

Problème 1

Ce problème est subdivisé en cinq parties.

- Dans la partie A, on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et la notion de système orthogonal. On démontre ensuite quelques résultats généraux qui seront utilisés par la suite.
- Dans la partie B, on définit les points de Gauß associés au produit scalaire considéré.
- Dans la partie C, on démontre quelques propriétés générales supplémentaires sur les systèmes orthogonaux. Les trois questions de cette partie sont indépendantes et les résultats démontrés ne sont pas utiles pour les parties suivantes.
- Dans la partie D, on considère un produit scalaire particulier, et on définit les polynômes de Legendre.
- Dans la partie E, on poursuit l'étude des points de Gauß de la partie B dans le cas particulier des polynômes de Legendre. Plus précisément on démontre l'entrelacement des zéros des polynômes de Legendre.

A Polynômes orthogonaux

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall t \in [a, b], w(t) > 0$.

1. Montrer que l'application $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], (P, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)w(t) dt.$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On appelle **système orthogonal** de $\mathbb{R}[X]$ toute famille de polynômes $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

- (i) $\forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l \Rightarrow (P_k, P_l) = 0$.
- (ii) $\forall k \in \mathbb{N}, \deg P_k = k$.

2. Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], (P_n, Q) = 0$.

3. (a) Montrer qu'il existe un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$. *Indication : on voudrait appliquer le théorème d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ et vérifier qu'on obtient bien un système orthogonal. Mais attention, le théorème de cours ne s'applique qu'aux familles finies !*
- (b) Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux systèmes orthogonaux de $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe une suite de réels $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, P_k = \lambda_k Q_k$. *On pourra utiliser les questions 2a et 2b pour montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, P_k$ et Q_k sont colinéaires.*

B Points de Gauß

Dans cette partie et la suivante, on considère un système orthogonal $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $(r_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de réels de $]a, b[$ deux à deux distincts, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall t \in [a, b]$, $Q(t) \geq 0$ et

$$P_k(X) = \varepsilon Q(X) \prod_{i=1}^p (X - r_i).$$

On pourra factoriser P_k en faisant apparaître toutes ses racines dans l'intervalle $]a, b[$, et en séparant celles de multiplicité paire de celles de multiplicité impaire.

- (b) Soit $R(X) = \prod_{i=1}^p (X - r_i)$. Montrer que $(P_k, R) \neq 0$. *On pourra utiliser ici la définition du produit scalaire.*
- (c) En déduire que $\deg R = k$, puis que toutes les racines complexes de P_k sont simples, réelles et dans l'intervalle $]a, b[$.
- (d) On désigne désormais par $r_{k,1} < r_{k,2} < \dots < r_{k,k}$ les racines de P_k . On les appelle les points de Gauß du polynôme P_k . Pourquoi cette suite ne dépend-elle que de w et pas du choix du système orthogonal $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$?

C Trois autres propriétés

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe trois réels α_n, β_n et γ_n tels que

$$XP_n = \alpha_n P_{n-1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n+1}.$$

On pourra décomposer XP_n dans la base orthogonale $(P_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, puis, pour en déduire le résultat, démontrer que $\forall A, B, C \in \mathbb{R}[X]$, $(AB, C) = (A, BC)$.

6. Soit φ la forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P) = \int_a^b P(t)w(t) dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note φ_n sa restriction à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Pour tout réel r , on note ψ_r la forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\psi_r(P) = P(r)$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ une famille de réels deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\psi_{x_j})_{1 \leq j \leq n}$ est une base du dual de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. *On pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.*
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille de réels $(\mu_{n,j})_{1 \leq j \leq n}$ tels que

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^n \mu_{n,j} \psi_{r_{n,j}}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \varphi(P) = \sum_{j=1}^n \mu_{n,j} P(r_{n,j}).$$

On pourra utiliser une division euclidienne.

7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $c_k = (X^k, 1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les déterminants

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} & c_{2n} \end{vmatrix} \quad D_n(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

où $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $\Delta_0 = c_0$ et $D_0(x) = 1$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_n = ((X^{i-1}, X^{j-1}))_{1 \leq i, j \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que A_n est inversible. En déduire $\Delta_n \neq 0$. On pourra introduire la matrice de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ dans une base orthonormale (attention!), et remarquer que A_n s'exprime comme un produit de deux matrices inversibles.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto D_n(x)$ est une application polynomiale dont on précisera le degré. On notera D_n le polynôme associé. On pourra développer le déterminant par rapport à la dernière ligne.
- (c) Montrer que si $k < n$, alors $(D_n, X^k) = 0$. En déduire que la famille $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal. On pourra développer le déterminant par rapport à la dernière ligne.

D Un exemple : les polynômes de Legendre

On suppose désormais que $a = -1$, $b = 1$ et $\forall x \in [-1, 1]$, $w(x) = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \frac{(X^2 - 1)^n}{2^n n!} \text{ et } L_n = U_n^{(n)}.$$

On note enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, λ_n le coefficient dominant de L_n . Les polynômes $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont appelés polynômes de Legendre.

8. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de L_n , le coefficient dominant λ_n de L_n , et calculer $L_n(1)$. On pourra appliquer la formule de Leibniz pour calculer $L_n(1)$. On doit trouver $L_n(1) = 1$.
9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $(U_n, P^{(n)}) = (-1)^n (L_n, P)$. On pourra montrer par récurrence que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(U_n, P^{(n)}) = (-1)^k (U_n^{(k)}, P^{(n-k)})$.
 (b) En déduire que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$.
 (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n et de coefficient dominant c . Montrer que $(L_n, P_n) = \frac{c}{\lambda_n} \|L_n\|^2$.
 (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières (L'_{n+1}, L_n) . En déduire une expression de $\|L_n\|$ en fonction de n .
10. (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X^2 - 1)U'_n = 2nXU_n$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)L'_n + 2XL'_n - n(n+1)L_n = 0.$$

On pourra dériver $n+1$ fois la relation donnée, à l'aide de la formule de Leibniz.

- (b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U'_{n+1} = XU_n$ et $U''_{n+1} = (2n+1)U_n + U_{n-1}$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0.$$

On pourra dériver n fois la première relation et $n-1$ fois la seconde, à l'aide de la formule de Leibniz.

11. Expliciter les polynômes L_0 , L_1 , L_2 et L_3 .

E Entrelacement des zéros des polynômes de Legendre

12. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x - y) \sum_{k=0}^n (2k + 1) L_k(x) L_k(y) = (n + 1) (L_{n+1}(x) L_n(y) - L_n(x) L_{n+1}(y)).$$

(b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n (2k + 1) L_k(x)^2 = (n + 1) (L'_{n+1}(x) L_n(x) - L'_n(x) L_{n+1}(x)).$$

(c) On pose $F_n = \frac{L_n}{L_{n+1}}$. Écrire F_n comme une combinaison linéaire d'éléments simples de première espèce et montrer que tous les résidus sont strictement positifs.

(d) En déduire les inégalités

$$r_{n+1,1} < r_{n,1} < r_{n+1,2} < r_{n,2} < \cdots < r_{n+1,n} < r_{n,n} < r_{n+1,n+1}.$$