorphismes $f \in \mathcal{L}(E)$ suivants.

1. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f : P(X) \mapsto X \times P'(X+2) + P(1) \cdot (X^3 - 1)$,
2. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f défini pour tout $M \in E$ par $f(M) = M^\top$,

Exercice D6.15

Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on définit une variable aléatoire $X_{i,j}$ telle que $X_{i,j}(\Omega) = \{-1, 1\}$ et elle suit une loi uniforme sur cet ensemble. On suppose également ces variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soit A la matrice de coefficients $X_{i,j}$. Déterminer $\mathbb{E}(\det(A))$ et $\mathbb{V}(\det(A))$.

3 Utilisation

Exercice D6.16

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice représentative de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer en fonction de λ le déterminant $\det(A - \lambda I_3)$. Pour quelles valeurs de λ est-il nul ?
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de u est diagonale et écrire les matrices de passage correspondantes.

Exercice D6.17

Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $((X - i)^n)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice D6.18

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ l'unique solution du système $AX = B$. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, si on note A_j la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa j-ième colonne par B, montrer que $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$.

Exercice D6.19

Soit $n \geqslant 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose semblables sur $\mathbb{C}$; c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $A = PBP^{-1}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.