

# TD D7. Espaces préhilbertiens

## 1 Produit scalaire

### Exercice D7.1

Pour chaque espace  $E$ , dire si l'application  $\varphi$  est un produit scalaire. Le cas échéant, calculer la norme de  $u$  pour la norme associée à ce p.s.

1.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + 2yy' + zz'$ ,  $u = (1, 2, 3)$ ,

2.  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$ ,  $u = X$ ,

3.  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $\varphi(P, Q) = \int_0^\pi e^t P(t)Q(t) dt$ ,  $u = 1$ ,

4.  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et  $\varphi(P, Q) = \int_0^\pi \sin(t)P(t)Q(t) dt$ ,  $u = 1$ ,

5.  $E = \mathcal{C}^1([0, 1])$  et  $\varphi(f, g) = \int_0^1 (f'(t)g(t) + f(t)g'(t)) dt$ ,  $u = \exp$ ,

6.  $E = \mathcal{C}^1([0, 1])$  et  $\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$ ,  $u = \exp$ ,

7.  $E = \mathcal{C}^1([0, 1])$  et  $\varphi(f, g) = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$ ,  $u = \exp$ ,

8.  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^\top B)$ ,  $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice D7.2

Soit  $E$  un espace préhilbertien pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $e_1, \dots, e_n$  des vecteurs normés de  $E$  tels que  $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle^2$ . Montrer que  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base orthonormée de  $E$ .

### Exercice D7.3

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $u$  pour que  $\varphi : (x, y) \mapsto \langle u(x), u(y) \rangle$  soit un produit scalaire.

### Exercice D7.4

Soit  $\mathcal{B} = \{(1, 2), (3, -1)\}$  une base de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer qu'il existe un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\mathcal{B}$  soit orthonormale.

### Exercice D7.5 $\mathbb{C} \prod \mathbb{P}$

Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$ . Déterminer l'existence et la valeur de la borne inférieure de

$$A = \left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \mid f \in E \right\}.$$


**Exercice D7.6**  $\mathbb{C} \mathbb{M} \mathbb{P}$ 

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ , on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- On suppose que  $u$  est une **isométrie vectorielle** de  $E$ , i.e.  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .
  - Montrer que  $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .
  - Montrer que  $u$  est bijectif.
- On note  $\mathcal{O}(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$ . Montrer que  $(\mathcal{O}(E), \circ)$  est un groupe.
- Soit  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Montrer que

$$u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est une b.o.n. de } E.$$

## 2 Orthogonalité et projections

**Exercice D7.7**

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F, G$  deux sev de  $E$ .

- Montrer que  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .
- Montrer que  $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ , avec égalité si  $E$  est de dimension finie.

**Exercice D7.8**  $\mathbb{C} \mathbb{M} \mathbb{P}$ 

Soit  $\ell^2$  l'ensemble des suites  $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telles que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2$  converge.

- Montrer que pour  $x = (x_n)$  et  $y = (y_n)$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , la série  $\sum x_n y_n$  est convergente.
- Montrer que  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$  définit un produit scalaire sur  $\ell^2$ .
- Soit  $F$  l'ensemble des suites presque nulles (i.e. dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux). Déterminer  $F^\perp$  et comparer  $F$  et  $(F^\perp)^\perp$ .

**Exercice D7.9**  $\mathbb{C} \mathbb{M} \mathbb{P}$ 

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Montrer que  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $f : x \mapsto \cos x$  et  $g : x \mapsto \cos(2x)$ . Déterminer le projeté orthogonal sur  $F$  de la fonction  $u : x \mapsto \sin^2 x$ .

**Exercice D7.10**  $\mathbb{C} \mathbb{M} \mathbb{P}$ 

On munit  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  du produit scalaire canonique et on note  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ .

- Montrer que  $F$  est un sev de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- Déterminer une base de  $F^\perp$ .
- Déterminer le projeté orthogonal de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $F$  puis la distance de  $J$  à  $F$ .

**Exercice D7.11** ⚙️

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$  et  $F = \mathbb{R}_2[X]$ . Pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ , on définit  $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ .

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.
2. Construire une base orthonormée pour  $F$ .
3. Calculer  $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$ .

**Exercice D7.12** ⚙️⚙️⚙️

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $p$  un projecteur de  $E$ . Montrer que  $p$  est un projecteur orthogonal si et seulement si  $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .

**Exercice D7.13** ⚙️⚙️

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. On note  $E^*$  l'ensemble des formes linéaires sur  $E$ .

1. Théorème de représentation de Riesz. Soit  $\varphi \in E^*$ . Montrer qu'il existe un unique  $a \in E$  tel que

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle x, a \rangle.$$

2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, y \mapsto \langle u(y), x \rangle$  est une forme linéaire. D'après ce qui précède, il existe donc un unique vecteur noté  $u^*(x)$  tel que  $\forall y \in E, \langle u(y), x \rangle = \langle y, u^*(x) \rangle$ . Ceci définit une application  $u^*$ , appelée **adjoint de  $u$** .
  - (a) Déterminer  $(\text{Id}_E)^*$ .
  - (b) Montrer que  $u \mapsto u^*$  est une symétrie de  $\mathcal{L}(E)$ .
  - (c) Montrer que  $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ .
3. Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ . Montrer que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^{\top}$ .
4. Montrer que  $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im } u)^{\perp}$ .
5. Soit  $F$  un sev de  $E$ . Montrer que  $F$  est stable par  $u$  si et seulement si  $F^{\perp}$  est stable par  $u^*$ .