# Chapitre B10

# Familles sommables

**Objectifs**

- Sommabilité d'une famille.
- Manipulations d'une somme (paquets, Fubini).

## 1 Familles sommables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

**Notation.** On note $[0, +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On y étend les lois $+$ et $\times$ et la relation d'ordre $\leqslant$.

**Proposition B10.1**

Soit $A \subset [0, +\infty]$. Alors $A$ admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$. Si $A$ est majoré, sa borne supérieure, notée $\sup A$, coïncide avec celle dans $\mathbb{R}$. Sinon, $\sup A = +\infty$.

### 1.1 Sommabilité

**Notation.** Étant donné un ensemble $I$, on note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de $I$.

**Définition B10.2**

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$.

(i) On appelle **somme** de la famille $(u_i)_{i \in I}$ et on note $\displaystyle\sum_{i \in I} u_i$ la borne supérieure (dans $[0, +\infty]$) de l'ensemble des sommes sur les sous-familles finies. Autrement dit,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}.$$

(ii) On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** lorsque $\displaystyle\sum_{i \in I} u_i$ est finie.

**Proposition B10.3**

(i) Si $I$ est fini, alors la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ coïncide avec la somme finie $\sum\limits_{i\in I} u_i$.

(ii) Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est à support fini, alors elle est sommable et sa somme coïncide avec la somme (finie) de ses termes non nuls.

(iii) Si un de ses éléments vaut $+\infty$, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

**Proposition B10.4**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Alors on a équivalence entre

(i) La famille $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est sommable.

(ii) La série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est convergente.

Dans ce cas, la somme de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à la somme de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

## 1.2 Propriétés

**Théorème B10.5 (Comparaison)**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles à valeurs dans $[0,+\infty]$ telles que $\forall i \in I,\ u_i \leqslant v_i$. Alors

(i) $\sum\limits_{i\in I} u_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} v_i$.

(ii) Si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

(iii) Si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

**Proposition B10.6**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille à valeurs dans $[0,+\infty]$ et $J \subset I$. Alors

(i) $\sum\limits_{i\in J} u_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} u_i$.

(ii) Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

(iii) Si $(u_i)_{i\in J}$ n'est pas sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

**Théorème B10.7 (Changement d'indice)**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et $\varphi : J \to I$ une bijection. Alors

(i) $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_{\varphi(j)}$.

(ii) $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\varphi(j)})_{j\in J}$ est sommable.

**Proposition B10.8**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles à valeurs dans $[0,+\infty]$ et $\lambda \in ]0,+\infty[$.

(i) $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

(ii) $(u_i+v_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables.

(iii) $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$.

(iv) $(\lambda u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

### 1.3 Sommation par paquets et Fubini

**Théorème B10.9 (Sommation par paquets positif)**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de $I$. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i.$$

**Théorème B10.10 (Fubini positif)**

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$. Alors $\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable,

(ii) $\displaystyle\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)_{j\in J}$ est sommable,

(iii) $\displaystyle\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est sommable.

# 2 Cas général

Désormais $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 2.1 Sommabilité

**Définition B10.11**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

**Notation.** On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables indexées par $I$.

**Définition et proposition B10.12**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables. Dans ce cas, on définit la somme de la famille par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

**Définition et proposition B10.13**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont sommables. Dans ce cas, on définit la somme de la famille par

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + i\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i).$$

**Proposition B10.14**

(i) Si $I$ est fini, alors la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ coïncide avec la somme finie $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$.

(ii) Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est à support fini, alors elle est sommable et sa somme coïncide avec la somme (finie) de ses termes non nuls.

**Proposition B10.15**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors on a équivalence entre

(i) La famille $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est sommable.

(ii) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente.

Dans ce cas, la somme de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

## 2.2 Propriétés

**Proposition B10.16**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $J \subset I$. Alors

(i) Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

(ii) Si $(u_i)_{i\in J}$ n'est pas sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

**Théorème B10.17 (Changement d'indice)**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\varphi : J \to I$ une bijection. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\varphi(j)})_{j\in J}$ est sommable. Dans ce cas, on a

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_{\varphi(j)}.$$

**Proposition B10.18 (Linéarité)**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda u_i + \mu v_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$.

**Proposition B10.19 (Inégalité triangulaire)**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|.$$

## 2.3 Sommation par paquets et Fubini

**Théorème B10.20 (Sommation par paquets)**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(I_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de $I$. Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors

(i) pour tout $k \in K$, $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable,

(ii) $\displaystyle\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ est sommable,

(iii) $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} u_i$.

**Théorème B10.21 (Fubini)**

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(i) $\displaystyle\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)_{j\in J}$ est sommable,

(ii) $\displaystyle\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est sommable.

(iii) $\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$.

**Proposition B10.22**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles sommables à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors

(i) la famille $(u_iv_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable,

(ii) $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_iv_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right)$.

**Théorème B10.23 (Produit de Cauchy)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux familles sommables à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \displaystyle\sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} u_i v_j = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Alors la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

**Méthodes**

- Vérifier la sommabilité d'une famille.
- Calculer la somme d'une famille sommable.