Chapitre B11

Fonctions de deux variables

Objectifs

- Notion de continuité pour une fonction de deux variables.
- Dérivées partielles.
- Gradient et son interprétation.
- Recherche d'extrema.

1 Topologie d'un espace normé

1.1 Ouverts

Dans ce paragraphe, on énonce des résultats généraux dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, mais dans la perspective de ce chapitre, on pense $E = \mathbb{R}^2$, muni de la norme euclidienne.

Définition B11.1

Soit $\omega \in E$ et $r > 0$. On appelle

(i) **boule ouverte** de centre ω et de rayon r l'ensemble $B(\omega, r) = \{x \in E \mid \|x - \omega\| < r\}$,

(ii) **boule fermée** de centre ω et de rayon r l'ensemble $\overline{B}(\omega, r) = \{x \in E \mid \|x - \omega\| \leqslant r\}$,

Définition B11.2

Soit $x \in E$. On appelle **voisinage** de x toute partie de E qui contient une boule ouverte de centre x.

Notation. On notera $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages de x.

Définition B11.3

Soit $A \subset E$. On dit que A est un **ouvert** lorsqu'il est voisinage de chacun de ces points, autrement dit

$$\forall x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subset A.$$

On dit que A est un **fermé** de E lorsque son complémentaire est un ouvert.

Proposition B11.4

(i) $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.

(ii) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

(iii) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Proposition B11.5

(i) $\emptyset$ et E sont des fermés de E.

(ii) Toute intersection de fermés est un fermé.

(iii) Toute réunion finie de fermés est un fermé.

1.2 Continuité

Définition B11.6

Soit $\mathcal{U} \subset E$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue lorsque pour tout $x_0 \in \mathcal{U}$, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$, *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{U}, (\|x - x_0\| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon).$$

2 Dérivation

2.1 Fonctions partielles

Désormais on étudie les fonctions de deux variables, *i.e.* définies sur $\mathbb{R}^2$ ou sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans cette partie, $\mathcal{U}$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.

Définition B11.7

On appelle **graphe** de f la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathcal{U}\}.$$

Définition B11.8

Soit $a = (x_a, y_a) \in \mathcal{U}$. Les **fonctions partielles** de f en a sont les applications

$$f(\cdot, y_a) : x \mapsto f(x, y_a) \quad \text{et} \quad f(x_a, \cdot) : y \mapsto f(x_a, y).$$

Proposition B11.9

Si f est continue en $a \in \mathcal{U}$, alors ses fonctions partielles en a sont continues en a.

2.2 Dérivées partielles

Définition B11.10

Soit $a = (x_a, y_a) \in \mathcal{U}$. Notons $f_x = f(\cdot, y_a)$ et $f_y = f(x_a, \cdot)$ les fonctions partielles de f en a. On appelle **dérivées partielles** de f en a les dérivées des fonctions partielles de f en a, notées

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_a, y_a) = f_x'(x_a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_a, y_a) = f_y'(y_a).$$

Définition B11.11

On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est **de classe** $\mathcal{C}^1$ lorsqu'elle admet des dérivées partielles en tout point de $\mathcal{U}$ et que les fonctions dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{U}$, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Proposition B11.12

Soit $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i) $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

(ii) $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

(iii) Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

Théorème B11.13 (Développement limité à l'ordre 1)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathcal{U}$. Il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de $0_{\mathbb{R}^2}$ et tendant vers 0 en $0_{\mathbb{R}^2}$ telle que

$$\forall u = (h,k) \in V,\ f(a+u) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k + \|u\|\varepsilon(u).$$

2.3 Gradient

Définition B11.14

Si f possède des dérivées partielles en $a = (x_a, y_a)$, on appelle **gradient** de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

Proposition B11.15

Soit f, g admettant des dérivées partielles en tout $a \in \mathcal{U}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i) $\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$,

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f \nabla g$,

(iii) Si f ne s'annule pas, alors $\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\nabla f$.

(iv) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $\nabla(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f) \times \nabla f$.

2.4 Composition

Théorème B11.16 (Règle de la chaîne)

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, I un intervalle véritable et $\gamma : I \to \mathcal{U}$. Pour tout $t \in I$, on note

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Si f et γ sont de classe $\mathcal{C}^1$ (*i.e.* f, x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$), alors $\varphi = f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I,\ \varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))y'(t).$$

Théorème B11.17

Soit $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ tels que $\forall (u,v) \in \mathcal{U}$, $(x(u,v), y(u,v)) \in \mathcal{V}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V}, \mathbb{R})$. Alors $F : (u,v) \mapsto f(x(u,v), y(u,v))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et on a, pour tout $(u,v) \in \mathcal{U}$,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)),$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)).$$

3 Extrema

Définition B11.18

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{U}$. On dit que f a un

(i) **minimum local** en a lorsque f est minorée par $f(a)$ sur un voisinage de a ;
(ii) **maximum local** en a lorsque f est majorée par $f(a)$ sur un voisinage de a ;
(iii) **extremum local** en a lorsqu'elle a un minimum ou un maximum local en a ;
(iv) **minimum global** en a lorsque f est minorée par $f(a)$;
(v) **maximum global** en a lorsque f est majorée par $f(a)$;
(vi) **extremum global** en a lorsqu'elle a un minimum ou un maximum global en a.

Définition B11.19

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{U}$. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

Proposition B11.20

Si f a un extremum local en $a \in \mathcal{U}$, alors a est un point critique de f.

Méthodes

- Étude de la continuité d'une fonction de deux variables.
- Dérivation d'une fonction de deux variable.
- Utilisation de la règle de la chaîne.
- Détermination des extrema d'une fonction de deux variables.