

Problème 1

1. On a

$$A_{d,N} = \{(a, b) \in \Omega_N \mid d \mid a \text{ et } d \mid b\}.$$

Les multiples de d compris entre 1 et N sont exactement les kd tels que $1 \leq kd \leq N$, i.e. $\frac{1}{d} \leq k \leq \frac{N}{d}$.

Comme k est un entier, cela revient à $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor$. Il y en a donc $\left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor$. Ainsi

$$|A_{d,N}| = \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor^2.$$

Comme P_N est la probabilité uniforme sur Ω_N et que $|\Omega_N| = N^2$, on obtient

$$P_N(A_{d,N}) = \frac{\left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor^2}{N^2}.$$

2. Deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si aucun nombre premier ne les divise tous les deux. Ainsi

$$(a, b) \in C_N \text{ si et seulement si pour tout } p \in \mathcal{P}, (a, b) \notin A_{p,N}.$$

Donc

$$C_N = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} A_{p,N}^c.$$

3. Soit F un ensemble fini de nombres premiers. Par la formule du crible,

$$P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} P_N \left(\bigcap_{p \in H} A_{p,N} \right).$$

Si $H = \emptyset$, alors $\bigcap_{p \in H} A_{p,N} = \Omega_N$ et on adopte la convention

$$\prod_{p \in \emptyset} p = 1.$$

Si $H \neq \emptyset$, les éléments de H sont des nombres premiers deux à deux distincts. Ainsi

$$\bigcap_{p \in H} A_{p,N} = A_{\prod_{p \in H} p, N}.$$

En effet, un entier est divisible par tous les $p \in H$ si et seulement s'il est divisible par leur produit. D'après la première question et dans tous les cas,

$$P_N \left(\bigcap_{p \in H} A_{p,N} \right) = \frac{\left\lfloor \frac{N}{\prod_{p \in H} p} \right\rfloor^2}{N^2}.$$

On en déduit

$$P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} \frac{\left\lfloor \frac{N}{\prod_{p \in H} p} \right\rfloor^2}{N^2}.$$

4. (a) On démontre l'identité par récurrence sur $|I|$.

Init. Si $I = \emptyset$, alors les deux membres valent 1.

Hér. Supposons l'identité vraie pour toute partie de cardinal donné. Soit I un ensemble fini non vide et soit $i_0 \in I$. On pose $I' = I \setminus \{i_0\}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à I' , on obtient

$$\prod_{i \in I} (1 + x_i) = (1 + x_{i_0}) \sum_{J \subset I'} \prod_{j \in J} x_j.$$

Donc

$$\prod_{i \in I} (1 + x_i) = \sum_{J \subset I'} \prod_{j \in J} x_j + \sum_{J \subset I'} x_{i_0} \prod_{j \in J} x_j = \sum_{J \subset I'} \prod_{j \in J} x_j + \sum_{J \subset I' \cup \{i_0\}} \prod_{j \in J} x_j.$$

Le premier terme correspond aux parties de I ne contenant pas i_0 , et le second aux parties de I contenant i_0 . Ainsi

$$\prod_{i \in I} (1 + x_i) = \sum_{J \subset I} \prod_{j \in J} x_j.$$

(b) D'après la question précédente, pour F fixé,

$$P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} \frac{\left\lfloor \frac{N}{\prod_{p \in H} p} \right\rfloor^2}{N^2}.$$

Comme F est fini, $\prod_{p \in H} p$ est fini pour tout $H \subset F$. Donc pour tout $H \subset F$,

$$\frac{\left\lfloor \frac{N}{\prod_{p \in H} p} \right\rfloor^2}{N^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\prod_{p \in H} p \right)^2}.$$

Ainsi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} \frac{1}{\left(\prod_{p \in H} p \right)^2}.$$

Or, en appliquant le résultat précédent à la famille des $x_p = -\frac{1}{p^2}$ pour $p \in F$, on obtient

$$\sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} \frac{1}{\left(\prod_{p \in H} p \right)^2} = \prod_{p \in F} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right).$$

Donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \prod_{p \in F} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right).$$

5. On a $C_N = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} A_{p,N}^c \subset \bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c$. Par croissance de P_N ,

$$P_N(C_N) \leq P_N \left(\bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right).$$

6. On pose $B_{M,N} = \bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c$. On vient de montrer que $C_N \subset B_{M,N}$. Donc

$$P_N(C_N) = P_N(B_{M,N}) - P_N(B_{M,N} \setminus C_N).$$

Étudions maintenant $B_{M,N} \setminus C_N$. Soit $(a, b) \in B_{M,N} \setminus C_N$.

- Comme $a \wedge b \neq 1$, il existe $d > 1$ un diviseur commun à a et b , autrement dit $(a, b) \in A_{d,N}$.
- De plus, puisque $(a, b) \in B_{M,N}$, aucun nombre premier inférieur ou égal à M ne divise simultanément a et b . En particulier, tout diviseur commun de a et b est strictement supérieur à M .

Donc $(a, b) \in \bigcup_{\substack{d > M \\ d \leq N}} A_{d,N}$. Finalement

$$B_{M,N} \setminus C_N \subset \bigcup_{\substack{d > M \\ d \leq N}} A_{d,N}.$$

Par l'inégalité de Boole,

$$P_N(B_{M,N} \setminus C_N) \leq \sum_{\substack{d > M \\ d \leq N}} P_N(A_{d,N}).$$

Ainsi

$$P_N(C_N) \geq P_N \left(\bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right) - \sum_{\substack{d > M \\ d \leq N}} P_N(A_{d,N}).$$

7. D'après les deux questions précédentes,

$$0 \leq P_N \left(\bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right) - P_N(C_N) \leq \sum_{\substack{d > M \\ d \leq N}} P_N(A_{d,N}).$$

Or, pour tout $d \geq 1$, $P_N(A_{d,N}) = \frac{\lfloor \frac{N}{d} \rfloor^2}{N^2} \leq \frac{1}{d^2}$. Donc $\sum_{\substack{d > M \\ d \leq N}} P_N(A_{d,N}) \leq \sum_{d > M} \frac{1}{d^2}$. Finalement,

$$0 \leq P_N \left(\bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right) - P_N(C_N) \leq \sum_{d > M} \frac{1}{d^2}.$$

8. On pose

$$u_M = \prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Si M n'est pas premier, alors $u_M = u_{M-1}$. Si M est premier, alors $u_M = u_{M-1} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)$. Dans tous les cas,

$$0 \leq u_M \leq u_{M-1}.$$

La suite (u_M) est donc décroissante et minorée par 0. Elle converge. On note ℓ sa limite.

9. Pour tout $M \geq 1$, on pose $B_{M,N} = \bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c$. D'après la question 4 appliquée à $F = \{p \in \mathcal{P} \mid p \leq M\}$, on a

$$P_N(B_{M,N}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} u_M.$$

De plus, d'après la question 7,

$$0 \leq P_N(B_{M,N}) - P_N(C_N) \leq \sum_{d > M} \frac{1}{d^2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme

$$\sum_{d > M} \frac{1}{d^2} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad u_M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \ell,$$

on peut choisir $M \geq 1$ tel que

$$\sum_{d > M} \frac{1}{d^2} \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |u_M - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour ce M fixé, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$|P_N(B_{M,N}) - u_M| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors, pour tout $N \geq N_0$,

$$\begin{aligned} |P_N(C_N) - \ell| &\leq |P_N(C_N) - P_N(B_{M,N})| + |P_N(B_{M,N}) - u_M| + |u_M - \ell| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{P_N(C_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ell.}$$

10. (a) Soit $M \geq 1$ et soit $p \leq M$ un nombre premier. Comme $p \geq 2$, on a $0 < \frac{1}{p^2} < 1$. La série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{2k}}$ est donc une série géométrique de raison $\frac{1}{p^2}$, convergente, de somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}.$$

(b) Soient p_1, \dots, p_r les nombres premiers inférieurs ou égaux à M . Si $r = 0$, alors $M = 1$, le produit vide vaut 1 et $E_M = \{1\}$, donc le résultat est immédiat.

On suppose désormais $r \geq 1$. Les séries géométriques précédentes sont à termes positifs et convergent. Par produit fini de familles sommables positives, on a

$$S_M = \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r} \frac{1}{p_1^{2k_1} \cdots p_r^{2k_r}}.$$

On considère l'application $\varphi : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}^*$, $(k_1, \dots, k_r) \mapsto p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, φ est une bijection de \mathbb{N}^r sur E_M . En réindexant la famille sommable positive précédente par cette bijection, on obtient

$$S_M = \sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2}.$$

11. (a) On a $E_0 = \emptyset$ et, pour $M \geq 1$, $F_M = E_M \setminus E_{M-1}$.

- Les ensembles F_M sont deux à deux disjoints.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, alors $n \in E_1$, donc $n \in F_1$. Si $n \geq 2$, l'ensemble des facteurs premiers de n est fini et non vide. On note M son plus grand élément. Alors tous les facteurs premiers de n sont inférieurs ou égaux à M , donc $n \in E_M$, mais $n \notin E_{M-1}$. Ainsi $n \in F_M$.

Donc les ensembles F_M recouvrent \mathbb{N}^* et sont deux à deux disjoints. Ils forment un recouvrement disjoint de \mathbb{N}^* .

(b) La famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable car la série $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ converge. D'après le théorème de sommation par paquets appliqué à la partition $(F_M)_{M \geq 1}$ de \mathbb{N}^* , on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{M=1}^{+\infty} \sum_{n \in F_M} \frac{1}{n^2}.$$

Or $F_M = E_M \setminus E_{M-1}$ et $E_{M-1} \subset E_M$. Comme les sommes portent sur des termes positifs,

$$\sum_{n \in F_M} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in E_{M-1}} \frac{1}{n^2}.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{M=1}^{+\infty} \left(\sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in E_{M-1}} \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.}$$

12. D'après la question 10, $S_M = \sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2}$. Ainsi, pour tout $K \geq 1$,

$$\sum_{M=1}^K \left(\sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in E_{M-1}} \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{M=1}^K (S_M - S_{M-1}),$$

où l'on pose $S_0 = 0$. Cette somme est télescopique et vaut S_K . D'après la question précédente, la série de terme général $S_M - S_{M-1}$ converge et sa somme est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Par conséquent, la suite de ses sommes partielles converge vers cette somme, c'est-à-dire

$$S_M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

13. D'après la question 10(a), pour tout nombre premier p ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}.$$

Ainsi, pour tout $M \geq 1$,

$$S_M = \prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} = \left(\prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \right)^{-1}.$$

Donc

$$S_M = \left(\prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \right)^{-1}.$$

14. Par définition de ℓ ,

$$\prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \ell.$$

D'après la question précédente,

$$\prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{S_M}.$$

Or

$$S_M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Par opérations sur les limites, $\ell = \frac{1}{\pi^2/6} = \frac{6}{\pi^2}$. Comme on a déjà montré que $P_N(C_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ell$, on obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N(C_N) = \frac{6}{\pi^2}.$$