

**Problème 1**

On admet dans tout le problème que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , on munit l'ensemble

$$\Omega_N = \{1, \dots, N\}^2$$

de la probabilité uniforme  $P_N$ . On note, pour  $d \in \mathbb{N}^*$ ,

$$A_{d,N} = \{(a, b) \in \Omega_N \mid d \text{ divise } a \text{ et } d \text{ divise } b\}.$$

1. Calculer  $P_N(A_{d,N})$ .
2. Exprimer l'événement

$$C_N = \{(a, b) \in \Omega_N \mid a \wedge b = 1\}$$

à l'aide des événements  $A_{p,N}$ , où  $p$  parcourt l'ensemble  $\mathcal{P}$  des nombres premiers.

3. Soit  $F$  un ensemble fini de nombres premiers. À l'aide de la formule du crible, montrer que

$$P_N \left( \bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} \frac{\left\lfloor \frac{N}{\prod_{p \in H} p} \right\rfloor^2}{N^2}.$$

4. (a) Montrer que pour  $I$  un ensemble fini et toute  $(x_i)_{i \in I}$  de nombres réels,

$$\prod_{i \in I} (1 + x_i) = \sum_{J \subset I} \prod_{j \in J} x_j.$$

- (b) En déduire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N \left( \bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \prod_{p \in F} \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right).$$

5. Montrer que, pour tout  $M \geq 1$ ,

$$P_N(C_N) \leq P_N \left( \bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right).$$

6. Montrer que

$$P_N(C_N) \geq P_N \left( \bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right) - \sum_{\substack{d > M \\ d \leq N}} P_N(A_{d,N}).$$

7. En déduire que, pour tout  $M \geq 1$  et tout  $N \geq 1$ ,

$$0 \leq P_N \left( \bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right) - P_N(C_N) \leq \sum_{d > M} \frac{1}{d^2}.$$

8. Montrer que la suite

$$\left( \prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right) \right)_{M \geq 1}$$

converge. On note  $\ell$  sa limite.

9. Montrer que la suite  $(P_N(C_N))_{N \geq 1}$  converge vers  $\ell$ .

On se propose maintenant de calculer  $\ell$ .

10. (a) Pour  $M \geq 1$ , montrer que la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{2k}}$$

converge pour tout nombre premier  $p \leq M$ .

(b) On pose alors

$$S_M = \prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} \right).$$

Montrer que

$$S_M = \sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2},$$

où

$$E_M = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \text{tout facteur premier de } n \text{ est } \leq M\}.$$

11. On pose

$$E_0 = \emptyset, \quad F_M = E_M \setminus E_{M-1} \quad (M \geq 1).$$

Montrer que  $(F_M)_{M \geq 1}$  est une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

12. En déduire que

$$\sum_{M=1}^{+\infty} \left( \sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in E_{M-1}} \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

13. Montrer que

$$S_M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

14. Montrer que, pour tout  $M \geq 1$ ,

$$S_M = \left( \prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left( 1 - \frac{1}{p^2} \right) \right)^{-1}.$$

15. En déduire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N(C_N) = \frac{6}{\pi^2}.$$