1. Si A est inversible, alors en multipliant à gauche par A^{-1} dans l'égalité $A \times A^+ = \det(A) I_n$, on obtient

$$\boxed{A^+ = \det(A) A^{-1}}$$

2. Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, alors les plus grandes sous-matrices de A inversibles sont de taille au plus $n-2$. En particulier, toutes les sous-matrices de A de taille $n-1$ sont non inversibles et donc de déterminant nul.

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{rg}(A) \leqslant n-2,\ A^+ = 0.}$$

3. (a) Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, alors A possède une sous-matrice de taille $n-1$ inversible et donc de déterminant non nul. Ainsi, il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $\det(A_{i,j}) \neq 0$ et $A^+ \neq 0$.

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{rg}(A) = n-1, \text{ alors } A^+ \neq 0.}$$

   (b) Comme $\mathrm{rg}(A) = n-1 < n$, $\det(A) = 0$. Ainsi $A \times A^+ = 0$ et $\mathrm{Im}(A^+) \subset \mathrm{Ker}(A)$. De même, $A^+ \times A = 0$ et $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^+)$. Comme $\dim \mathrm{Im}(A) = n-1$, on en déduit $n-1 \leqslant \dim \mathrm{Ker}(A^+)$. Or d'après la question précédente $A^+ \neq 0$, d'où $\dim \mathrm{Ker}(A^+) < n$. Par conséquent, $\dim \mathrm{Ker}(A^+) = n-1 = \dim \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^+) = \mathrm{Im}(A)$. D'après le théorème du rang, on en déduit $\dim \mathrm{Im}(A^+) = 1 = \dim \mathrm{Ker}(A)$, et comme $\mathrm{Im}(A^+) \subset \mathrm{Ker}(A)$, on en déduit $\mathrm{Im}(A^+) = \mathrm{Ker}(A)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A^+) = \mathrm{Im}(A)},\ \boxed{\mathrm{Im}(A^+) = \mathrm{Ker}(A)} \text{ et } \boxed{\mathrm{rg}(A^+) = 1}$$

4. On peut distinguer trois cas.
   - Si A est inversible, alors $A^+ = \det(A) A^{-1}$. On en déduit $\det(A^+) = (\det(A))^n \times \det(A^{-1}) = (\det(A))^n \times \dfrac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{n-1}$.
   - Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, alors $\det(A) = 0$ et $A^+ = 0$. Ainsi $\det(A^+) = 0 = (\det(A))^{n-1}$ car $n \geq 2$.
   - Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$, alors $\det(A) = 0$ et $\mathrm{rg}(A^+) = 1 < n$. Ainsi $\det(A^+) = 0 = (\det(A))^{n-1}$ car $n \geq 2$.

$$\boxed{\det(A^+) = (\det(A))^{n-1}}$$

5. On distingue aussi plusieurs cas.
   - Si A est inversible, alors A^+ est inversible et on a les relations

$$A \times A^+ = \det(A) I_n = A^+ \times A$$
$$\left(A^+\right)^+ \times A^+ = \det(A^+) I_n = A^+ \times \left(A^+\right)^+$$

   Ainsi

$$\left(A^+\right)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A = \frac{1}{\det(A^+)} \left(A^+\right)^+.$$

   On en déduit $\left(A^+\right)^+ = \dfrac{\det(A^+)}{\det(A)} A = (\det(A))^{n-2} A$.
   - Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$, alors $A^+ = 0$ et donc $\left(A^+\right)^+ = 0$.

- Si $n \geq 3$ et $\text{rg}(A) = n-1$, alors $\text{rg}(A^+) = 1 \leqslant n-2$ et donc $\left(A^+\right)^+ = 0$.
- Si $n = 2$, alors on peut faire un calcul direct. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors : $A^+ = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et donc $\left(A^+\right)^+ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$

On vérifie alors que dans tous les cas, on obtient

$$\boxed{\left(A^+\right)^+ = (\det(A))^{n-2} A}$$

6. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et, d'après la question 1,

$$\begin{aligned} (AB)^+ &= \det(AB)(AB)^{-1} = \det(A)\det(B)B^{-1}A^{-1} \\ &= \left(\det(B)B^{-1}\right)\left(\det(A)A^{-1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{(AB)^+ = B^+A^+}$$

7. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $(m_{i,j}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les coefficients de la matrice $A + xI_n$. Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $x \mapsto m_{i,j}(x)$ est une fonction polynomiale, de degré 1 si $i = j$, constante sinon. On a alors

$$P_A(x) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}(x).$$

On en déduit que $P_A : x \mapsto \det(A + xI_n)$ est une fonction polynomiale en tant que combinaison linéaire et produit de fonctions polynomiales. De plus, pour tout $\sigma \in S_n$

$$\deg\left(\prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \deg\left(m_{\sigma(i),i}\right) \begin{cases} = n & \text{si } \sigma = \text{id}_{[\![1,n]\!]} \\ < n & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{P_A : x \mapsto \det(A + xI_n) \text{ est une fonction polynomiale de degré } n.}$$

(b) Notons Z_A (resp. Z_B) l'ensemble des racines réelles du polynôme P_A (resp. P_B). Comme $\deg(P_A) = \deg(P_B) = n$, Z_A et Z_B sont des ensembles finis de cardinal au plus n. Notons $Z = Z_A \cup Z_B$. Z est alors une partie finie de $\mathbb{R}$, et si $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, alors $P_A(x) \neq 0$ et $P_B(x) \neq 0$. On en déduit que $A + xI_n$ et $B + xI_n$ sont inversibles.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ sauf pour un nombre fini de valeurs, } A + xI_n \text{ et } B + xI_n \text{ sont inversibles}}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, $A + xI_n$ et $B + xI_n$ sont inversibles, ainsi d'après la question 5, $M(x) = 0$. Comme Z est infini, la matrice $M(x)$ est nulle pour une infinité de valeurs de x. Or tous les coefficients de $x \mapsto A + xI_n$ sont des fonctions polynomiales. De la même manière qu'en 7a, on montre que les coefficients de $x \mapsto (A + xI_n)^+$ sont des fonctions polynomiales. On en déduit que tous les coefficients de M sont des fonctions polynomiales, en tant que somme et produit de fonctions polynomiales. Comme M est nulle pour une infinité de valeurs, on en déduit que toutes ces fonctions sont des fonctions nulles. On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}$, $M(x) = 0$, puis

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ((A + xI_n)(B + xI_n))^+ = (B + xI_n)^+ (A + xI_n)^+ .$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient le résultat

$$\boxed{(AB)^+ = B^+A^+}$$

8. (a) Comme $B = P^{-1}AP$, et d'après la question précédente

$$B^+ = P^+A^+\left(P^{-1}\right)^+.$$

Comme P, et donc P^{-1}, sont inversibles, on a d'après la question 1

$$P^+ = \det(P)P^{-1} \text{ et } \left(P^{-1}\right)^+ = \det(P^{-1})P = \frac{1}{\det(P)}P.$$

On en déduit le résultat

$$\boxed{B^+ = P^{-1}A^+P}$$

(b) Soit $\mathscr{E}'$ une autre base de E, B la matrice de f dans la base $\mathscr{E}'$ et g' l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{E}'$ est B^+. On a alors $B = P^{-1}AP$, avec P la matrice de passage de la base $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{E}'$. D'après la question précédente, $B^+ = P^{-1}A^+P$. Comme A^+ est la matrice de g dans la base $\mathscr{E}$, B^+ est la matrice de g dans la base $\mathscr{E}'$. Donc $g = g'$.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } g \text{ ne dépend pas de la base } \mathscr{E} \text{ choisie.}}$$

9. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible. On raisonne par analyse-synthèse.

An. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^+ = B$. D'après les premières questions, A est inversible et $\det(A)A^{-1} = B$, d'où $\dfrac{1}{\det(A)}A = B^{-1}$ et $A = \det(A)B^{-1}$. De plus, $\det(B) = \det(A^+) = \det(A)^{n-1}$.

Syn. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda^{n-1} = \det(B)$. On pose $A = \lambda B^{-1}$. Comme $\det(B) \neq 0$, $\lambda \neq 0$ et A est inversible. Ainsi, $A^+ = \det(A)A^{-1} = \lambda^n\left(\det(B)\right)^{-1}\lambda^{-1}B = \lambda^{n-1}\left(\det(B)\right)^{-1}B = B$.

On en déduit que l'équation $A^+ = B$ admet autant de solutions que l'équation $\lambda^{n-1} = \det(B)$ en a.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } n \text{ est pair, alors l'équation } A^+ = B \text{ admet pour unique solution } A = \sqrt[n-1]{\det(B)}B^{-1}.\\ \text{Si } n \text{ est impair et } \det(B) > 0\text{, alors l'équation } A^+ = B \text{ admet deux solutions } A = \pm\sqrt[n-1]{\det(B)}B^{-1}.\\ \text{Si } n \text{ est impair et } \det(B) < 0\text{, alors l'équation } A^+ = B \text{ n'admet aucune solution.}\end{array}}$$

10. D'après les premières questions, A^+ est soit inversible, soit nulle, soit de rang 1. Donc :

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{rg}(B) > 1 \text{ et } B \text{ n'est pas inversible, } (E) \text{ n'a pas de solution.}}$$

11. (a) On suppose $B = E_{1,1}$ et on raisonne par analyse-synthèse.

An. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^+ = B$. On écrit $A = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & L \\ \hline C & A' \end{array}\right)$, avec $a_{1,1} \in \mathbb{R}$, $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Notons $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Par définition de A^+, $b_{1,1} = 1 = \det(A')$. En particulier, A' est inversible. Notons $C_2, \ldots, C_n$ (resp. $L_2, \ldots, L_n$) les colonnes (resp. lignes) de A'. Celles-ci forment une base de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$). Donc il existe des scalaires $(\lambda_i)_{2 \leqslant i \leqslant n}$ (resp. $(\mu_i)_{2 \leqslant i \leqslant n}$) tels que $C = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i C_i$ (resp. $L = \sum_{i=2}^{n} \mu_i L_i$). On a alors :

- Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$:

$$(-1)^{i+1} b_{1,i} = 0 = \det \begin{pmatrix} L \\ L_2 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} L_2 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = -\sum_{k=2}^{n} \mu_k \det \begin{pmatrix} L_2 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_k \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = -\sum_{k=2}^{n} \mu_k \delta_{i,k} = -\mu_i$$

  On en déduit $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\mu_i = 0$, donc $L = 0$.
- De même, pour tout $j \in [\![2, n]\!]$:

$$\begin{aligned} (-1)^{j+1} b_{j,1} = 0 &= \det \begin{pmatrix} C & C_2 & \cdots & C_{j-1} & C_{j+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} C_2 & \cdots C_{j-1} & C & C_{j+1} & \ldots & C_n \end{pmatrix} \\ &= -\sum_{k=2}^{n} \lambda_k \det \begin{pmatrix} C_2 & \cdots & C_{j-1} & C_k & C_{j+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= -\sum_{k=2}^{n} \lambda_k \delta_{k,j} = -\lambda_j \end{aligned}$$

  On en déduit $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $\lambda_j = 0$, donc $C = 0$.
- Enfin, comme A' est inversible, un des mineurs au moins de A' est non nul. Donc il existe $i, j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\det(A'_{i,j}) \neq 0$. Ainsi, on a

$$(-1)^{i+j} b_{j+1,i+1} = 0 = \det \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & 0 \\ \hline 0 & A'_{i,j} \end{array} \right) = a_{1,1} \det(A'_{i,j}).$$

  On en déduit que $a_{1,1} = 0$.

Syn. On vérifie aisément que les matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array} \right)$,
avec $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\det(A') = 1$ conviennent.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } B = E_{1,1}, \text{ les solutions de } (E) \text{ sont les matrices de la forme } \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array} \right), \\ \text{avec } A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ et } \det(A') = 1. \end{array}}$$

De la même manière, on montre que

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si } B = E_{2,1}, \text{ les solutions de } (E) \text{ sont les matrices de la forme } \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline C & 0 & A' \end{array} \right), \\ \text{avec } C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}),\ A' \in \mathcal{M}_{n-1,n-2}(\mathbb{R}) \text{ et } \det \left(\begin{array}{c|c} C & A' \end{array} \right) = -1. \end{array}}$$

(b) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 et $b \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé. Comme $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(b) = 1$, on a $\dim \mathrm{Im}(b) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}\, b = n - 1$. On a alors deux cas possibles.

1er cas : $\mathrm{Im}\, b \subset \mathrm{Ker}\, b$. Soit (e_2) une base de $\mathrm{Im}\, b$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $(e_3, \ldots, e_n)$ tels que $(e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, b$. Enfin, comme $e_2 \in \mathrm{Im}\, b$, il existe $e_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $b(e_1) = e_2$. Comme $e_2 \neq 0$, $e_1 \notin \mathrm{Ker}\, b$, donc $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de b est $E_{2,1}$. Donc B est semblable à $E_{2,1}$.

2$^{\text{e}}$ cas : $\operatorname{Im} b \not\subset \operatorname{Ker} b$. Dans ce cas, comme $\operatorname{Im} b$ est une droite vectorielle, $\operatorname{Ker} b \cap \operatorname{Im} b = \{0\}$ et alors $\operatorname{Ker} b \oplus \operatorname{Im} b = \mathbb{R}^n$. Soit (e_1) une base de $\operatorname{Im} b$ et $(e_2, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} b$. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. De plus, $b(e_1) \in \operatorname{Im} b$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b(e_1) = \lambda e_1$. Et $\lambda \neq 0$ car $e_1 \notin \operatorname{Ker} b$. Dans cette base, la matrice de b est donc $\lambda E_{1,1}$. Donc B est semblable à $\lambda E_{1,1}$.

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{rg}(B) = 1, \text{ alors } B \text{ est semblable à } E_{2,1} \text{ ou à } \lambda E_{1,1}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^*.}$$

B est semblable à B', avec $B' = E_{2,1}$ ou $B' = \lambda E_{1,1}$. Il existe alors $P \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ tel que $B = P^{-1}B'P$. D'après la question précédente, l'équation $A'^+ = B'$ admet au moins une solution A'. (en multipliant par λ une ligne non nulle d'une solution de l'équation $A^+ = E_{1,1}$, on obtient une solution de l'équation $A^+ = \lambda E_{1,1}$.) En posant $A = P^{-1}A'P$, on a alors, d'après la question 8a, $A^+ = P^{-1}A'^+P = P^{-1}B'P = B$. Donc l'équation $A^+ = B$ admet au moins une solution.

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{rg}(B) = 1, \text{ l'équation } A^+ = B \text{ admet au moins une solution.}}$$

12. On effectue des opérations sur les lignes et les colonnes pour calculer $\det(A_n)$.

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-x & 1 & \dots & \dots & 1 \\ n-x & 1-x & \ddots & & \vdots \\ n-x & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-x & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-x & 1 & \dots & 1 & 1-x \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{n} C_k$$

$$= (n-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (n-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -x & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix} \quad C_i \leftarrow C_i - C_1, i \in [\![2, n]\!]$$

$$= (n-x)(-x)^{n-1}$$

$$\boxed{\det(A_n) = (-1)^n x^{n-1}(x-n)}$$

13. Si $n \geq 2$, d'après la question précédente, A_n est inversible ssi $x \notin \{0, n\}$. Donc $\operatorname{rg}(A_n) = n$ si $x \notin \{0, n\}$. Si $x = 0$, alors $\operatorname{rg}(A_n) = 1$, car dans ce cas toutes les colonnes sont identiques. Enfin, si $x = n$, alors $\operatorname{rg}(A_n) = n - 1$. En effet, dans ce cas, A_n n'est pas inversible, mais A_{n-1} qui est une sous-matrice de A_n de taille $n - 1$ est inversible. D'où le résultat (et on vérifie que ce résultat est encore valable pour $n = 1$).

$$\boxed{\operatorname{rg}(A_n) = \begin{cases} n & \text{si } x \notin \{0, n\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ n-1 & \text{si } x = n. \end{cases}}$$

14. Il y a plusieurs manières de parvenir au résultat.
    - Calculer chacun des coefficients de A_n^+. Il n'y a en fait que deux calculs de déterminant à effectuer, car on peut montrer que les coefficients diagonaux de A_n^+ sont tous identiques, et que les autres coefficients sont aussi tous identiques.

- Calculer A_n^{-1} lorsque A_n est inversible, puis A_n^+ dans ce cas et ensuite en déduire la valeur de A_n^+ dans tous les cas, en utilisant le fait que tous les coefficients de A_n^+ sont des fonctions polynomiales en x. Pour calculer l'inverse de A_n, on peut effectuer des opérations sur les lignes ou les colonnes, ou bien remarquer que A_n est annulé par un polynôme du second degré. C'est cette dernière méthode que nous allons employer ici.

Notons J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a alors $A_n = J_n - xI_n$. Ainsi, comme J_n commute avec I_n et $J_n^2 = nJ_n$:

$$\begin{aligned} A_n^2 &= (J_n - xI_n)^2 = J_n^2 - 2xJ_n + x^2 I_n \\ &= (n-2x)J_n + x^2 I_n = (n-2x)(A_n + xI_n) + x^2 I_n \\ &= (n-2x)A_n + x(n-x)I_n \end{aligned}$$

Ainsi, si $x \notin \{0, n\}$, on a

$$A_n \times \frac{1}{x(n-x)} \left(A_n - (n-2x)I_n\right) = I_n.$$

Dans ce cas, $A_n^{-1} = \dfrac{1}{x(n-x)} \left(A_n - (n-2x)I_n\right)$. On en déduit

$$A_n^+ = \det(A_n) A_n^{-1} = (-1)^{n+1} x^{n-2} \left(A_n - (n-2x)I_n\right) = (-1)^{n+1} x^{n-2} \begin{pmatrix} x+1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1-n \end{pmatrix}.$$

Enfin, comme les coefficients sont, au signe près, des déterminant de sous-matrices de A_n, ce sont des fonctions polynomiales en x. On a trouvé une expression polynomiale pour chacun des coefficients de A_n, valable pour une infinité de valeurs de x, elle est donc valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{A_n^+ = (-1)^{n+1} x^{n-2} \begin{pmatrix} x+1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1-n \end{pmatrix}}$$