Problème 1

1.
- Tout d'abord, $(\cdot\,,\cdot)$ est bien défini, car pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $t \mapsto P(t)Q(t)w(t)$ est continue sur $[a, b]$ en tant que produit d'applications continues.
- Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On a

$$(P\,,Q) = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b Q(t)P(t)w(t)\,\mathrm{d}t = (Q\,,P).$$

Donc $(\cdot\,,\cdot)$ est symétrique.
- Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q\,,R) &= \int_a^b (\lambda P(t) + \mu Q(t))\,R(t)w(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (\lambda P(t)R(t)w(t) + \mu Q(t)R(t)w(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda \int_a^b P(t)R(t)w(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b Q(t)R(t)w(t)\,\mathrm{d}t = \lambda(P\,,R) + \mu(Q\,,R).\end{aligned}$$

Donc $(\cdot\,,\cdot)$ est linéaire par rapport à la première variable. De plus, comme il est symétrique, $(\cdot\,,\cdot)$ est bilinéaire.
— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a

$$(P\,,P) = \int_a^b P(t)^2 w(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme w est à valeurs strictement positives, on a $\forall t \in [a, b]\,,\ P(t)^2 w(t) \geqslant 0$. Comme $a < b$ et par positivité de l'intégrale, on en déduit $(P\,,P) \geqslant 0$. Donc $(\cdot\,,\cdot)$ est positif.
— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(P\,,P) = 0$. On a alors $\displaystyle\int_a^b P(t)^2 w(t)\,\mathrm{d}t$. Comme l'application $t \mapsto P(t)^2 w(t)$ est continue sur $[a, b]$, positive et d'intégrale nulle, on en déduit qu'elle est nulle sur $[a, b]$. Ainsi, $\forall t \in [a, b]\,,\ P(t)^2 w(t) = 0$, d'où, comme w est à valeurs strictement positives, $\forall t \in [a, b]\,,\ P(t) = 0$. Comme l'intervalle $[a, b]$ contient une infinité de valeurs, on en déduit que P est le polynôme nul. Donc $(\cdot\,,\cdot)$ est défini.

$$\boxed{(\cdot\,,\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

2. (a) Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système orthogonal et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\forall k \in [0, n]\,,\ \deg P_k = k \leqslant n$. Donc la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille échelonnée en degré de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une famille libre. De plus, cette famille possède $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc

$$\boxed{(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après la question précédente, $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc il existe $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k.$$

On a alors, par linéarité du produit scalaire,

$$(P_n\,,Q)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k(P_n\,,P_k)=0,$$

car $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $(P_n\,,P_k)=0$, par définition d'un système orthogonal.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ (P_n\,,Q)=0.}$$

3. (a) On définit par récurrence la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suivante, et on montre qu'il s'agit d'un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$.

$$\forall k\in\mathbb{N},\ P_k=X^k-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(X^k\,,P_i)}{\|P_i\|^2}P_i.$$

On remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est la famille orthogonalisée de Gram-Schmidt de la base canonique $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est bien définie et est orthogonale. Donc $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie et orthogonale. Il reste à montrer par récurrence forte sur $k\in\mathbb{N}$ que $\deg P_k=k$.

Init. Pour $k=0$, on a $P_0=X^0=1$. Ainsi $\deg P_0=0$.

Hér. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai pour tout $i<k$. D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $i\in[0,k-1]$, $\deg P_i=i$. En particulier, $\forall i\in[\![0,k-1]\!]$, $\deg P_i\leqslant k-1$. Donc $\deg\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(X^k\,,P_i)}{\|P_i\|^2}P_i\right)\leqslant k-1$. Donc $\deg P_k=k$.

Ainsi, on a vérifié que la famille $\boxed{(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est un système orthogonal de } \mathbb{R}[X]}$.

(b) Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux systèmes orthogonaux , et $k\in\mathbb{N}$. D'après la question 2a, $(Q_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $P_k\in\mathbb{R}_k[X]$, on a

$$P_k=\sum_{i=0}^{k}\frac{(P_k\,,Q_i)}{\|Q_i\|^2}Q_i.$$

Soit $i\in[0,k-1]$. Comme $\deg Q_i=i<k$, on a, d'après la question 2b, $(P_k\,,Q_i)=0$. Ainsi

$$P_k=\frac{(P_k\,,Q_k)}{\|Q_k\|^2}Q_k=\lambda_kQ_k,$$

avec $\boxed{\lambda_k=\frac{(P_k\,,Q_k)}{\|Q_k\|^2}}$.

4. (a) Soit $r_1,\dots,r_p$ les racines de P_k dans l'intervalle $]a,b[$ de multiplicités impaires, notées respectivement $2\mu_1+1,\dots,2\mu_p+1$. Soit $s_1,\dots,s_q$ les racines de P_k dans l'intervalle $]a,b[$ de multiplicités paires, notées respectivement $2\nu_1,\dots,2\nu_q$. Par théorème de factorisation, il existe alors un polynôme $A\in\mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_k(X)=A(X)\prod_{j=1}^{q}(X-s_j)^{2\nu_j}\prod_{i=1}^{p}(X-r_i)^{2\mu_i+1}.$$

Comme A n'a pas de racines dans $]a,b[$, il garde un signe constant sur $[a,b]$ (par continuité en a et b). Il existe alors $B \in \mathbb{R}[X]$ et et $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tels que $A(X) = \varepsilon B(X)$ et $\forall t \in [a,b]\,,\; B(t) \geqslant 0$. Ainsi

$$P_k(X) = \varepsilon \underbrace{B(X) \left(\prod_{j=1}^{q} (X - s_j)^{\nu_j} \right)^2 \left(\prod_{i=1}^{p} (X - r_i)^{\mu_i} \right)^2}_{=Q(X)} \prod_{i=1}^{p} (X - r_i).$$

Et on a bien $\forall t \in [a,b]\,,\; Q(t) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Il existe } p \in \mathbb{N},\ (r_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \text{ une famille de réels de }]a,b[\text{ deux à deux distincts, } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \varepsilon \in \{-1,1\} \text{ tels que } \forall t \in [a,b]\,,\; Q(t) \geqslant 0 \text{ et } P_k(X) = \varepsilon Q(X) \prod_{i=1}^{p} (X - r_i).}$$

(b) On a $(P_k\,, R) = \varepsilon \displaystyle\int_a^b Q(t) R(t)^2 w(t)\,\mathrm{d}t$ et $\forall t \in [a,b]\,,\; Q(t)R(t)^2 w(t) \geqslant 0$.
Raisonnons par l'absurde et supposons $(P_k\,, R) = 0$.
Alors, par positivité de l'intégrale, $\forall t \in [a,b]\,,\; Q(t)R(t)^2 w(t) = 0$. Comme $\forall t \in [a,b]\,,\; w(t) \neq 0$, on en déduit $\forall t \in [a,b]\,,\; Q(t)R(t)^2 = 0$, d'où $QR^2 = 0$ car Q et R sont des polynômes et $[a,b]$ est de cardinal infini.
Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre, $Q = 0$ ou $R = 0$ et donc, dans les deux cas, $P_k = 0$, ce qui est absurde.

$$\boxed{(P_k\,, R) \neq 0}$$

(c) Supposons $p < k$. Alors $\deg R = p < k$. D'après la question 2b, $(P_k\,, R) = 0$, ce qui contredit le résultat précédent. Donc $p = k$. Par conséquent, $\deg Q = 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$P_k(X) = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - r_i).$$

Comme les $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont deux à deux distincts et dans l'intervalle $]a,b[$,

$$\boxed{\text{les racines de } P_k \text{ sont toutes simples, réelles et dans l'intervalle }]a,b[.}$$

(d) Si $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un autre système orthogonal, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k et Q_k sont colinéaires. Ils ont donc les mêmes racines.

$$\boxed{\text{Les points de Gauß ne dépendent pas du système orthogonal choisi.}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $XP_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Comme $(P_k)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, on a

$$XP_n = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(XP_n\,, P_i)}{\|P_i\|^2} P_i.$$

Remarquons que pour tous $A, B, C \in \mathbb{R}[X]$,

$$(AB\,, C) = \int_a^b (A(t)B(t))\, C(t) w(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b A(t)\, (B(t)C(t))\, w(t)\,\mathrm{d}t = (A\,, BC).$$

Soit $i \in [0, n-2]$. Comme $\deg(XP_i) = i + 1 < n$, on a, d'après la question 2b,

$$(XP_n\,, P_i) = (P_n\,, XP_i) = 0.$$

En posant $\alpha_n = \dfrac{(XP_n\,, P_{n-1})}{\|P_{n-1}\|^2}$, $\beta_n = \dfrac{(XP_n\,, P_n)}{\|P_n\|^2}$ et $\gamma_n = \dfrac{(XP_n\,, P_{n+1})}{\|P_{n+1}\|^2}$.

$$\boxed{XP_n = \alpha_n P_{n-1} = +\beta_n P_n + \gamma_n P_{n+1}.}$$

6. (a) Soit $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$. Par définition, $\forall i \in [1, n]\,,\ L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et on a :

$$\forall i, j \in [1, n]\,,\ L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que la famille $(\psi_{x_j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une famille libre du duel $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$. Soit $(\lambda_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ des scalaires tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \psi_{x_j} = 0.$$

Soit $i \in [1, n]$. On évalue alors cette égalité en L_i, ce qui nous donne

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \psi_{x_j}(L_i) = 0.$$

D'où $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{i,j} = 0$ et donc $\lambda_i = 0$. Ainsi la famille $(\psi_{x_j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ est libre. Enfin, comme $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$ est de dimension n, et que la famille est de cardinal n, $\boxed{\text{c'est une base}}$.

$$\boxed{\text{La famille } (\psi_{x_j})_{1\leqslant j\leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_{n-1}[X]^*.}$$

(b) Les réels $(r_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ sont deux à deux distincts, donc la famille $\left(\psi_{r_{n,j}}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$. Comme $\varphi_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^*$,

$$\boxed{\exists\, (\mu_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbb{R}^n,\ \varphi_n = \sum_{j=1}^{n} \mu_{n,j} \psi_{r_{n,j}}}.$$

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On écrit la division euclidienne de P par P_n : il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QP_n + R$ et $\deg R < \deg P_n = n$. De plus, comme $\deg P \leqslant 2n-1$, on en déduit $\deg Q \leqslant n-1$. On a alors

$$\varphi(P) = \int_a^b Q(t)P_n(t)w(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b R(t)w(t)\,\mathrm{d}t = (Q\,,P_n) + \varphi(R).$$

Or

- Comme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(Q\,,P_n) = 0$.
- Comme $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(R) = \varphi_n(R) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_{n,j} \psi_{r_{n,j}}(R)$.
- Enfin, pour tout $j \in [1, n]$, $\psi_{r_{n,j}}(R) = R(r_{n,j})$. Et comme $r_{n,j}$ est une racine de P_n, on a $P(r_{n,j}) = Q(r_{n,j})P_n(r_{n,j}) + R(r_{n,j}) = R(r_{n,j})$.

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]\,,\ \varphi(P) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{n,j} P(r_{n,j}).}$$

7. (a) $\left(\dfrac{P_{i-1}}{\|P_{i-1}\|}\right)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $B_n=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ la matrice de la famille $\left(X^{j-1}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans cette base orthonormée. On a alors

$$\forall i,j\in[1,n+1]\,,\ b_{i,j}=\frac{(X^{j-1}\,,P_{i-1})}{\|P_{i-1}\|}.$$

L'expression du produit scalaire dans une base orthonormée donne alors, pour tout $i,j\in[1,n+1]$,

$$(X^{i-1}\,,X^{j-1})=\sum_{k=1}^{n+1}b_{k,i}b_{k,j}.$$

On reconnait alors la formule d'un produit matriciel : $A_n=B_n^\top B_n$. Comme la famille $\left(X^{j-1}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice B_n est inversible, et donc $\boxed{A_n \text{ est inversible}}$. Enfin, on remarque que

$$\forall i,j\in[1,n+1]\,,\ (X^{i-1}\,,X^{j-1})=(X^{i+j-2}\,,1)=c_{i+j-2}.$$

Ainsi, $\Delta_n=\mathrm{Det}(A_n)\,\boxed{\neq 0}$.

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Notons $M_n(x)$ la matrice

$$M_n(x)=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n\\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} & c_{2n-1}\\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n\end{pmatrix}.$$

On développe le déterminant $D_n(x)=\mathrm{Det}(M_n(x))$ par rapport à la dernière ligne. Notons $D_{n,j}$ le déterminant de la sous-matrice de $M_n(x)$ obtenue en supprimant la dernière ligne et la j-ème colonne. On a alors :

$$D_n(x)=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}D_{n,j}x^{j-1}.$$

Comme $D_{n,j}$ ne dépend pas de x, on en déduit que D_n est une fonction polynomiale de degré au plus n. De plus, comme $D_{n,n+1}=\Delta_{n-1}\neq 0$, $\boxed{D_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n}$.

(c) Soit $k<n$. En reprenant les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned}(D_n\,,X^k)&=(\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}D_{n,j}X^{j-1}\,,X^k)=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}D_{n,j}(X^{j-1}\,,X^k)\\ &=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}D_{n,j}(X^{j+k-1}\,,1)=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}D_{n,j}c_{j+k-1}\end{aligned}$$

On reconnait une formule de développement du déterminant par rapport à la dernière ligne. Ainsi :

$$(D_n\,,X^k)=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n\\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} & c_{2n-1}\\ c_k & c_{k+1} & \dots & c_{k+n-1} & c_{k+n}\end{vmatrix}=0,$$

car la dernière ligne de ce déterminant est égale à la $k+1$-ème.

$$\boxed{\forall k \in [0, n-1]\,,\ (D_n\,, X^k) = 0}$$

Montrons la famille $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal.

- On a déjà $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg D_n = n$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité et d'après ce qui précède, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\,,\ (D_n\,, P) = 0$. En particulier, pour tout $m < n$, on a $\deg D_m = m < n$, d'où $(D_n\,, D_m) = 0$. Donc la famille $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

$$\boxed{\text{La famille } (D_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est un système orthogonal.}}$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $U_n(X) = U_n(-X)$. Par récurrence, on montre

$$\forall k \in \mathbb{N},\ U_n^{(k)}(X) = (-1)^k U_n^{(k)}(-X).$$

En particulier, pour $k = n$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $\deg U_n = 2n$. Ainsi, $\deg L_n = \deg U_n - n = \boxed{n}$. De plus, le coefficient dominant de U_n est $\dfrac{1}{2^n n!}$. Il existe donc $V_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $U_n = \dfrac{X^{2n}}{2^n n!} + V_n$. Ainsi comme $\forall k \in [0, 2n]\,,\ (X^{2n})^{(k)} = \dfrac{(2n)!}{(2n-k)!} X^{2n-k}$, on obtient

$$L_n = \frac{(X^{2n})^{(n)}}{2^n n!} + V_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} X^n + V_n^{(n)}.$$

Comme $\deg V_n^{(n)} \leqslant n-1$, $\boxed{\lambda_n = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}}$. Pour calculer $L_n(1)$, on applique la formule de Leibniz à U_n. On a

$$U_n = \frac{(X-1)^n (X+1)^n}{2^n n!}.$$

Ainsi

$$L_n = U_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^n n!} \left((X-1)^n\right)^{(k)} \left((X+1)^n\right)^{(n-k)}.$$

Or, comme 1 est une racine de multiplicité n de $(X-1)^n$, on a $\forall k \in [0, n-1]\,,\ ((X-1)^n)^{(k)}(1) = 0$. Donc, lorsqu'on évalue en 1 l'égalité précédente, il ne reste que le terme pour $k = n$. Enfin, comme $(((X-1)^n)^{(n)}) = n!$, on obtient

$$L_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \times n! \times 2^n = \boxed{1}.$$

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. On montre par récurrence que

$$\forall k \in [0, n]\,,\ (U_n\,, P^{(n)}) = (-1)^k (U_n^{(k)}\,, P^{(n-k)}).$$

$\boxed{\textbf{Init.}}$ La propriété est vérifiée pour $k = 0$.

$\boxed{\textbf{Hér.}}$ Soit $k \in [0, n-1]$. On suppose que $(U_n\,, P^{(n)}) = (-1)^k (U_n^{(k)}\,, P^{(n-k)})$. On effectue une intégration par parties.

$$\begin{aligned}(U_n^{(k)}\,, P^{(n-k)}) &= \int_{-1}^{1} U_n^{(k)}(t) P^{(n-k)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[U_n^{(k)}(t) P^{(n-(k+1))}(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} U_n^{(k+1)}(t) P^{(n-(k+1))}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme $k \in [0, n-1]$ et 1 et -1 sont des racines de U_n de multiplicité n, $U_n^{(k)}(1) = 0 = U_n^{(k)}(-1)$. Ainsi :

$$(U_n^{(k)}\,, P^{(n-k}) = -\int_{-1}^{1} U_n^{(k+1)}(t) P^{(n-(k+1))}(t)\,\mathrm{d}t = -(U_n^{(k+1)}\,, P^{(n-(k+1))}).$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $(U_n\,, P_n^{(n)}) = (-1)^{k+1} (U_n^{(k+1)}\,, P^{(n-(k+1))})$.

D'après la principe de récurrence, la propriété est vérifiée pour tout $k \in [0, n]$. En particulier pour $k = n$,

$$\boxed{(U_n\,, P^{(n)}) = (-1)^k (L_n\,, P)}.$$

(b) On sait déjà que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg L_n = n$. Montrons que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.
Pour cela, montrons que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$, $(L_m\,, L_n) = 0$. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$. D'après la question précédente, on a

$$(L_n\,, L_m) = (-1)^n (U_n\,, L_m^{(n)}).$$

Or, comme $\deg L_m = m < n$, $L_m^{(n)} = 0$. Ainsi, $(L_n\,, L_m) = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (L_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est un système orthogonal de } \mathbb{R}[X].}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n et de coefficient dominant c. Comme $\deg L_n = n$, on a $\deg\left(P - \dfrac{c}{\lambda_n} L_n\right) \leqslant n$. Et comme le coefficient dominant de L_n est λ_n, le coefficient de degré n de $P - \dfrac{c}{\lambda_n} L_n$ est nul. Ainsi $\deg\left(P - \dfrac{c}{\lambda_n} L_n\right) \leqslant n-1$. Et puisque $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal, on a $(L_n\,, P - \dfrac{c}{\lambda_n} L_n) = 0$, d'après la question 2b. Finalement

$$(L_n\,, P) - \frac{c}{\lambda_n}(L_n\,, L_n) = 0$$
$$\boxed{(L_n\,, P) = \frac{c}{\lambda_n} \|L_n\|^2}$$

(d) • D'une part, on a $\deg(L'_{n+1}) = n$, et L'_{n+1} a pour coefficient dominant $(n+1)\lambda_{n+1}$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}(L'_{n+1}\,, L_n) &= \frac{(n+1)\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \|L_n\|^2 \\ &= (n+1) \times \frac{((2n+2)!)}{2^{n+1}((n+1)!)^2} \times \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \|L_n\|^2 \\ &= (2n+1) \|L_n\|^2 .\end{aligned}$$

- D'autre part, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}(L'_{n+1}\,, L_n) &= \int_{-1}^{1} L'_{n+1}(t)L_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= [L_{n+1}(t)L_n(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} L_{n+1}(t)L'_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= L_{n+1}(1)L_n(1) - L_{n+1}(-1)L_n(-1) - (L_{n+1}\,, L'_n).\end{aligned}$$

Or $L_n(1) = L_{n+1}(1) = 1$, $L_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$, $L_n(-1) = (-1)^n$ et $(L_{n+1}\,, L'_n) = 0$ car $\deg(L'_n) < \deg(L_{n+1})$ et la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal. On a donc

$$(L'_{n+1}\,, L_n) = 1 - (-1)^{2n+1} = 2.$$

Donc $\boxed{\|L_n\| = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}}$.

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(X^2-1)U'_n = (X^2-1)\frac{2nX(X^2-1)^{n-1}}{2^n n!} = 2nX\frac{(X^2-1)^n}{2^n n!}$$
$$\boxed{(X^2-1)U'_n = 2nXU_n}.$$

En dérivant $n+1$ fois cette égalité, on obtient, d'après la formule de Leibniz,

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(X^2-1)^{(k)}U_n^{(n+2-k)} = 2n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(X)^{(k)}U_n^{(n+1-k)}.$$

Comme $(X^2-1)^{(k)} = 0$ si $k > 2$ et $(X)^{(k)} = 0$ si $k > 1$, cela donne (et on vérifie que cette égalité est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$)

$$(X^2-1)U_n^{(n+2)} + 2(n+1)XU_n^{(n+1)} + (n+1)nU_n^{(n)} = 2nXU_n^{(n+1)} + 2n(n+1)U_n^{(n)}$$
$$\boxed{(X^2-1)L''_n + 2XL'_n - n(n+1)L_n = 0}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$U'_{n+1} = 2(n+1)X\frac{(X^2-1)^n}{2^{n+1}(n+1)!} = X\frac{(X^2-1)^n}{2^n n!}$$
$$\boxed{U'_{n+1} = XU_n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède et comme $(X^2-1)U_{n-1} = 2nU_n$, on a :

$$\begin{aligned}U''_{n+1} &= U_n + XU'_n = U_n + X^2U_{n-1} = U_n + (X^2-1)U_{n-1} + U_{n-1}\\ &= U_n + 2nU_n + U_{n-1}\end{aligned}$$
$$\boxed{U''_{n+1} = (2n+1)U_n + U_{n-1}}.$$

En dérivant n fois la première égalité et $(n-1)$ fois la seconde, on obtient, d'après la formule de Leibniz (de la même manière qu'à la question précédente), les deux égalités suivantes.

$$\begin{aligned}L_{n+1} &= XL_n + nU_n^{(n-1)},\\ L_{n+1} &= (2n+1)U_n^{(n-1)} + L_{n-1}.\end{aligned}$$

En multipliant la première par $2n+1$ et la seconde par n et en faisant la différence, on obtient

$$\boxed{(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0}$$

11. On a $\boxed{L_0 = 1}$ et $\boxed{L_1 = X}$. En utilisant la relation précédente, on obtient

$$\boxed{L_2 = \frac{1}{2}\left(3X^2 - 1\right)} \text{ et } \boxed{L_3 = \frac{1}{2}\left(5X^3 - 3X\right)}.$$

12. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. D'après la question 10*b*, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(2k+1)xL_k(x) = (k+1)L_{k+1}(x) + kL_{k-1}(x)$. Cette égalité est vérifiée pour $k = 0$, en posant $L_{-1} = 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)L_k(x)L_k(y) &= \sum_{k=0}^{n}\left((k+1)L_{k+1}(x) + kL_{k-1}(x)\right)L_k(y) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n}\left((k+1)L_{k+1}(y) + kL_{k-1}(y)\right)L_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\left(L_{k+1}(x)L_k(y) - L_k(x)L_{k+1}(y)\right) - k\left(L_k(x)L_{k-1}(y) - L_{k-1}(x)L_k(y)\right)\right].\end{aligned}$$

On reconnait alors une somme télescopique.

$$\boxed{(x-y)\sum_{k=0}^{n}(2k+1)L_k(x)L_k(y) = (n+1)\left(L_{n+1}(x)L_n(y) - L_n(x)L_{n+1}(y)\right)}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$. D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)L_k(x)L_k(y) = (n+1)\left(\frac{L_{n+1}(x) - L_{n+1}(y)}{x-y}L_n(y) - \frac{L_n(x) - L_n(y)}{x-y}L_{n+1}(y)\right).$$

En faisant tendre y vers x, on obtient le résultat voulu.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(2k+1)L_k(x)^2 = (n+1)\left(L'_{n+1}(x)L_n(x) - L'_n(x)L_{n+1}(x)\right)}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 4, on a $L_{n+1} = \lambda_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}(X - r_{n+1,i})$. Comme $\deg \dfrac{L_n}{L_{n+1}} = -1 < 0$, $F_n = \dfrac{L_n}{L_{n+1}}$ admet une décomposition en élément simples de la forme

$$F_n = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{a_i}{X - r_{n+1,i}}.$$

Avec $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Par théorème de cours, $a_i = \left(F_n(X)(X - r_{n+1,i})\right)_{|X = r_{n+1,i}}$. Or d'après la question précédente, on a l'égalité entre polynômes suivante, puisque les fonctions polynomiales associées sont égales sur $\mathbb{R}$, qui est de cardinal infini.

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)L_k^2 = (n+1)\left(L'_{n+1}L_n - L'_nL_{n+1}\right)$$

On divise cette égalité par $L_{n+1}L'_{n+1}$ et on isole F_n.

$$F_n = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)L_{n+1}L'_{n+1}} \sum_{k=0}^{n}(2k+1)L_k^2 + \frac{L'_n}{L'_{n+1}}$$

Soit $i \in [1, n+1]$. On a :

$$F_n(X)(X - r_{n+1,i}) = \underbrace{\frac{X - r_{n+1,i}}{(n+1)L_{n+1}L'_{n+1}}}_{=G_1(X)} \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(2k+1)L_k^2}_{=G_2(X)} + \underbrace{\frac{L'_n}{L'_{n+1}}(X - r_{n+1,i})}_{=G_3(X)}.$$

- Tout d'abord, G_2 est un polynôme, et on a clairement $G_2(r_{n+1,i}) > 0$.
- Ensuite, $r_{n+1,i}$ est une racine simple de L_{n+1}, donc n'est pas racine de L'_{n+1}. On en déduit que $r_{n+1,i}$ est racine de G_3 : $G_3(r_{n+1,i}) = 0$.
- Enfin, on a $L'_{n+1}(X) = \lambda_n \sum_{k=1}^{n+1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} (X - r_{n+1,j}) \right)$. Donc

$$L'_{n+1}(r_{n+1,i}) = \lambda_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (r_{n+1,i} - r_{n+1,j}) = \left(\frac{L_{n+1}(X)}{X - r_{n+1,i}} \right)_{|X = r_{n+1,i}}.$$

Ainsi, $G_1(r_{n+1,i}) = \dfrac{1}{(n+1)\left(L'_{n+1}(r_{n+1,i})\right)^2} > 0$. Finalement

$$a_i = (F_n(X)(X - r_{n+1,i}))_{|X = r_{n+1,i}} > 0.$$

$$\boxed{\text{On a } F_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{X - r_{n+1,i}}, \text{ avec } \forall i \in [1, n+1],\ a_i > 0.}$$

(d) Soit $i \in [1, n+1]$. En reprenant la factorisation de L_{n+1}, on a

$$a_i = \left(\frac{L_n(X)(X - r_{n+1,i})}{L_{n+1}(X)} \right)_{|X = r_{n+1,i}} = \frac{L_n(r_{n+1,i})}{\lambda_{n+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (r_{n+1,i} - r_{n+1,j})}$$

Or

- $a_i > 0$, $\lambda_{n+1} > 0$.
- Pour tout $j \in [1, n+1]$, $(r_{n+1,i} - r_{n+1,j})$ est strictement positif ssi $j < i$.

  Donc $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (r_{n+1,i} - r_{n+1,j})$ est du signe de $(-1)^{n-i+1}$.

On en déduit que pour tout $i \in [1, n+1]$, $L_n(r_{n+1,i})$ est non nul et du signe de $(-1)^{n-i+1}$. Par conséquent, pour tout $i \in [1, n]$, L_n change de signe sur l'intervalle $[r_{n+1,i}, r_{n+1,i+1}]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, L_n admet donc au moins une racine dans chacun de ces intervalles. Comme L_n admet exactement n racines, il admet exactement une racine dans chacun de ces intervalles. On en déduit le résultat.

$$\boxed{r_{n+1,1} < r_{n,1} < r_{n+1,2} < r_{n,2} < \cdots < r_{n+1,n} < r_{n,n} < r_{n+1,n+1}}.$$