

Problème 1

Soit $n \geq 2$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^+ la transposée de la comatrice de A . On rappelle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient de la i -ème ligne et j -ème colonne de la comatrice de A est $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$, où $A_{i,j}$ est la sous-matrice de A obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne. On rappelle de plus la relation

$$A \times A^+ = \det(A)I_n = A^+ \times A.$$

A Généralités

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est inversible. Déterminer une relation entre A^+ et A^{-1} .
2. Calculer A^+ dans le cas où $\text{rg}(A) \leq n - 2$.
3. On suppose dans cette question $\text{rg}(A) = n - 1$.
 - (a) Montrer que $A^+ \neq 0$.
 - (b) Comparer les noyaux et les images de A et A^+ et déterminer $\text{rg}(A^+)$.
4. Montrer que $\det(A^+) = (\det(A))^{n-1}$.
5. Exprimer $(A^+)^+$ en fonction de A .
Attention au cas particulier $n = 2$...

B Une relation

Dans cette partie, on cherche à démontrer la relation suivante :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (AB)^+ = B^+A^+.$$

6. Démontrer le résultat lorsque A et B sont inversibles.
7. On suppose maintenant $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconques.
 - (a) Montrer que l'application $P_A : x \mapsto \det(A + xI_n)$ est une application polynomiale de degré n .
 - (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, sauf pour un nombre fini de valeurs, $A + xI_n$ et $B + xI_n$ sont inversibles.
 - (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$M(x) = ((A + xI_n)(B + xI_n))^+ - (B + xI_n)^+(A + xI_n)^+.$$

Montrer que $M(x)$ est nulle pour une infinité de valeurs de x , puis pour tout $x \in \mathbb{R}$. Conclure.

8. Application. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $B^+ = P^{-1}A^+P$.
 - (b) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , \mathcal{E} une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans la base \mathcal{E} . Soit g l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{E} est A^+ . Montrer que g ne dépend que de f et pas de la base \mathcal{E} , ce qui permet de définir f^+ .

C Équation $A^+ = B$, d'inconnue A

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation

$$(E) : A^+ = B,$$

d'inconnue $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Résoudre (E) lorsque B est inversible.

On sera amené à distinguer plusieurs cas...

10. Résoudre (E) lorsque $\text{rg}(B) > 1$ et B n'est pas inversible.

11. On suppose maintenant $\text{rg}(B) = 1$.

(a) Résoudre (E) dans le cas où B est la matrice élémentaire $E_{1,1}$, puis dans le cas où $B = E_{2,1}$.

(b) On revient au cas général : B quelconque de rang 1. Montrer que B est semblable à $\lambda E_{1,1}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ou à $E_{2,1}$. En déduire que (E) admet au moins une solution.

D Un exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les termes diagonaux valent $1 - x$ et les autres 1.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-x \end{pmatrix}.$$

12. Calculer $\det(A_n)$.

13. Déterminer le rang de A_n .

14. Calculer explicitement A_n^+ lorsque $n \geq 2$.