

TD B10. Familles sommables

Exercice B10.1

Étudier la sommabilité des familles suivantes.



1. $\left(\frac{1}{x^2}\right)_{\substack{x \in \mathbb{Q} \\ x \geq 1}}$,
2. $\left(\frac{1}{(2p+1)2^q}\right)_{p,q \in \mathbb{N}}$,
3. $\left(\frac{1}{(2p+1)^2 2^q}\right)_{p,q \in \mathbb{N}}$.

Exercice B10.2

La famille $\left(\frac{1}{n^2 - p^2}\right)_{\substack{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ n \neq p}}$ est-elle sommable ?

Exercice B10.3

Calculer dans $[0, +\infty]$ la somme des familles suivantes.

1. $\left(\frac{1}{k!}\right)_{0 \leq n \leq k}$,
2. $\left(\frac{2^{2k-n}}{k!}\right)_{0 \leq k \leq n}$,
3.   $\left(\frac{1}{p!q!(p+q+1)}\right)_{p,q \in \mathbb{N}}$.

Exercice B10.4

Déterminer à quelle condition sur $z \in \mathbb{C}$ les familles suivantes sont sommables et calculer leur somme.




1. $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$,
2. $\left(\frac{q^p z^p}{p!q!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$,
3. $\left(\binom{p+q}{p} z^{p+q}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$.

Exercice B10.5

Pour tout $n > 2$, on note $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$.

1. Exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ en fonction de $\zeta(3)$.

2. On admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$, | (c) $\sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^* \\ m^2 n^2}} \frac{1}{m^2 n^2}$, | (e) $\sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^* \\ m \div n}} \frac{1}{m^2 n^2}$, |
| (b) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$, | (d) $\sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^* \\ m < n}} \frac{1}{m^2 n^2}$, | (f)    $\sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^* \\ m \wedge n = 1}} \frac{1}{m^2 n^2}$. |

Exercice B10.6

Soit $r, \theta \in \mathbb{R}$. Donner une condition suffisante pour que la famille $\left(r^{|z|} e^{iz\theta}\right)_{z \in \mathbb{Z}}$ soit sommable et, dans ce cas, calculer sa somme.

**Exercice B10.7**

Soit $x \in]-1, 1[$.

1. Montrer que $(x^{pq})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

2. Montrer que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{1-x^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$, où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n .

Exercice B10.8

Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série de nombres réels ou complexes que l'on suppose absolument convergente. Pour tout

$n \geq 1$, on pose $D_n = \sum_{k=1}^n k a_k$. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{D_n}{n(n+1)}$ est aussi absolument convergente et que les sommes de ces deux séries sont égales.