TD B11. Fonctions de deux variables

1 Topologie, continuité

Exercice B11.1 ⚙

1. Soit $]a,b[$ et $]c,d[$ deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que $]a,b[\times]c,d[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que $U \times V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice B11.2 ⚙⚙

Soit $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

1. Montrer que f admet une dérivée en $(0,0)$ dans toutes les directions.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

2 Dérivation

Exercice B11.3 ⚙

Calculer les dérivées partielles de

1. $a : (x,y) \mapsto x^2 + 3x2y^3 - 2xy + 4y - 28$,
2. $b : (x,y) \mapsto \mathrm{Arctan}(1+xy)$,
3. $c : (x,y) \mapsto \cos(3xy - y^2)$,
4. $d : (x,y) \mapsto y\sin(\ln(x) - y^2)$,
5. $e : (x,y) \mapsto x^y$,
6. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{e^{xy^2}}{x+y}$.

Exercice B11.4 ⚙

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

1. Montrer que $\varphi : t \mapsto f\left(e^t, t + \dfrac{1}{t}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer l'expression de φ'.
2. Montrer que $\psi : (u,v) \mapsto f(u+v, uv)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.
3. Exprimer les dérivées partielles de $(r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

3 Équations aux dérivées partielles

Exercice B11.5 ⚙

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est **homogène de degré** $\alpha \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda > 0,\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y).$$

1. Montrer que les dérivées partielles d'une fonction homogène sont également homogènes.
2. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.

Exercice B11.6 ⚙⚙

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement si $\forall x, y, t \in \mathbb{R}^2,\ f(x+t, y+t) = f(x,y)$.

4 Extrema

Exercice B11.7

Déterminer les extrema des fonctions suivantes.

1. $f_1 : (x, y) \mapsto (x+y)^2 + x^4 + y^4$,
2. $f_2 : (x, y) \mapsto -x^2 - xy - y^2 + 3y - 2$,
3. $f_3 : (x, y) \mapsto x^2(1+y)^3 + y^4$,
4. $f_4 : (x, y) \mapsto e^{x \sin y}$.