

Problème 1

Pour tout nombre entier $n \geq 2$, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction f_n par

$$\text{pour tout } x \in]0, +\infty[, f_n(x) = \frac{1 + n \ln(x)}{x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

Étude de fonctions

1. Étudions les fonctions f_n .
 - (a) Pour tout $x > 0$, exprimer $f'_n(x)$ sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n - 2 - 2n \ln x$.
 - (b) Résoudre l'équation $f'_n(x) = 0$ et étudier le signe de $f'_n(x)$.
 - (c) Déterminer les limites de f_n en 0 et $+\infty$. On pourra utiliser que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.
 - (d) Dresser le tableau de variations de f_n et calculer (en fonction de n) sa valeur maximale.
2. Tracé de quelques courbes.
 - (a) Donner une allure des courbes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
 - (b) Pour $n \geq 0$, calculer $f_{n+1} - f_n$.
 - (c) Comment peut-on déduire de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ l'allure de la courbe $\mathcal{C}_4$?

Un bol d'aires

3. Calculer la dérivée de g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.
4. En déduire que $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$.
5. Déduire de ce qui précède l'aire (en unités d'aire) du domaine du plan compris entre les courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ et les droites $x = 1$ et $x = e$.
6. On appelle A_n l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = e$.
 - (a) Calculer A_2 .
 - (b) Déterminer la nature de la suite (A_n) et interpréter géométriquement sa raison.
 - (c) Exprimer A_n en fonction de n .

Étude de l'équation $f_n(x) = 1$

Pour toute la fin du problème, on suppose $n \geq 3$.

7.
 - (a) Montrer que pour tout $n \geq 3$, $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$.
 - (b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1, e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.

8. Pour $t \geq 1$, on pose $h(t) = \frac{\ln t}{t}$.
- (a) Étudier les variations de h .
 - (b) En déduire que pour tout $t > 1$, $h(t) \leq \frac{1}{e}$ puis que pour tout $n \geq 3$, $f_n(n) < 1$.
9. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ a exactement une solution sur l'intervalle $\left] e^{\frac{n-2}{2n}}, n \right[$. On la note α_n .
10. Combien l'équation $f_n(x) = 1$ a-t-elle de solutions sur $]0, +\infty[$?
11. (a) Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que pour tout $n \geq e^2$, $f_n(\sqrt{n}) > 1$.
- (b) En déduire que pour tout $n \geq 8$, on a $\sqrt{n} < \alpha_n < n$. (*on pourra utiliser que $\ln(2) > 2/3$*)
 - (c) Donner la limite de la suite α_n .

Problème 1

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{1 + n \ln(x)}{x^2}$.

Étude de fonctions

1. (a) f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\text{Pour tout } x \in]0, +\infty[, f'_n(x) = \frac{nx - 2x(1 + n \ln x)}{x^4} = \frac{n - 2 - 2n \ln x}{x^3}.$$

(b)

$$\frac{n - 2 - 2n \ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow n - 2 - 2n \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{n - 2}{2n} \Leftrightarrow x = e^{\frac{n-2}{2n}}.$$

Ainsi $f'_n(x) \geq 0$ pour $x \leq e^{\frac{n-2}{2n}}$ et $f'_n(x) \leq 0$ pour $x \geq e^{\frac{n-2}{2n}}$.

(c) **En 0 :** $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} 1 + n \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \end{array} \right\}$ donc par produit, $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty$.

En $+\infty$: $f_n(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{n \ln(x^2)}{2x^2}$. *Astuce classique :* $\ln x = \frac{1}{2} \ln(x^2)$.

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ par croissances comparées. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$ (par composition).

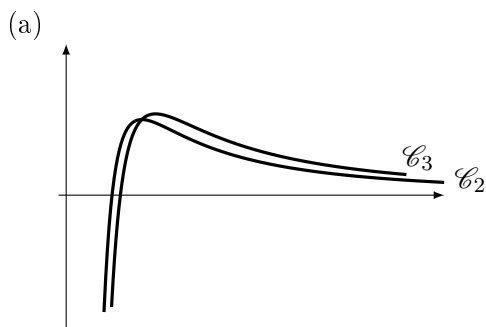
De plus $\lim_{1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

(d) En notant désormais $a = e^{\frac{n-2}{2n}}$,

x	0	a	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	$-\infty$	$f_n(a)$	0

Le maximum de f_n est atteint en a et vaut $f_n(a) = \frac{n}{2e^{\frac{n-2}{n}}}$.

2. Tracé de quelques courbes.



(b) Pour tous $n \geq 0$ et $x > 0$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

(c) Cet écart ne dépend pas de n . Donc pour tracer $\mathcal{C}_4$, il suffit de reporter à partir de $\mathcal{C}_3$ l'écart observé pour chaque abscisse entre $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Un bol d'aires

3. g est dérivable et pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$.

4. Donc

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = [g(x)]_1^e = \boxed{\frac{-2}{e} + 1}.$$

5. Sur $[1, e]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ donc $\mathcal{C}_{n+1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_n$. L'aire en question est alors donnée par

$$\int_1^e (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \boxed{1 - \frac{2}{e}}.$$

6. (a) $A_2 = \int_1^e \left(\frac{1 + 2 \ln x}{x^2} \right) dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} dx + 2 \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e + 2 \left(1 - \frac{2}{e} \right) = \boxed{= 3 - \frac{5}{e}}.$

(b) $A_{n+1} - A_n = \int_1^e (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = 1 - \frac{2}{e}$ donc (A_n) est une suite arithmétique de raison $1 - \frac{2}{e}$. Cette raison correspond à l'aire calculée à la question 5, comprise entre les courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$.

(c) Alors pour tout $n \geq 0$, $A_n = A_0 + n \left(1 - \frac{2}{e} \right)$. Or $A_0 = \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{e}$ (déjà calculé).

Donc $\boxed{A_n = 1 + n - \frac{1 + 2n}{e}}.$

Étude de l'équation $f_n(x) = 1$

7. (a) Pour tout $n \geq 3$, $\frac{n-2}{2n} > 0$ donc $\boxed{e^{\frac{n-2}{2n}} > 1}$. De plus, $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = f_n(a) = \frac{n}{2e^{\frac{n-2}{n}}}$.

- On a toujours $e^{\frac{n-2}{n}} < e$. Donc $f_n(a) > \frac{n}{2e}$. Pour $n \geq 6$, $e < 3$ donc $f(a) > \frac{6}{2 \times 3} = 1$.
- Pour $n = 5$, $e < 3$ donc $e^3 < 27 < 32 = 2^5$. Donc $e^{3/5} < 2$. Donc $\frac{n}{2e^{3/5}} > \frac{5}{2 \times 2} > 1$.

- Pour $n = 4$, $e < 4$ donc $\sqrt{e} < 2$. Donc $\frac{4}{2e^{1/2}} > \frac{4}{2 \times 2} = 1$.
- Pour $n = 3$, $e < 3 < \frac{27}{8}$ donc $e^{1/3} < \frac{3}{2}$. D'où $\frac{n}{2e^{1/3}} > \frac{3}{2 \times 3/2} = 1$.

On a donc montré que dans tous les cas pour $n \geq 3$, $\boxed{f_n(a) > 1}$.

- (b) f est strictement monotone sur l'intervalle $]1, e^{\frac{n-2}{2n}}[$ et ne prend que des valeurs strictement supérieures à 1 d'après ce qui précède.

Donc l'équation $f_n(x) = 1$ n'a $\boxed{\text{pas de solution sur }]1, e^{\frac{n-2}{2n}}[}$.

8. (a) h est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour $t \geq 1$, $h'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$. L'étude du signe de $h'(t)$ donne les variations suivantes.

t	1	e	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	0	$\nearrow 1/e$	$\searrow 0$

- (b) D'après les variations précédentes, $\boxed{h(t) \leq \frac{1}{e}}$.

Par ailleurs, $f_n(n) = \frac{1 + n \ln n}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{\ln n}{n}$. Or $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{4}$ et $\frac{\ln n}{n} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$. Donc $\boxed{n \geq 3, f_n(n) < 1}$.

9. Sur l'intervalle $]e^{\frac{n-2}{2n}}, n[$, f_n est strictement décroissante de $f_n(a) > 1$ à $f_n(n) < 1$. Donc d'après le théorème de la bijection, il existe dans cet intervalle $\boxed{\text{un unique } \alpha_n \text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 1}$.

10. D'après les variations étudiées précédemment, f_n réalise une bijection de $[0, a]$ dans $] -\infty, f(a)]$ et de $[a, +\infty[$ dans $]0, f(a)[$, avec $f(a) > 1$. D'après le théorème de la bijection appliqué sur chacun de ces intervalles,

$\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 1 \text{ admet 2 solutions sur }]0, +\infty[}$.

11. (a) $f_n(\sqrt{n}) = \frac{1 + n \ln(\sqrt{n})}{n} = \frac{1}{n} + \ln(\sqrt{n})$.

Pour tout $n \geq e^2$, $\sqrt{n} \geq e$ donc $f_n(\sqrt{n}) \geq \frac{1}{n} + 1$, d'où $\boxed{f_n(\sqrt{n}) > 1}$.

- (b) Donc pour tout $n \geq 8$, on a $f_n(\sqrt{n}) > f_n(\alpha_n) > f_n(n)$ avec f_n strictement décroissante sur cet intervalle, donc $\boxed{\sqrt{n} < \alpha_n < n}$.

- (c) $\alpha_n > \sqrt{n}$ donc par comparaison, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty}$.

Problème 1

Les différentes questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Déterminer les solutions réelles de l'équation : $\cos(3x) - \cos x = \sin x \sin(4x)$.
2. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos(4x) = \lfloor \sin(x) \rfloor$.
3. (a) Déterminer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
(b) En déduire les solutions réelles de l'équation : $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$.
4. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)$.
(b) En déduire la valeur de $S(x) = \cos^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Problème 2

Les différentes questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Des parties entières.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
 - (b) Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$. Quelles sont les valeurs possibles de $\lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor)$?
 - (c) Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.
2. Des valeurs absolues.
 - (a) Montrer que $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
 - (b) Montrer que $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.
 - (c) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $u(a) = \frac{|a|}{1 + |a|}$. Montrer que $u(x + y) \leq u(x) + u(y)$.

Problème 1

1. Soit
- $x \in \mathbb{R}$
- . On a

$$\begin{aligned}
\cos(3x) - \cos x &= \sin x \sin(4x) \Leftrightarrow -2 \sin(2x) \sin x = \sin x \sin(4x) \\
&\Leftrightarrow 2 \sin x \sin(2x) (\cos(2x) + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \sin(2x) = 0 \text{ ou } \cos(2x) = -1 \\
&\Leftrightarrow x \equiv 0 [\pi] \text{ ou } 2x \equiv 0 [\pi] \text{ ou } 2x \equiv \pi [2\pi] \\
&\Leftrightarrow x \equiv 0 [\pi] \text{ ou } x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\
&\Leftrightarrow x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

En effet, si $x \equiv 0 [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, alors en particulier, $x \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Soit
- $x \in [0, 2\pi[$
- .
- $\sin(x) \in [-1, 1]$
- donc
- $\lfloor \sin(x) \rfloor \in \{-1, 0, 1\}$
- .

1^{er} cas : $\lfloor \sin(x) \rfloor = 1$. Alors $x = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, $\cos(4x) = 1$, donc on a une solution de l'équation.

2^e cas : $\lfloor \sin(x) \rfloor = 0$. Alors $x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. On résout

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= 0 \Leftrightarrow 4x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\
&\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{k\pi}{8} \mid k \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}\right\}.
\end{aligned}$$

Parmi ces valeurs, seules $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8}$ sont dans $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

3^e cas : $\lfloor \sin(x) \rfloor = -1$. Alors $x \in]\pi, 2\pi[$.

$$\text{On résout } \cos(4x) = -1 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}.$$

Parmi ces valeurs, seules $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ sont dans $]\pi, 2\pi[$.

Finalement les solutions sont $\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

3. (a) En utilisant que
- $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$
- ,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} & &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cos x + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \sin x = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin x = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{12} \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \\
 \boxed{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2 \Leftrightarrow x \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]}.
 \end{aligned}$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
 \cos^4 x + \sin^4 x &= (1 - \sin^2 x)^2 + \sin^4 x = (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) + \sin^4 x \\
 &= 1 - 2\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, on a

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \cos^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \cos^4 x + \left(-\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)^4 + (-\sin(x))^4 + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \cos^4 x + \sin^4 x + \cos^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x)\right) + \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right) \\
 &= 2 - \frac{1}{2} \sin^2(2x) - \frac{1}{2} \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= 2 - \frac{1}{2} \sin^2(2x) - \frac{1}{2} \cos^2(2x) = 2 - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{S(x) = \frac{3}{2}}.$$

Problème 2

Soit $x, y \in \mathbb{R}$

1. Des parties entières.

(a) On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. En ajoutant n aux trois membres on obtient

$$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1.$$

et $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$. Par unicité dans la définition de $\lfloor x + n \rfloor$,

$$\boxed{\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n}$$

(b) Posons $m = \lfloor x \rfloor$ et $n = \lfloor y \rfloor$. Alors

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \quad \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

En sommant, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$, soit $0 \leq \lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) < 2$.
Comme $\lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) \in \mathbb{Z}$, on a

$$\boxed{\lfloor x + y \rfloor - (\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) \in \{0, 1\}}.$$

(c) Écrivons $x = m + s$, $y = n + t$ avec $m = \lfloor x \rfloor$, $n = \lfloor y \rfloor$ et $s, t \in [0, 1[$. D'après la première question, on a

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = m + n + \lfloor m + n + s + t \rfloor = 2m + 2n + \lfloor s + t \rfloor,$$

puis

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = \lfloor 2m + 2s \rfloor + \lfloor 2n + 2t \rfloor = 2m + 2n + \lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor.$$

Il reste donc à vérifier, pour $s, t \in [0, 1[$, que

$$\lfloor s + t \rfloor \leq \lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor.$$

On distingue les cas :

- si $s < \frac{1}{2}$ et $t < \frac{1}{2}$, alors $\lfloor 2s \rfloor = \lfloor 2t \rfloor = 0$ et $s + t < 1$, donc $\lfloor s + t \rfloor = 0$;
- si un des deux (exactement un) est $\geq \frac{1}{2}$, alors $\lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor = 1$ et $\lfloor s + t \rfloor \in \{0, 1\}$;
- si $s \geq \frac{1}{2}$ et $t \geq \frac{1}{2}$, alors $\lfloor 2s \rfloor = \lfloor 2t \rfloor = 1$ donc $\lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor = 2$ et $1 \leq \lfloor s + t \rfloor \leq 1$.

Dans tous les cas $\lfloor s + t \rfloor \leq \lfloor 2s \rfloor + \lfloor 2t \rfloor$, d'où

$$\boxed{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor}.$$

2. Des valeurs absolues.

(a) On a l'identité

$$2x = (x + y) + (x - y).$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$2|x| = |2x| = |(x + y) + (x - y)| \leq |x + y| + |x - y|.$$

De même $2|y| \leq |x + y| + |x - y|$. En sommant ces deux inégalités et en divisant par 2 on obtient

$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|.$$

$$\boxed{|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|}.$$

(b) Développons

$$xy - 1 = (x - 1)(y - 1) + (x - 1) + (y - 1).$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|xy - 1| \leq |x - 1||y - 1| + |x - 1| + |y - 1|.$$

En ajoutant 1 des deux côtés :

$$1 + |xy - 1| \leq 1 + |x - 1| + |y - 1| + |x - 1||y - 1| = (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|).$$

$$\boxed{1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)}$$

(c) Par l'inégalité triangulaire on a $1 + |x + y| \leq 1 + |x| + |y|$, d'où

$$u(x + y) = \frac{|x + y| + 1 - 1}{1 + |x + y|} = 1 - \frac{1}{1 + |x + y|} \leq 1 - \frac{1}{1 + |x| + |y|}.$$

$$\text{Puis } u(x + y) \leq \frac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|} = \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} + \frac{|y|}{1 + |x| + |y|}.$$

$$\text{Comme } 1 + |x| \leq 1 + |x| + |y|, \frac{|x|}{1 + |x|} \geq \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} \text{ car } |x| \geq 0.$$

$$\text{De même } \frac{|y|}{1 + |y|} \geq \frac{|y|}{1 + |x| + |y|}.$$

$$\text{Finalement, } u(x + y) \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}, \text{ soit}$$

$$\boxed{u(x + y) \leq u(x) + u(y)}.$$

Problème 1

On pose $s(1) = 1$, $s(2) = 3 + 5$, $s(3) = 7 + 9 + 11$, et ainsi de suite, si bien que pour $n \geq 2$, $s(n)$ désigne la somme des n nombres impairs suivant ceux qui apparaissent dans $s(n-1)$.

1. Calculer $s(i)$ pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et émettre une conjecture sur la valeur de $s(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $I(k)$ le k -ième entier naturel impair.

(a) Donner la valeur de $I(k)$ en fonction de k .

(b) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on appelle $A(N) = \sum_{k=1}^N I(k)$. Calculer $A(N)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B(n) = \sum_{i=1}^n s(i)$. Calculer $B(n)$.

(d) En déduire une expression simple de $s(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Déduire des résultats précédents une expression factorisée de $\sum_{i=1}^n i^3$ en fonction de n .

Problème 2

Soit $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p > 1$, $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels positifs. Le but du problème est de montrer que

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1. Si les nombres a_k sont tous nuls ou si les b_k sont tous nuls, justifier l'inégalité recherchée.

On suppose dans la suite que les a_k ne sont pas tous nuls et que les b_k ne sont pas tous nuls. On pose alors $A = \sum_{k=1}^n a_k^p$ et $B = \sum_{k=1}^n b_k^q$.

2. Pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, on définit $f : x \mapsto ax - \frac{a^p}{p} - \frac{x^q}{q}$.

(a) Étudier f jusqu'à obtenir un tableau de variations complet.

(b) En déduire que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

3. Cas particulier : on suppose (dans cette question seulement) que $A = B = 1$. Montrer alors que

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq 1.$$

4. Cas général (sans hypothèse particulière sur A et B).

(a) On définit pour tout k : $u_k = \frac{a_k}{A^{1/p}}$ et $v_k = \frac{b_k}{B^{1/q}}$. Calculer $\sum_{k=1}^n u_k^p$ et $\sum_{k=1}^n v_k^q$.

(b) Conclure en établissant l'inégalité voulue.

Exercice 1

On pose $s(1) = 1$, $s(2) = 3 + 5$, $s(3) = 7 + 9 + 11$, et ainsi de suite, si bien que pour $n \geq 2$, $s(n)$ désigne la somme des n nombres impairs suivant ceux qui apparaissent dans $s(n-1)$.

1. $s(1) = 1$, $s(2) = 8$, $s(3) = 27$, $s(4) = 64$. On reconnaît les valeurs des premiers cubes et on conjecture donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s(n) = n^3$.

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le k -ième entier naturel impair vaut $I(k) = 2k - 1$.
(Si on le souhaite, cela se démontre par récurrence car $I(1) = 1 = 2 \times 1 - 1$ et si $I(k) = 2k - 1$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors $I(k+1) = I(k) + 2 = 2k + 1 = 2(k+1) - 1$.)

(b) $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $A(N) = \sum_{k=1}^N I(k) = \sum_{k=1}^N (2k - 1) = 2 \left(\sum_{k=1}^N k \right) - N = N(N+1) - N = N^2$.

- (c) Par définition, les $s(i)$, examinés dans l'ordre, font intervenir tous les nombres impairs successifs. Ainsi $B(n) = \sum_{i=1}^n s(i)$ est la somme des N premiers nombres impairs, où N est le nombre de termes de cette somme, à déterminer. Chaque $s(i)$ étant la somme de i nombres impairs, $N = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Finalement, $B(n) = A\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

- (d) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s(n) = B(n) - B(n-1)$ (en posant $B(0) = 0$).

Donc $s(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 = \frac{4n^3}{4}$ après développement et simplification.

Finalement, $s(n) = n^3$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^n i^3 = \sum_{i=1}^n s(i) = B(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Problème 1

Soit $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p > 1$, $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels positifs. Le but du problème est de montrer que

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1. Si les nombres a_k sont tous nuls ou si les b_k sont tous nuls, alors d'une part $a_k b_k = 0$ pour tout k , donc $\sum_{k=1}^n a_k b_k = 0$. D'autre part, soit $\sum_{k=1}^n a_k^p = 0$, soit $\sum_{k=1}^n b_k^q = 0$. Dans les deux cas le produit de ces sommes est nul. D'où l'inégalité recherchée (qui est même alors une égalité).

On suppose dans la suite que les a_k ne sont pas tous nuls et que les b_k ne sont pas tous nuls. On pose alors $A = \sum_{k=1}^n a_k^p$ et $B = \sum_{k=1}^n b_k^q$.

2. Pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, on définit $f : x \mapsto ax - \frac{a^p}{p} - \frac{x^q}{q}$.

(a) La fonction puissance $x \mapsto x^q$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par multiplication par une constante et somme, f est également définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = a - \frac{qx^{q-1}}{q} = a - x^{q-1}.$$

$$\text{On a } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{q-1} = a \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{q-1}} \text{ (} a \text{ étant bien positif).}$$

$$\text{Et } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < a^{\frac{1}{q-1}}.$$

$$\text{Ainsi } \boxed{f \text{ est croissante sur }]0, a^{\frac{1}{q-1}}] \text{ et décroissante sur } [a^{\frac{1}{q-1}}, +\infty[.}$$

(b) L'étude de f montre que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq f(a^{\frac{1}{q-1}})$.

$$\text{Pour le calcul de } f(a^{\frac{1}{q-1}}), \text{ remarquons que } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ donne } \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q}, \text{ soit } p = \frac{q}{q-1}.$$

$$\text{Ainsi } f(a^{\frac{1}{q-1}}) = a^{1+\frac{1}{q-1}} - \frac{a^p}{p} - \frac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q} = a^p \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) = 0.$$

$$\text{Finalement, } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq 0.$$

$$\text{En particulier, } f(b) \leq 0, \text{ soit } \boxed{ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}}.$$

3. Cas particulier : on suppose (dans cette question seulement) que $A = B = 1$.

$$\text{Pour tout } k, \text{ on a } a_k b_k \leq \frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q}. \text{ On somme :}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \frac{A}{p} + \frac{B}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ d'après l'hypothèse de cette question.}$$

$$\text{On a bien } \boxed{\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq 1}.$$

4. Cas général (sans hypothèse particulière sur A et B).

$$(a) \text{ On définit pour tout } k : u_k = \frac{a_k}{A^{1/p}} \text{ et } v_k = \frac{b_k}{B^{1/q}}.$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{A^{1/p}} \sum_{k=1}^n a_k} \text{ et } \boxed{\sum_{k=1}^n v_k = \frac{1}{B^{1/q}} \sum_{k=1}^n b_k}.$$

(b) D'après la question 2b, on a pour tout k (u_k et v_k étant positifs) :

$$u_k v_k \leq \frac{u_k^p}{p} + \frac{v_k^q}{q}. \text{ On somme : } \sum_{k=1}^n u_k v_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n u_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n v_k^q.$$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{A^{1/p}} \frac{1}{B^{1/q}} \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \frac{1}{p} \frac{1}{A} \sum_{k=1}^n a_k^p + \frac{1}{q} \frac{1}{B} \sum_{k=1}^n b_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$\text{Finalement } \boxed{\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq A^{1/p} B^{1/q}}, \text{ ce qui est exactement l'inégalité voulue.}$$

Problème 1

Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'objet de ce problème est de majorer l'expression

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Premières sommes

1. Simplifier $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
2. (a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
 (b) Montrer que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$ (on pourra adapter la technique précédente).
4. Dédurre des résultats précédents que

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

La somme qui nous intéresse

On note :

- A l'ensemble des entiers $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $\left| x - \frac{k}{n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$
- B l'ensemble des entiers $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $\left| x - \frac{k}{n} \right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On appelle alors $f_A(x) = \sum_{k \in A} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ et $f_B(x) = \sum_{k \in B} \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

5. Montrer que $f_A(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
6. Montrer que $f_B(x) \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.
7. Effectuer l'étude de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$.
8. En déduire que $f(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}$.

Problème 2

A Un exemple

On souhaite déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2y(x) = 2x + 4 \quad (\text{E})$$

1. On cherche tout d'abord les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2y(x) = 0 \quad (\text{H})$$

- (a) Soit $K \in \mathbb{R}$. Vérifier que $y : x \mapsto Ke^{-2x}$ satisfait l'équation (H).
 - (b) Réciproquement, soit y solution de (H). On pose $f : x \mapsto y(x)e^{2x}$. Montrer que f est constante.
2. On s'intéresse maintenant à (E)
 - (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $y_0 : x \mapsto ax + b$ soit solution de (E).
 - (b) Si y est solution de (E), soit $z = y - y_0$. Montrer que z est solution de (H).
 - (c) Réciproquement, vérifier que pour tout $K \in \mathbb{R}$, $y : x \mapsto y_0(x) + Ke^{-2x}$ est solution de (E).

B Généralisation

Soit a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche à trouver les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad (\text{E1})$$

On définit l'équation (appelée **équation homogène** associée) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0 \quad (\text{H1})$$

3. Soit A une fonction telle que $A' = a$. Montrer que y est solution de (H1) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $y : x \mapsto Ke^{-A(x)}$. (On pourra s'inspirer de la démarche de la question 1b)
4. On cherche une solution de (E1) de la forme $y_0 : x \mapsto u(x)e^{-A(x)}$. Montrer que y_0 ainsi définie est solution de (E1) si et seulement si u est une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$.
5. Étant donnée y_0 solution de (E1), montrer que y est solution de (E1) si et seulement si $y - y_0$ est solution de (H1).
6. En déduire l'expression des solutions de (E1).
7. **Application** : trouver toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - 2xy(x) = -(2x - 1)e^x$$

C Second ordre

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables (*i.e.* dérivables et telles que leur dérivée le soit également) vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = 0. \quad (\text{E2})$$

8. Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto e^{rx}$ vérifie (E2) si et seulement si r est solution de

$$\alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0 \quad (\text{EC})$$

On appelle cette équation (EC) comme **équation caractéristique** associée à (E2).

9. Soit Δ le discriminant de (EC).

- (a) Supposons $\Delta > 0$ et soit r_1, r_2 les deux solutions de (EC). Alors $y_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$ sont solutions de (E2). Montrer que pour toutes constantes $K, L \in \mathbb{R}$, $y = Ky_1 + Ly_2$ est aussi solution de (E2). On admettra que ce sont les seules.
- (b) Supposons $\Delta = 0$ et soit r l'unique solution de (EC). Montrer que $x \mapsto e^{rx}$ et $x \mapsto xe^{rx}$ sont deux solutions de (E2).

10. **Application :**

- (a) Donner l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0.$$

- (b) À l'aide des parties précédentes et en justifiant votre démarche, déterminer l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 6x - 5.$$

Problème 1

Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'objet de ce problème est de majorer l'expression

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Premières sommes

1. D'après la formule du binôme de Newton : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = \boxed{1}$.

2. (a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \boxed{n \binom{n-1}{k-1}}$.

(b) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ en enlevant un terme nul
 $= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$ d'après la formule du Chef
 $= \sum_{i=0}^{n-1} n \binom{n-1}{i} x^{i+1} (1-x)^{n-(i+1)}$ par $i = k-1$
 $= nx \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i}$ en factorisant par nx
 $= nx \times 1$ par binôme de Newton.

Ainsi $\boxed{\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx}$.

3. $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ en enlevant deux termes nuls
 $= \sum_{k=2}^n (k-1)n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$ d'après la formule du Chef
 $= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$ d'après la formule du Chef derechef
 $= \sum_{i=0}^{n-2} n(n-1) \binom{n-2}{i} x^{i+2} (1-x)^{n-(i+2)}$ par $i = k-2$
 $= n(n-1)x^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} x^i (1-x)^{n-2-i}$ en factorisant par nx
 $= n(n-1)x^2 \times 1$ par binôme de Newton.

Ainsi $\boxed{\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2}$.

4. On aura aussi besoin de $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$:

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= x^2 S_0 - \frac{2x}{n} S_1 + \frac{1}{n^2} S_2 \text{ (avec des notations transparentes)} \\ &= x^2 - \frac{2x}{n} nx + \frac{1}{n^2} (n(n-1)x^2 + nx) \\ &= \boxed{\frac{x(1-x)}{n}}. \end{aligned}$$

La somme qui nous intéresse

On note :

- A l'ensemble des entiers $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$
- B l'ensemble des entiers $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On appelle alors $f_A(x) = \sum_{k \in A} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ et $f_B(x) = \sum_{k \in B} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

5. Pour $k \in A$, on a $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $f_A(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in A} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
(en ajoutant des termes positifs).

$$\text{Finalement, } \boxed{f_A(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

6. $\forall k \in B$, $\left|x - \frac{k}{n}\right| \sqrt{n} \geq 1$, d'où $\left|x - \frac{k}{n}\right| \sqrt{n} \leq \left(\left|x - \frac{k}{n}\right| \sqrt{n}\right)^2 = n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2$.

$$\text{Donc } \sqrt{n} f_B(x) = \sum_{k \in B} \sqrt{n} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in B} n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq x(1-x)$$

d'après la partie précédente.

$$\text{Finalement, comme } \sqrt{n} > 0, \boxed{f_B(x) \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}}.$$

7. On montre que $x \mapsto x(1-x)$ est une fonction polynomiale de degré 2, croissante sur $[0, 1/2]$ et décroissante sur $[1/2, 1]$.

8. En particulier, $\forall x \in [0, 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

$$\text{D'où } f(x) = f_A(x) + f_B(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}}, \text{ donc } \boxed{f(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}}.$$

Problème 2

A Un exemple

On souhaite déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2y(x) = 2x + 4 \quad (\text{E})$$

1. On cherche tout d'abord les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2y(x) = 0 \quad (\text{H})$$

(a) Soit $K \in \mathbb{R}$ et $y : x \mapsto Ke^{-2x}$.

Alors y est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = -2Ke^{-2x} = -2y(x)$.

Ainsi on a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 0}$.

(b) Réciproquement, soit y solution de (H). On pose $f : x \mapsto y(x)e^{2x}$.

Alors f est dérivable par produit de fonctions qui le sont.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = (y'(x) + 2y(x))e^{2x} = 0$ car y est solution de (H).

Donc $\boxed{f \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$.

2. On s'intéresse maintenant à (E)

(a) Soit $y_0 : x \mapsto ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

y_0 est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) + 2y_0(x) = 2x + 4$, i.e. $a + 2b + 2ax = 2x + 4$.

Par identification (ou en posant deux valeurs de x quelconques pour avoir deux équations), on obtient : $a = 1$ et $b = \frac{3}{2}$.

Ainsi, $\boxed{x \mapsto x + \frac{3}{2}}$ est solution de (E).

(b) Soit y solution de (E) et $z = y - y_0$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 2x + 4$ et $y_0'(x) + 2y_0(x) = 2x + 4$.

Par différence, $y'(x) - y_0'(x) + 2y(x) - 2y_0(x) = 0$, soit $(y - y_0)'(x) + 2(y - y_0)(x) = 0$.

Ainsi, $\boxed{y - y_0 \text{ est solution de (H)}}$.

(c) Soit $z : x \mapsto Ke^{-2x}$. On a vu en 1b que z est solution de (H).

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = y_0'(x) + 2y_0(x) + z'(x) + 2z(x) = 2x + 4$.

Donc $\boxed{y : x \mapsto y_0(x) + Ke^{-2x} \text{ est solution de (E)}}$.

B Généralisation

Soit a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche à trouver les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad (\text{E1})$$

On définit l'équation (appelée **équation homogène** associée) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0 \quad (\text{H1})$$

3. $\Leftarrow$ Soit $y : x \mapsto Ke^{-A(x)}$. Alors y est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}, y'(x) = -Ka(x)e^{-A(x)} = -a(x)y(x)$. Donc $\boxed{y \text{ est solution de (H1)}}$.

$\Rightarrow$ Soit y une solution de (H1). On pose $f : x \mapsto y(x)e^{A(x)}$. Alors f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)} = 0$ donc f est constante (égale à K pour un certain $K \in \mathbb{R}$) et donc $\boxed{\exists K \in \mathbb{R}, y : x \mapsto Ke^{-A(x)}}$.

4. Soit $y_0 : x \mapsto u(x)e^{-A(x)}$.

Alors y_0 est solution de (E1) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) + a(x)y_0(x) = b(x)$,

i.e. $(u'(x) - a(x)u(x) + a(x)u(x))e^{-A(x)} = b(x)$, soit encore $u'(x) = b(x)e^{A(x)}$, si et seulement si

$$u \text{ est une primitive de } x \mapsto b(x)e^{A(x)}.$$

5.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E1)} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + a(x)y(x) = y_0'(x) + a(x)y_0(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (y - y_0)'(x) + a(x)(y - y_0)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{y - y_0 \text{ est solution de (H1)}}. \end{aligned}$$

6. Les solutions de (E1) sont donc $\boxed{\{x \mapsto Ke^{-A(x)} + u(x)e^{-A(x)}, K \in \mathbb{R}\}}$.

7. **Application :** Ici $a : x \mapsto -2x$, prenons $A : x \mapsto -x^2$.

Une primitive de $x \mapsto -(2x - 1)e^xe^{-x^2} = -(2x - 1)e^{-x^2+x}$ sera $u : x \mapsto e^{-x^2+x}$.

Ainsi $Ke^{-A(x)} + u(x)e^{-A(x)} = Ke^{x^2} + e^{-x^2+x}e^{x^2}$.

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\{x \mapsto Ke^{x^2} + e^x, K \in \mathbb{R}\}}$.

C Second ordre

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On cherche les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = 0. \quad (\text{E2})$$

8. Soit $r \in \mathbb{R}$ et $q : x \mapsto e^{rx}$. Alors q est deux fois dérivable et on a $q' : x \mapsto re^{rx}$ et $q'' : x \mapsto r^2e^{rx}$.

q vérifie (E2) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, (\alpha r^2 + \beta r + \gamma)e^{rx} = 0$.

Or e^{rx} ne s'annule pas pour $x \in \mathbb{R}$, donc ceci équivaut à

$$\boxed{\alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0} \quad (\text{EC})$$

9. Soit Δ le discriminant de (EC).

(a) Supposons $\Delta > 0$ et soit r_1, r_2 les deux solutions de (EC). Alors $y_1 : x \mapsto e^{r_1x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{r_2x}$ sont solutions de (E2). Pour toutes constantes $K, L \in \mathbb{R}$, $y = Ky_1 + Ly_2$ est aussi solution de (E2).

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha y_1''(x) + \beta y_1'(x) + \gamma y_1(x) = 0$ et $\alpha y_2''(x) + \beta y_2'(x) + \gamma y_2(x) = 0$. Donc

$$\boxed{\alpha(Ky_1 + Ly_2)''(x) + \beta(Ky_1 + Ly_2)'(x) + \gamma(Ky_1 + Ly_2)(x) = 0}.$$

(b) Supposons $\Delta = 0$ et soit r l'unique solution de (EC). D'une part, r est solution de (EC) donc

$$\boxed{x \mapsto e^{rx} \text{ est solution de (E2)}}.$$

D'autre part, soit $p : x \mapsto xe^{rx}$. Alors $p' : x \mapsto (rx + 1)e^{rx}$ et $p'' : x \mapsto (r^2x + 2r)e^{rx}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha p''(x) + \beta p'(x) + \gamma p(x) = ((\alpha r^2 + \beta r + \gamma)x + (2\alpha r + \beta))e^{rx}$. Or r est solution

de (EC) et $r = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Donc $\boxed{\alpha p''(x) + \beta p'(x) + \gamma p(x) = 0}$.

10. **Application :**

(a) On cherche les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0.$$

Équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \text{ ou } 3$.

Donc les solutions sont $\boxed{\{x \mapsto Ke^{2x} + Le^{3x}, K, L \in \mathbb{R}\}}$.

(b) On constate que $y_0 : x \mapsto x$ est solution de l'équation.

Or y vérifie $y'' - 5y' + 6y = 6x - 5$ si et seulement si $z = y - y_0$ vérifie $z'' - 5z' + 6z = 0$ (adapter la démarche de la question 5).

Finalement on a les solutions : $\boxed{\{x \mapsto Ke^{2x} + Le^{3x} + x, K, L \in \mathbb{R}\}}$.

Problème 1**Rappels sur la fonction th et étude de sa réciproque**

On notera respectivement ch, sh et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer que th est bien définie puis, en étudiant ses variations, que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. On note argth (« argument tangente hyperbolique ») sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de th en fonction de th.
3. Démontrer que argth est impaire.
4. Démontrer que argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer argth à l'aide de fonctions usuelles.

Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :
Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

6. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
7. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
8. Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$.
(on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.)
9. Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
10. Montrer que th est solution du problème posé.
11. Dans les questions (11a) à (11e), on suppose que f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.
On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.
 - (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
 - (b) Établir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0 .
 - (c) En utilisant les résultats des deux questions précédentes, aboutir à une contradiction.
 - (d) Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0) = 1$ » est remplacée par l'hypothèse « $f(0) = -1$ » ?
 - (e) Conclusion ?

12. Dans les questions (12a) à (12d), on suppose que f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$. En raisonnant comme pour les questions (11a) à (11e), on peut montrer (et on admettra donc ici) que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 1 \text{ et } f(x) \neq -1.$$

On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} g(2^n x) = 2^n g(x)$.

(b) Montrer que g est dérivable en zéro.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on définit la suite (v_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.

Montrer que (v_n) converge vers $g'(0)$.

(d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $xv_n = g(x)$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que g soit la fonction $x \mapsto \lambda x$.

13. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

Problème 1**Étude de la fonction réciproque de la fonction th.**

1. La fonction th est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas ($\forall x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} > 0$).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$ qui est strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction th est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$ donc th réalise une bijection à valeurs dans $I =]-1, 1[$.

2. Sur $\mathbb{R}$, $\text{th}' = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \boxed{1 - \text{th}^2}$.

3. argh est définie sur $\mathbb{R}$ et th est impaire donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{argth}(-x) = \text{argth}(-\text{th}(\text{argth}(x))) = \text{argth}(\text{th}(-\text{argth}(x))) = -\text{argth}(x).$$

Donc argth est impaire.

4. argth est dérivable sur $] -1, 1[$ comme bijection réciproque de th, dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée

$$\text{ne s'annule pas, et } \forall x \in] -1, 1[, \text{argth}'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{argth}(x))} = \frac{1}{1 - \text{th}^2(\text{argth}(x))} = \boxed{\frac{1}{1 - x^2}}.$$

5. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\text{th}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$.

$$\text{Pour tout } x \in] -1, 1[, y = \text{argth}(x) \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

$$\text{D'où } y = \boxed{\text{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right)}.$$

Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :

Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

6. Soit $K \in \mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto K$ une fonction constante. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0. Alors

$$f \text{ est solution du problème} \Leftrightarrow \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{2K}{1 + K^2}$$

$$\Leftrightarrow K(K^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow K(K - 1)(K + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K \in \{0, 1, -1\}}$$

7. Si f est solution, alors pour $x = 0$, on a : $f(2 \times 0) = \frac{2f(0)}{1 + (f(0))^2}$. Alors (on a déjà résolu cette équation avec K dans la question précédente) $f(0) \in \{0, 1, -1\}$

8. Si f est solution, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + f\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Or on montre par l'étude de la fonction $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$ que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{2t}{1+t^2} \in [-1, 1]$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$

9. Si f est solution, alors $-f$ est également définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-f)(2x) = -\frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2} = \frac{2(-f)(x)}{1 + (-f(x))^2}.$$

Donc $-f$ est solution du problème.

10. th est une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{th}(2x) = \frac{\text{sh}(2x)}{\text{ch}(2x)} = \frac{2\text{sh}(x)\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x)} = \frac{2\text{th}(x)}{1 + (\text{th}(x))^2}.$$

Donc th est solution du problème.

11. Dans les questions (11a) à (11e), on suppose que f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.

(a) $\frac{x_0}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et f est dérivable donc continue en 0. Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) = 1$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f\left(2\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \frac{2f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{1 + \left(f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)\right)^2}$.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2u_{n+1}}{1 + u_{n+1}^2}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, 1 + u_n^2$ est positif. Donc u_n est du signe de u_{n+1} .

Donc (u_n) est de signe constant (on peut s'entraîner à rédiger la récurrence simple qui le montre).

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2}{1 + u_{n+1}^2}$. Or $u_{n+1} \in [-1, 1]$ donc $u_n^2 \leq 1$ et donc $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1$.

Donc

— si $u_0 > 0$, alors $u_n > 0$ pour tout n et (u_n) est décroissante,

— si $u_0 < 0$, alors $u_n < 0$ pour tout n et (u_n) est croissante.

(c) On a $f(x_0) \neq 1$ donc $f(x_0) < 1$ et donc $u_0 < 1$.

— si $u_0 > 0$, alors (u_n) est décroissante donc sa limite est $\ell \leq u_0 < 1$, ce qui contredit la question (11a),

— si $u_0 < 0$, alors $u_n < 0$ pour tout n et la limite de (u_n) est négative, ce qui contredit la question (11a).

— le cas $u_0 = 0$ est exclu car alors on aurait (u_n) constante égale à 0.

Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction.

(d) Si l'hypothèse « $f(0) = 1$ » est remplacée par l'hypothèse « $f(0) = -1$ » alors on a la fonction $(-f)$ qui est solution avec $(-f)(0) = 1$. Les questions précédentes montrent donc également que ce n'est pas possible.

- (e) Si $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$, seule une fonction constante est solution. (Et réciproquement les fonctions constantes égales à 1 et -1 sont bien solutions)
12. Dans les questions (12a) à (12d), on suppose que f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$. En raisonnant comme pour les questions (11a) à (11e), on peut montrer (et on admettra donc ici) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 1 \text{ et } f(x) \neq -1.$$

On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$.

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(2g(x)) = \operatorname{th}(2 \operatorname{argth}(f(x))) = \frac{2 \operatorname{th}(\operatorname{argth}(f(x)))}{1 + (\operatorname{th}(\operatorname{argth}(f(x))))^2} = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2} \text{ car } f(x) \in]-1, 1[.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(2g(x)) = f(2x). \text{ Donc } 2g(x) = \operatorname{argth}(f(2x)), \text{ soit } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 2g(x) = g(2x)}.$$

On en déduit par récurrence (la rédiger !) que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, g(2^n x) = 2^n g(x)$.

(b) f est dérivable en 0 et argth est dérivable en $f(0) = 0$ donc par composition, g est dérivable en zéro.

$$(c) \quad v_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g(0)}{\frac{x}{2^n} - 0} \text{ et } \boxed{\text{converge donc vers } g'(0)} \text{ car } g \text{ est dérivable en } 0.$$

$$(d) \quad \text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, xv_n = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = g(x) \text{ car } g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} g(x).$$

Donc par passage à la limite, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g'(0)x$.

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda x$.

13. Synthèse : on vérifie que les fonctions de la forme $f : x \mapsto \operatorname{th}(\lambda x)$ sont solutions du problème. En effet, elles sont bien définies sur $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \operatorname{th}(2\lambda x) = \frac{2 \operatorname{th}(\lambda x)}{1 + (\operatorname{th}(\lambda x))^2} = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}.$$

Finalement les fonctions solutions sont $\{x \mapsto \operatorname{th}(\lambda x), \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\{x \mapsto -1, x \mapsto 0, x \mapsto 1\}$.

Problème 1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on note

- $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1,
- P le demi-plan des nombres complexes de partie imaginaire strictement positive,
- D le disque des nombres complexes de module strictement inférieur à 1.

Étant donnés $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$, on appelle **homographie** une application h qui, à tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$, associe

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

A Premier exemple : une similitude

On définit la fonction

$$\begin{aligned} h_0 : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto 3z - i \end{aligned}$$

1. Donner les caractéristiques géométriques de cette similitude.
2. h_0 est-elle bijective ? Justifier.

B Deuxième exemple

Soit h l'homographie définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $h(z) = i \frac{1+z}{1-z}$.

3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}, h(z) \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall z \in D, h(z) \in P$.
5. Déterminer les nombres complexes z tels que $h(z) = z$.
6. Pour quelles valeurs de $w \in \mathbb{C}$ l'équation $h(z) = w$ a-t-elle une solution dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$?

C Conservation du cercle unité

7. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}.$$

Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.

8. Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}, \theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par

$$h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}.$$

Vérifier que h est bien définie sur $\mathbb{U}$ et montrer que

$$\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}.$$

On dit que h **conserve** $\mathbb{U}$. On va maintenant montrer que seules les homographies des types ci-dessus conservent $\mathbb{U}$.

9. Deux petits résultats techniques utiles pour la suite.

9.a Montrer que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2 \operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta)$. À la démonstration de quel théorème bien connu ce résultat est-il également utile ?

9.b Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\left(\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2 \operatorname{Re}(be^{-i\theta}) = 0 \right) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$

10. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On pose h l'homographie définie sur $\mathbb{U}$ par

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

et on suppose que $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.

10.a Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, |a|^2 + |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(\overline{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2 \operatorname{Re}(\overline{c}de^{-i\theta})$.

10.b En déduire que $\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 \\ \overline{a}b = \overline{c}d \end{cases}$.

10.c Si $a = 0$, montrer que h est du type étudié à la question 1b.

10.d Si $a \neq 0$, montrer que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.

10.e En distinguant les deux cas possibles, montrer que h est alors du type étudié à la question 8.

11. Vous avez compris ce qu'on a fait ? Prouvez-le en énonçant le mieux possible le théorème que nous avons démontré dans cette partie C.

Problème 2 (facultatif mais intéressant)

Dans ce problème, on étudie une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone soit régulier. Après quelques classiques (partie A) et quelques variations autour de l'inégalité triangulaire (partie B), on en viendra à la condition proprement dite (partie C). On reviendra dans la partie D à l'étude du cas où le polygone en question est un triangle.

A Deux exemples, études classiques

1. Soit A, B deux points du plan complexe d'affixes respectives a et b .

(a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.

(b) Soit D d'affixe d tel que $\frac{d-a}{d-b} = i$ et F d'affixe f tel que $\frac{f-a}{f-b} = -i$. Montrer que $ADBF$ est un carré.

2. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c . Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$.

B Autour de l'inégalité triangulaire

On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité triangulaire :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|. \quad (1)$$

Le but de cette partie est d'étudier le cas de plus de deux nombres et les cas d'égalité. En particulier, on va montrer qu'il y a égalité si et seulement si les nombres considérés ont même argument.

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$ et tous nombres complexes $z_1, \dots, z_n$,

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n| \quad (2)$$

4. Cas d'égalité pour $n = 2$.

(a) Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2) = |z_1||z_2|$.

(b) En déduire que l'on a l'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\arg(z_1) = \arg(z_2)[2\pi]$.

5. On suppose que l'on a la propriété au rang n , c'est-à-dire :

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \text{ si et seulement si } \arg(z_1) = \dots = \arg(z_n)[2\pi].$$

Soit $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes tels que

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

(a) Montrer que

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \quad \text{et} \quad |z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| = |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}|.$$

Indication : on pourra poser $z = z_1 + \dots + z_n$, $z' = z_{n+1}$ et utiliser judicieusement (1) et (2).

(b) En déduire que $\arg(z_1) = \dots = \arg(z_{n+1})[2\pi]$. Conclure.

C Caractérisation d'un polygone régulier

Soit $n \geq 2$. On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient $M_1, \dots, M_n$ des points du plan d'affixes respectives $z_1, \dots, z_n$ vérifiant $|z_1| = \dots = |z_n| = \rho > 0$.

On dit que le polygone (parcouru dans le sens direct) $M_1 \dots M_n$ est **régulier** si

$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \dots = (\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_n}) = (\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{2\pi}{n}.$$

On va montrer que le polygone $M_1 \dots M_n$ est régulier si et seulement si

$$\sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k = n z_1.$$

6. Supposons tout d'abord que le polygone $M_1 \dots M_n$ est régulier et posons $z_1 = \rho e^{i\theta}$.

(a) Pour tout $1 \leq k \leq n$, déterminer le module et un argument de z_k .

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.

7. On suppose maintenant réciproquement que $\sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.

(a) Calculer $\left| \sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k \right|$. En déduire que

$$\forall k \in \{1 \dots n\}, \arg(\omega^{n+1-k} z_k) = \arg(z_1)[2\pi].$$

(b) En déduire que le polygone est régulier.

D Le cas d'un triangle équilatéral

Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c . On rappelle la notation $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le but de cette partie est de montrer que ABC est un polygone régulier (un triangle équilatéral dans le cas de trois points) si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

8. Justifier que $1 + j + j^2 = 0$.
9. On suppose tout d'abord que $a + jb + j^2c = 0$. En déduire que le triangle ABC a deux côtés égaux et un angle de mesure $\pm\frac{\pi}{3}$. Conclure.
10. Réciproquement, on suppose maintenant que le triangle ABC est équilatéral.
 - (a) Dans le cas où $|a| = |b| = |c|$, montrer comment la condition de la partie C implique que $a + jb + j^2c = 0$. (*indication : on pourra appliquer cette condition à a, b et c , puis à b, c et a , et encore à c, a et b*)
 - (b) Dans le cas où a, b et c ne sont pas de même module, on pose

$$a' = a - \frac{a+b+c}{3}; b' = b - \frac{a+b+c}{3} \text{ et } c' = c - \frac{a+b+c}{3}.$$

Montrer que $a' + jb' + j^2c' = 0$ si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$. Montrer que $|a'| = |b'| = |c'|$ et conclure.

Problème 1**A Premier exemple : une similitude**

1. On écrit $h_0(z) = 3z - i = 3\left(z - \frac{i}{3}\right)$. C'est donc une similitude directe de rapport 3, d'angle 0, et de centre le point d'affixe $\frac{i}{3}$.

h_0 est la similitude directe de rapport 3, d'angle 0, de centre $\frac{i}{3}$.

2. Une application affine $z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$ est bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, d'inverse $z \mapsto \frac{z-b}{a}$. Ici $a = 3$, $b = -i$.

h_0 est bijective, d'inverse $z \mapsto \frac{z+i}{3}$.

B Deuxième exemple

Soit h l'homographie définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $h(z) = i \frac{1+z}{1-z}$.

3. Pour $z \in \mathbb{U}$, on a $\bar{z} = 1/z$. Alors

$$\overline{h(z)} = -i \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} = -i \frac{1+1/z}{1-1/z} = i \frac{1+z}{1-z} = h(z),$$

donc $h(z) \in \mathbb{R}$.

$\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}, h(z) \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que $\forall z \in D, h(z) \in P$.

Pour $z \in D$, on a $|z| < 1$ et

$$h(z) = i \frac{1+z}{1-z}.$$

On calcule

$$\Im(h(z)) = \frac{2(1-|z|^2)}{|1-z|^2} > 0,$$

d'où $h(z) \in P$.

$\forall z \in D, h(z) \in P$.

5. Déterminer les nombres complexes z tels que $h(z) = z$.

Équation : $i \frac{1+z}{1-z} = z \Leftrightarrow i(1+z) = z(1-z)$, soit $z^2 + (i-1)z + i = 0$. On trouve $\Delta = (i-1)^2 - 4i = -6i$, donc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{6}e^{-i\pi/4}$. Ainsi :

$$z_{1,2} = \frac{1-i \pm \sqrt{6}e^{-i\pi/4}}{2}.$$

$$z_1 = \frac{1 - i + \sqrt{6}e^{-i\pi/4}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{1 - i - \sqrt{6}e^{-i\pi/4}}{2}.$$

6. Pour quelles valeurs de $w \in \mathbb{C}$ l'équation $h(z) = w$ a-t-elle une solution dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$?

On a $i(1+z) = w(1-z)$, soit $(i+w)z = w-i$. Si $i+w \neq 0$, une unique solution $z = \frac{w-i}{w+i}$; si $w = -i$, aucune.

$$\forall w \neq -i, \text{ une unique solution } z = \frac{w-i}{w+i}; \text{ aucune si } w = -i.$$

C Conservation du cercle unité

7. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.

$$\text{Pour } z \in \mathbb{U}, |z| = 1 \text{ donc } |h(z)| = \frac{|e^{i\theta}|}{|z|} = 1.$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}.}$$

8. Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$. Vérifier que h est bien définie sur $\mathbb{U}$ et que $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.

Si $\bar{\alpha}z + 1 = 0$, alors $z = -1/\bar{\alpha}$ et $|z| = 1/|\alpha| \neq 1$, donc h est bien définie sur $\mathbb{U}$. Ensuite :

$$|h(z)| = \frac{|z + \alpha|}{|\bar{\alpha}z + 1|}.$$

Or

$$|z + \alpha|^2 = 1 + |\alpha|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{\alpha}), \quad |\bar{\alpha}z + 1|^2 = |\alpha|^2 + 1 + 2\operatorname{Re}(z\bar{\alpha}),$$

donc $|h(z)| = 1$.

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}.}$$

9. Deux petits résultats techniques utiles pour la suite.

9.a Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta).$$

Ce résultat intervient aussi dans la démonstration du théorème de Pythagore.

$\boxed{\text{Identité vraie ; utilisée notamment dans le théorème de Pythagore.}}$

- 9.b Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Si $\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2\operatorname{Re}(be^{-i\theta}) = 0$, la fonction $\theta \mapsto \operatorname{Re}(be^{-i\theta})$ n'est constante que si $b = 0$, et alors $a = 0$. La réciproque est évidente.

$$\boxed{(\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2\operatorname{Re}(be^{-i\theta}) = 0) \Rightarrow a = b = 0.}$$

10. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$, et $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ vérifiant $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.

10.a Pour $z = e^{i\theta}$, on a $|az + b| = |cz + d|$, soit

$$|a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{c}de^{-i\theta}).$$

$$\boxed{\text{Égalité vérifiée pour tout } \theta \in \mathbb{R}.}$$

10.b En utilisant le résultat précédent :

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2, \\ \bar{a}b = \bar{c}d. \end{cases}$$

Système obtenu : $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\bar{a}b = \bar{c}d$.

10.c Si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et $h(z) = \frac{b}{cz + d}$. Des conditions précédentes on tire $|b| = |d|$ et $c = 0$, donc

$$h(z) = \frac{b}{d} \frac{1}{z}, \quad |b/d| = 1.$$

$h(z) = e^{i\theta}/z$, type de la question 1b.

10.d Si $a \neq 0$, on montre que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.

Produit nul : $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$.

10.e En distinguant les cas $|a| = |c|$ ou $|a| = |d|$, on obtient

$$h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}, \quad |\alpha| \neq 1.$$

h est du type de la question 8.

11. Théorème final : les homographies qui conservent $\mathbb{U}$ sont exactement celles des deux types précédents.

Théorème : les seules homographies conservant $\mathbb{U}$ sont $z \mapsto e^{i\theta}/z$ et $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$ avec $|\alpha| \neq 1$.

Problème 2

A Deux exemples, études classiques

1. Soit A, B deux points du plan complexe d'affixes respectives a et b .

(a) $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$, privé de B (voir cours).

(b) $\frac{d-a}{d-b} = i \Leftrightarrow AD = BD$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{2}$. De même $AF = BF$ et $(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA}) = -\frac{\pi}{2}$. Donc ABF et ABD sont les deux triangles rectangles isocèles portés par l'hypoténuse $[AB]$. Ils forment un quadrilatère aux quatre côtés de même longueur et quatre angles droits. Donc $ADBF$ est un carré.

2. ABC est équilatéral si et seulement s'il est isocèle avec un angle de $\pm \frac{\pi}{3}$. Ceci équivaut à $AB = AC$ et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{3}, \text{ i.e. } \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1 \text{ et } \text{Arg} \left(\frac{c-a}{b-a} \right) = \pm \frac{\pi}{3}, \text{ soit encore } \frac{c-a}{b-a} \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}.$$

B Autour de l'inégalité triangulaire

3. **Initialisation** : pour $n = 2$, l'inégalité est vérifiée, c'est l'inégalité triangulaire classique.

Hérédité : soit $n \geq 2$. Supposons que

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$$

Pour tous $z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$, on applique l'inégalité triangulaire avec $z = z_1 + \dots + z_n$ et $z' = z_{n+1}$. Ainsi,

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}|.$$

Puis on applique l'hypothèse de récurrence au premier de ces deux termes. D'où

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

CQFD.

4. Cas d'égalité dans le cas $n = 2$.

(a)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\Leftrightarrow |z_1|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = 2|z_1||z_2| \end{aligned}$$

Ainsi, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |z_1||z_2|$.

(b) On a donc $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |z_1||z_2|$.

Or pour $Z \in \mathbb{C}$, $|Z| = \operatorname{Re} Z$ si et seulement si $\sqrt{x^2 + y^2} = x$ (en posant $Z = x + iy$), ce qui équivaut à $y = 0$ et $x \geq 0$, soit $Z \in \mathbb{R}_+$.

Donc on a

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow \bar{z}_1 z_2 \in \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(\bar{z}_1 z_2) \equiv 0 [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(\bar{z}_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \equiv 0 [2\pi] \\ &\Leftrightarrow -\operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \equiv 0 [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z_1) \equiv \operatorname{Arg}(z_2) [2\pi]. \end{aligned}$$

5. On suppose la propriété vraie au rang n , c'est à dire :

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \text{ si et seulement si } \operatorname{Arg}(z_1) \equiv \dots \equiv \operatorname{Arg}(z_n) [2\pi].$$

Soient $z_1, \dots, z_{n+1}$ des nombres complexes tels que

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

(a) On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|$$

Les deux termes extrémaux étant égaux, toutes les inégalités sont des égalités.

Ainsi $|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}|$ et $|z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|$.

Donc $|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}|$ et $|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$.

- (b) D'après l'hypothèse de récurrence, la deuxième de ces égalités montre que $\text{Arg}(z_1) \equiv \dots \equiv \text{Arg}(z_n) [2\pi]$. Tous ces arguments étant égaux, l'argument de la somme de ces nombres est aussi le même, on a alors $\text{Arg}(z_1 + \dots + z_n) \equiv \text{Arg}(z_1) [2\pi]$ (géométriquement, les vecteurs associés sont colinéaires).

D'après la question (4b), la première des deux égalités précédentes donne $\text{Arg}(z_1 + \dots + z_n) \equiv \text{Arg}(z_{n+1}) [2\pi]$.

Finalement $\boxed{\text{Arg}(z_1) \equiv \dots \equiv \text{Arg}(z_{n+1}) [2\pi]}$.

On a donc démontré par récurrence une condition nécessaire et suffisante au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :

$\boxed{\text{on a égalité si et seulement si les arguments des nombres considérés sont égaux modulo } 2\pi}$.

C Caractérisation d'un polygone régulier

6. Supposons tout d'abord que le polygone $M_1 \dots M_n$ est régulier et posons $z_1 = \rho e^{i\theta}$.

- (a) Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $\boxed{|z_k| = \rho}$.

La relation $(\overrightarrow{OM_{k-1}}, \overrightarrow{OM_k}) = \frac{2\pi}{n}$, se traduit par $\text{Arg}\left(\frac{z_k}{z_{k-1}}\right) = \text{Arg}(z_k) - \text{Arg}(z_{k-1}) = \frac{2\pi}{n}$. Donc les arguments des z_k suivent une progression arithmétique.

D'où $\boxed{\text{Arg}(z_k) = \theta + (k-1)\frac{2\pi}{n}}$.

- (b) Sous forme exponentielle, cela donne $z_k = \rho e^{i(\theta + (k-1)\frac{2\pi}{n})}$, soit $z_k = z_1 \omega^{k-1}$.
Donc pour tout $1 \leq k \leq n$, $\omega^{n+1-k} z_k = \omega^n z_1 = z_1$.

Finalement, $\boxed{\sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k = n z_1}$.

7. On suppose maintenant réciproquement que $\sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.

- (a) On a alors $\left| \sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k \right| = |n z_1| = \boxed{n\rho}$.

On constate alors que $\left| \sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k \right| = \sum_{k=1}^n |\omega^{n+1-k} z_k|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

D'après la partie précédente, les arguments de tous les termes de cette somme sont égaux, à savoir

$$\forall k \in \{1 \dots n\}, \text{Arg}(\omega^{n+1-k} z_k) \equiv \text{Arg}(z_1) [2\pi].$$

- (b) Cette relation donne, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, $\text{Arg}(\omega^{n+1-(k+1)} z_{k+1}) - \text{Arg}(\omega^{n+1-k} z_k) \equiv 0 [2\pi]$.

D'où $\text{Arg}(z_{k+1}) - \text{Arg}(z_k) \equiv \text{Arg}(\omega) = \frac{2\pi}{n}$.

D'où, en termes d'angles, $\boxed{(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}}$.

De plus on a bien $\boxed{(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{2\pi}{n}}$ car $\text{Arg}(\omega z_n) = \text{Arg}(z_1)$. Le polygone est bien régulier.

D Le cas d'un triangle équilatéral

Soient A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c . On rappelle la notation $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le but de cette partie est de montrer que ABC est un polygone régulier (un triangle équilatéral dans le cas de trois points) si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

8. $1, j$ et j^2 sont les racines troisièmes de l'unité, donc leur somme vaut $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

9. On suppose tout d'abord que $a + jb + j^2c = 0$.

En écrivant $1 = -j - j^2$, on obtient $a(-j - j^2) + jb + j^2c = 0$.

Alors $j(b - a) + j^2(c - a) = 0$, d'où $\frac{c - a}{b - a} = -\frac{1}{j} = -j^2$.

Le module nous donne $\boxed{AC = AB}$ et l'argument $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{Arg}(-j^2) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$.

Le triangle ABC est isocèle avec un angle de $\pi/3$. Il est donc $\boxed{\text{équilatéral}}$.

10. Réciproquement, on suppose maintenant que le triangle ABC est équilatéral.

(a) Comme ABC est régulier, la condition nous donne, avec $n = 3$, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$, $z_1 = a$, $z_2 = b$ et $z_3 = c$, $a + j^2b + jc = 3a$. De même, on obtient $b + j^2c + ja = 3b$ et $c + j^2a + jb = 3c$ comme suggéré par l'indication. On combine ces trois équations :

$$3(a + jb + j^2c) = (a + j^2b + jc) + j(b + j^2c + ja) + j^2(c + j^2a + jb) = 3(1 + j + j^2)(a + b + c) = 0.$$

Donc $\boxed{a + jb + j^2c = 0}$.

(b) On a $a' + jb' + j^2c' = a + jb + j^2c - \frac{a + b + c}{3} \underbrace{(1 + j + j^2)}_{=0} = a + jb + j^2c$.

Donc $\boxed{a' + jb' + j^2c' = 0}$ si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

$\frac{a + b + c}{3}$ est l'affixe de G , centre de gravité du triangle ABC . Ce triangle est équilatéral donc

$GA = GB = GC$. C'est-à-dire $\boxed{|a'| = |b'| = |c'|}$.

Pour finir, sous notre hypothèse (ABC équilatéral), on remarque que a', b', c' sont les affixes des sommets A', B', C' d'un triangle équilatéral également, image de ABC par la translation d'un vecteur d'affixe $\frac{a + b + c}{3}$.

De plus, $|a'| = |b'| = |c'|$. On peut donc leur appliquer la question (10a) et en déduire que $a' + jb' + j^2c' = 0$, ce qui implique, d'après le début de cette question (10b), que $\boxed{a + jb + j^2c = 0}$.

Problème 1

Dans tout le problème, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite réelle bornée.

1. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$.

A Définition

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle $E_n = \{u_k, k \geq n\}$.

(a) Montrer que E_n admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \sup E_n$ et $i_n = \inf E_n$.

(b) Montrer que (s_n) est décroissante et que (i_n) est croissante.

(c) Montrer que les suites (s_n) et (i_n) sont convergentes. On notera dans la suite

$$L_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \quad \text{et} \quad L_i = \liminf(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} i_n.$$

Le nombre L_s est appelé limite supérieure de (u_n) et aussi noté $\limsup u_n$. De manière analogue,

L_i est appelé limite inférieure de (u_n) et noté $\liminf u_n$.

3. Déterminer les suites (s_n) , (i_n) ainsi que leurs limites L_s et L_i dans chacun des cas suivants :

(a) la suite (u_n) est constante égale à 0 ;

(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$;

(c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$.

B Lien avec la convergence

4. On suppose (seulement pour cette question) que $L_s = L_i$. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

5. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de (u_n) . On suppose que (v_n) est convergente. Montrer alors que

$$L_i \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq L_s.$$

6. Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $L_s = L_i = \ell$.

7. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui soit convergente et de limite L_s . (on pourra procéder par récurrence forte)

8. On note $(v_n) = (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n) = (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \max\{\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} w_n\} \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \min\{\liminf_{n \rightarrow +\infty} v_n, \liminf_{n \rightarrow +\infty} w_n\}.$$

Problème 1

Dans tout le problème, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite réelle bornée.

1. Les parties A et B sont non vides, majorées et incluses dans $\mathbb{R}$, d'après la propriété de la borne supérieure $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent. Par définition de la borne supérieure, on a :

$$\forall b \in B, b \leq \sup(B)$$

Comme $A \subset B$, on a en particulier :

$$\forall a \in A, a \leq \sup(B)$$

Par passage à la borne supérieure, on obtient bien : $\sup(A) \leq \sup(B)$.

$$\boxed{\text{Si } A \subset B \text{ alors } \sup(A) \leq \sup(B)}$$

A Définition

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

- E_n est une partie de $\mathbb{R}$
- E_n est non vide car $u_n \in E_n$ par définition de E_n
- E_n est majoré et minoré car (u_n) est bornée

D'après les propriétés de la borne inférieure et de la borne supérieure, cela suffit à affirmer que E_n possède une borne supérieure et une borne inférieure.

$$\boxed{\sup(E_n) \text{ et } \inf(E_n) \text{ existent}}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $E_{n+1} \subset E_n$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $(k \geq n+1) \Rightarrow (k \geq n)$. D'après la question préliminaire, qui s'applique car pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est non vide et majoré, on a $\sup(E_{n+1}) \leq \sup(E_n)$. C'est-à-dire $s_{n+1} \leq s_n$.

$$\boxed{(s_n) \text{ est décroissante}}$$

En utilisant la même démarche que dans la question préliminaire, on démontre que si $A \subset B$ avec A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et minorées alors $\inf(A) \geq \inf(B)$. Dans notre contexte, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_{n+1} \geq i_n$.

$$\boxed{(i_n) \text{ est croissante}}$$

- (c) Par hypothèse, la suite (u_n) est bornée, ainsi il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.

D'autre part, par définition de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, s_n est un majorant de E_n , c'est-à-dire que :

$$\forall k \geq n, u_k \leq s_n$$

En particulier la suite (s_n) est minorée par m . La suite (s_n) est décroissante et minorée par m , d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, i_n est un minorant de E_n donc :

$$\forall k \geq n, M \geq u_k \geq i_n$$

La suite (i_n) est croissante et majorée par M , elle converge.

$$(s_n) \text{ et } (i_n) \text{ convergent}$$

3. (a) Si la suite (u_n) est constante égale à 0 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E_n = \{0\}$ et $s_n = i_n = 0$. Dans ce cas $L_s = L_i = 0$.

$$L_s = L_i = 0$$

- (b) Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E_n = \{-1, 1\}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 1$ et $i_n = -1$ ainsi :

$$L_s = 1 \text{ et } L_i = -1$$

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E_n = \left\{ \frac{1}{k+1}, k \geq n \right\}$. On a :

- La borne supérieure de E_n vaut $\frac{1}{n+1}$ car c'est le maximum de E_n .
- La borne inférieure de E_n vaut 0. En effet :
 - 0 est un minorant de E_n
 - Pour tout $\varepsilon > 0$, $0 + \varepsilon$ n'est plus un minorant car d'après la définition de la limite :

$$\exists N \geq n, \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \frac{1}{n+1}$ et $i_n = 0$, on en déduit que :

$$L_s = L_i = 0$$

B Lien avec la convergence

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la borne supérieure de E_n est en particulier un majorant de E_n et la borne inférieure de E_n est un minorant de E_n . Ainsi :

$$\forall k \geq n, i_n \leq u_k \leq s_n$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, i_n \leq u_n \leq s_n$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} i_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ car $L_i = L_s$, d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L_i$.

$$(u_n) \text{ converge}$$

5. En reprenant la démarche de la question précédente, on a :

$$\forall k \geq n, i_n \leq u_k \leq s_n$$

En particulier, si on appelle $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'extractrice (telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geq n$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, i_n \leq u_{\varphi(n)} \leq s_n$$

On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient :

$$\boxed{L_i \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} \leq L_s}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$, par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire : $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$.

Par passage à la borne supérieure et à la borne inférieure, il vient :

$$\forall n \geq n_0, l - \varepsilon \leq i_n \leq s_n \leq l + \varepsilon$$

On a démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |i_n - l| \leq \varepsilon \text{ et } |s_n - l| \leq \varepsilon$$

C'est-à-dire que (i_n) tend vers l et (s_n) tend vers l , par unicité de la limite :

$$\boxed{L_i = L_s = l}$$

7. On va construire l'extractrice φ par récurrence forte.

- On pose $\varphi(0) = 0$.
- Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, supposons avoir défini $\varphi(k)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On considère $E_{\varphi(n-1)+1} = \{u_k, k \geq \varphi(n-1) + 1\}$, par définition de la borne supérieure de cet ensemble, il existe $p \geq \varphi(n-1) + 1$ tel que :

$$s_{\varphi(n-1)+1} - \frac{1}{n} \leq u_p \leq s_{\varphi(n-1)+1}$$

ceci puisque $s_{\varphi(n-1)+1} - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $E_{\varphi(n-1)+1}$ et $s_{\varphi(n-1)+1}$ est un majorant de $E_{\varphi(n-1)+1}$. On pose $\varphi(n) = p$.

Par construction, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ donc φ est strictement croissante. D'autre part, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, s_{\varphi(n-1)+1} - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq s_{\varphi(n-1)+1}$$

Par passage à la limite, d'après le théorème d'encadrement, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = L_s$.

$$\boxed{(u_{\varphi(n)}) \text{ tend vers } L_s}$$

C Un dernier raffinement

8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a pose $F_n = \{u_{2k}, 2k \geq n\}$ et $G_n = \{u_{2k+1}, 2k+1 \geq n\}$. Ces ensembles sont non vides et majorés donc $f_n = \sup(F_n)$ et $g_n = \sup(G_n)$ existent. Montrons que $s_n = \max(f_n, g_n)$ et supposant sans perte de généralité que $f_n \geq g_n$.

- Pour tout $k \geq n$, on a : $s_n \geq u_k$, en particulier si $2k \geq n$, on a : $s_n \geq u_{2k}$ et si $2k+1 \geq n$ alors $s_n \geq u_{2k+1}$. Par passage à la borne supérieure, on a : $s_n \geq f_n$ et $s_n \geq g_n$ donc $s_n \geq \max(f_n, g_n)$.
- Il reste à démontrer que $s_n \leq \max(f_n, g_n) = f_n$. Pour tout $k \geq n$, on a :

$$u_k \leq f_n \text{ ou } u_k \leq g_n \leq f_n \text{ selon la parité de } k$$

Par passage à la borne supérieure, on obtient $s_n \leq f_n$.

Finalement $s_n = f_n$ et on a démontré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \max(f_n, g_n)}$$

On remarque que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(|a - b| + a + b)$$

ce qui se démontre immédiatement par disjonction de cas $a \geq b$ puis $b \geq a$.

Ici cela donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \frac{1}{2}(|f_n - g_n| + f_n + g_n)$$

On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ en utilisant notamment la continuité de la fonction valeur absolue :

$$L_s = \frac{1}{2} \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n - \limsup_{n \rightarrow +\infty} w_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} w_n \right) = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} w_n \right\}$$

On adapte la démarche précédente, en remplaçant borne supérieure par borne inférieure et en remarquant que l'on a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \min(a, b) = \frac{1}{2}(-|a - b| + a + b)$$

Ce qui démontre le résultat voulu :

$$\boxed{L_s = \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} w_n \right\} \text{ et } L_i = \min \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} v_n, \liminf_{n \rightarrow +\infty} w_n \right\}}$$

Problème 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Étant donnée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue, on appelle (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Le but de ce problème est d'étudier une telle suite. Dans la partie A, on établit des propriétés de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction des informations que l'on a sur la fonction f . Dans la partie B, on examine deux exemples.

On rappelle ou on admet la propriété suivante sur la continuité :

Théorème 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite qui tend vers a . Alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

A Propriétés générales

On suppose dans toute cette partie que I est un intervalle **stable** par f , c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

1. On suppose $u_0 \in I$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
2. On suppose dans cette question que f est croissante.
 - (a) Si $u_0 \leq u_1$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. En déduire le sens de variation de (u_n) . Qu'en est-il si $u_0 \geq u_1$?
 - (b) Dans le cas où $I = [a, b]$ est borné (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$), avec $u_0 \in I$ et toujours f croissante, justifier que (u_n) est convergente.
 - (c) Sous les hypothèses précédentes, si on appelle alors ℓ sa limite, montrer que $\ell = f(\ell)$.
3. On suppose dans cette question que f est décroissante. On pose, pour tout n , $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
 - (a) Montrer que I est aussi un intervalle stable par $f \circ f$.
 - (b) Montrer que $f \circ f$ est croissante.
 - (c) Établir une relation de récurrence vérifiée par (v_n) et (w_n) .
 - (d) En déduire que (v_n) et (w_n) sont monotones de monotonies contraires.
 - (e) Montrer que si $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, alors on a $\ell = f(f(\ell))$.
On admettra qu'il en est de même pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

B Étude de deux exemples

Dans un souci de gain de temps et d'espace, on s'efforcera dans cette partie d'appliquer les résultats des questions précédentes, plutôt que de tout refaire dans les cas particuliers.

4. On pose $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$.
 - (a) Résoudre $f(x) = x$.
 - (b) Effectuer l'étude de f en précisant notamment son domaine de définition et ses variations. En déduire que $[0, 2[$ et $]2, +\infty[$ sont deux intervalles stables par f .
 - (c) Donner le signe de $f(x) - x$ en fonction de x .

- (d) On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in [0, 2[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite. On précisera son sens de variation.
- (e) Étudier (u_n) si maintenant $u_0 \in]2, +\infty[$.
5. On pose $g : x \mapsto \cos(x)$ et $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (a) Justifier que I est un intervalle stable par g et par $g \circ g$.
- (b) Montrer que $g(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in I$ puis que $[0, \alpha]$ et $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ sont des intervalles stables par $g \circ g$.
- (c) On définit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} x_0 \in [0, \alpha[\\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$. À l'aide de la question 3, décrire le comportement des suites $(v_n) = (x_{2n})$ et $(w_n) = (x_{2n+1})$ (sens de variation, convergence et limite éventuelles) et enfin celui de la suite (x_n) .

Problème 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Étant donnée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue, on appelle (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

A Propriétés générales

On suppose dans toute cette partie que $f(I) \subset I$. On dit que I est un intervalle **stable** par f . On se convaincra aisément que cela revient à la formulation équivalente suivante : pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

1. On procède par récurrence : $u_0 \in I$ et pour $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \in I$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ par stabilité.
Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in I}$.
2. On suppose dans cette question que f est croissante.
 - (a) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. Tout d'abord $u_0 \leq u_1$. Puis pour $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \leq u_{n+1}$, alors par croissance de f , $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.
Si $u_0 \geq u_1$, un raisonnement analogue montre que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.
 - (b) Dans le cas où $I = [a, b]$ est borné (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$), avec $u_0 \in I$, comme f croissante, (u_n) est monotone d'après 2a. De plus, (u_n) est bornée par $[a, b]$ d'après 1. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.
 - (c) On a la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n . Lorsque n tend vers $+\infty$, $u_{n+1} \rightarrow \ell$ et par continuité de f , $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$.
Finalement $\boxed{\ell = f(\ell)}$.
3. On suppose dans cette question que f est décroissante. On pose, pour tout n , $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
 - (a) Comme $f(I) \subset I$, $f(f(I)) \subset f(I)$ (résultat classique sur les images directes de deux parties incluses l'une dans l'autre, ou bien refaire le raisonnement dans le cas présent).
Or $f(I) \subset I$. Donc $f(f(I)) \subset I$, et donc $\boxed{I \text{ est un intervalle stable par } f \circ f}$.
 - (b) Soit $x \leq y$ deux réels. Par décroissance de f , $f(x) \geq f(y)$, puis à nouveau : $f(f(x)) \leq f(f(y))$.
Donc $(f \circ f)(x) \leq (f \circ f)(y)$, ce qui montre que $\boxed{f \circ f \text{ est croissante}}$.
 - (c)
 - $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}))$. Finalement $\boxed{v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)}$.
 - On obtient de même $\boxed{w_{n+1} = (f \circ f)(w_n)}$.
 - (d)
 - D'après la relation de récurrence précédente, $f \circ f$ étant croissante, $\boxed{(v_n) \text{ et } (w_n) \text{ sont monotones}}$.
 - De plus par décroissance de f , si $u_{2n} \leq v_{2n+2}$, alors $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$.
Ainsi, si $v_n \leq v_{n+1}$, alors $w_n \geq w_{n+1}$.
On a de même : si $v_n \geq v_{n+1}$, alors $w_n \leq w_{n+1}$.
Ceci montre que $\boxed{(v_n) \text{ et } (w_n) \text{ sont de monotonies contraires}}$.
 - (e) Comme dans la question 2c, on passe à la limite dans la relation $v_{n+1} = f(f(v_n))$ par continuité de $f \circ f$, ce qui donne $\boxed{\ell = f(f(\ell))}$.

B Étude de deux exemples

4. On pose $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$.

- (a) • La fonction $\sqrt{}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
 • La fonction $x \mapsto x+2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Par composition, f est définie sur $[-2, +\infty[$ et dérivable sur $] -2, +\infty[$.

Elle est strictement croissante sur $] -2, +\infty[$ et on a les valeurs $f(-2) = 0$, $f(0) = \sqrt{2}$ et $f(2) = 2$, ainsi que la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc $f([0, 2]) = [\sqrt{2}, 2] \subset [0, 2]$ et $f([2, +\infty[) =]2, +\infty[$.

Donc $[0, 2]$ et $]2, +\infty[$ sont des intervalles stables par f .

- (b) $f(x) = x \Rightarrow x+2 = x^2 \Rightarrow x = 2$ ou -1 . Réciproquement, seule 2 est solution.

De plus $f(x) - x > 0$ si $x < 2$ et $f(x) - x < 0$ si $x > 2$.

- (c) On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in [0, 2] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

- D'après 1, $u_n \in [0, 2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- D'après 2, comme f est croissante, (u_n) est monotone.
- $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 > 0$ donc (u_n) est croissante.
- (u_n) est convergente et sa limite est 2.

- (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2, +\infty[$, (u_n) est décroissante et minorée donc converge et sa limite vaut 2.

5. On pose $g : x \mapsto \cos(x)$ et $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- (a) La fonction $\cos$, définie sur $\mathbb{R}$, réalise une bijection décroissante de I dans $[0, 1]$. Ainsi $g(I) = [0, 1] \subset I$. Donc I est un intervalle stable par g et donc par $g \circ g$ (par 3a).

- (b) $x \mapsto g(x) - x$ est bijective sur I (car sa dérivée est négative) et vaut 1 en 0 et -1 en $\frac{\pi}{2}$.

Donc $g(x) - x = 0$ admet une unique solution $\alpha \in I$.

Ainsi $g([0, \alpha]) = [\alpha, 1] \subset \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $g(g([0, \alpha])) \subset g\left(\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, \alpha]$.

De même $g\left(g\left(\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]\right)\right) \subset \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $[0, \alpha]$ et $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ sont des intervalles stables par $g \circ g$.

- (c) On définit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} x_0 \in [0, \alpha] \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$ avec g décroissante. D'après la question 3, (v_n)

est croissante et bornée par 0 et α tandis que (w_n) est décroissante et bornée par α et $\frac{\pi}{2}$. Toutes deux convergent donc vers la seule limite possible, solution de $(g \circ g)(x) = x$: α .

D'après la propriété admise, (x_n) converge également vers α .

Problème 1**Définition 1**

On dit que deux ensembles E et F sont **équipotents** lorsqu'il existe une bijection $f : E \rightarrow F$.

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème suivant et de l'appliquer pour montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents. La dernière partie montre que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents (on aura eu besoin de ce résultat dans la partie précédente).

Théorème 2 (Cantor-Bernstein, 1896)

Soient E, F des ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E , alors il existe une bijection de E dans F .

Un théorème de point fixe

Soit E un ensemble et $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow \Phi(A) \subset \Phi(B).$$

Le but de cette partie est de montrer que Φ possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\Phi(X) = X$. Pour cela, on pose :

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \Phi(A) \subset A\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
2. Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrer que $\Phi(A) \in \mathcal{A}$.
3. On pose $X = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$.
 - (a) Montrer que $X \in \mathcal{A}$.
 - (b) Conclure.

Démonstration du théorème de Cantor-Bernstein

Soit E, F deux ensembles, et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux application injectives. On souhaite montrer qu'il existe une application bijective de E dans F .

4. Considérons l'application $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

$$A \mapsto E \setminus g(F \setminus f(A))$$
 - (a) Vérifier que Φ est bien définie.
 - (b) Montrer que Φ admet un point fixe X .
5. Soit $\tilde{g} : F \setminus f(X) \rightarrow E \setminus X$.

$$x \mapsto g(x)$$
 - (a) Montrer que $\tilde{g}$ est bien définie.
 - (b) Montrer que $\tilde{g}$ est bijective

6. Soit $h : E \rightarrow F$ l'application définie par :

$$\forall x \in E, h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ \tilde{g}^{-1}(x) & \text{si } x \notin X \end{cases}$$

- (a) Montrer que h est bien définie.
- (b) Montrer que h est bijective et en déduire le théorème de Cantor-Bernstein.

Une application

On souhaite montrer que les ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

- 7. Déterminer une application f injective de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
- 8. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{N}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto \{(n, u_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Montrer que Ψ est bien définie et injective.

- 9. Montrer que les ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ sont équipotents.
On pourra admettre temporairement que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents.
- 10. Conclure.

Une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned} \text{Soit } f : \quad \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) &\longmapsto a + \binom{a+b+1}{2} \end{aligned} .$$

- 11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq u_n$.
- 12. Soit $p \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{N}$ tel que $\binom{c+1}{2} \leq p < \binom{c+2}{2}$.
 - (b) On pose $a = p - \binom{c+1}{2}$ et $b = c - a$. Montrer que $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $f(a, b) = p$.
- 13. Dédurre des questions précédentes que f est bijective.

Problème 1**Définition 1**

On dit que deux ensembles E et F sont **équipotents** lorsqu'il existe une bijection $f : E \rightarrow F$.

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème suivant et de l'appliquer pour montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents. La dernière partie montre que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents (on aura eu besoin de ce résultat dans la partie précédente).

Théorème 2 (Cantor-Bernstein, 1896)

Soit E, F des ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E , alors il existe une bijection de E dans F .

1. Par définition de Φ , on a $\forall X \in \mathcal{P}(E), \Phi(X) \subset E$. En particulier, pour $X = E$, $\Phi(E) \subset E$, donc $E \in \mathcal{A}$. Donc

$$\mathcal{A} \neq \emptyset.$$

2. Soit $A \in \mathcal{A}$. Par définition de $\mathcal{A}$, on a $\Phi(A) \subset A$. Comme Φ est croissante (A et $\Phi(A)$ sont bien des parties de E), on en déduit $\Phi(\Phi(A)) \subset \Phi(A)$, ce qui signifie que $\Phi(A) \in \mathcal{A}$.

$$\forall A \in \mathcal{A}, \Phi(A) \in \mathcal{A}$$

3. (a) Soit $A \in \mathcal{A}$. Par définition de X , on a $X \subset A$. Comme Φ est croissante, $\Phi(X) \subset \Phi(A)$. De plus, comme $A \in \mathcal{A}$, $\Phi(A) \subset A$. Donc $\Phi(X) \subset A$. On a ainsi montré

$$\forall A \in \mathcal{A}, \Phi(X) \subset A.$$

Par conséquent,

$$\Phi(X) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = X.$$

Donc

$$X \in \mathcal{A}.$$

- (b) Montrons que $\Phi(X) = X$ par double inclusion. On a déjà prouvé $\Phi(X) \subset X$ à la question précédente. De plus, d'après la question 2 et comme $X \in \mathcal{A}$, $\Phi(X) \in \mathcal{A}$. Or par définition de X , $\forall A \in \mathcal{A}, X \subset A$. Donc en particulier $X \subset \Phi(X)$. Donc

$$\text{On a } \Phi(X) = X, \text{ donc } \Phi \text{ admet un point fixe.}$$

4. (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Par définition d'une image directe, $f(A) \subset F$, et donc $(F \setminus f(A)) \subset F$. On en déduit $g(F \setminus f(A)) \subset E$, puis $(E \setminus g(F \setminus f(A))) \subset E$, soit $\Phi(A) \in \mathcal{P}(E)$.

$$\Phi \text{ est bien définie.}$$

- (b) Montrons que Φ est une application croissante. Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \subset B$. En utilisant les propriétés de l'image directe et du complémentaire, on a alors successivement

$$\begin{aligned} f(A) &\subset f(B) \\ F \setminus f(B) &\subset F \setminus f(A) \\ g(F \setminus f(B)) &\subset g(F \setminus f(A)) \\ E \setminus g(F \setminus f(A)) &\subset E \setminus g(F \setminus f(B)) \\ \Phi(A) &\subset \Phi(B) \end{aligned}$$

Ainsi Φ est croissante. D'après le résultat de la partie A, on en déduit que Φ admet un point fixe.

Φ admet un point fixe X .

5. (a) On a tout d'abord $\Phi(X) = X$, donc $E \setminus g(F \setminus f(X)) = X$. Ainsi $g(F \setminus f(X)) = E \setminus X$. Soit $x \in F \setminus f(X)$. On a alors $g(x) \in g(F \setminus f(X)) = E \setminus X$. Donc

$\tilde{g}$ est bien définie.

- (b) $\tilde{g}$ est une restriction à la source et au but de g , donc $\tilde{g}$ est injective. On peut aussi le montrer comme suit. Soit $x, x' \in F \setminus f(X)$ tels que $\tilde{g}(x) = \tilde{g}(x')$. On a par définition $g(x) = g(x')$. Donc $x = x'$ car g est injective.

Montrons que $\tilde{g}$ est surjective. Soit $y \in E \setminus X$. On a vu précédemment que $E \setminus X = g(F \setminus f(X))$. Il existe donc $x \in F \setminus f(X)$ tel que $g(x) = y$, ce qui signifie que $\tilde{g}(x) = y$. Donc $\tilde{g}$ est surjective.

$\tilde{g}$ est bijective.

6. (a) Soit $x \in E$.
- Si $x \in X$, alors $h(x) = f(x) \in F$.
 - Si $x \notin X$, alors $x \in E \setminus X$. Donc $h(x) = \tilde{g}^{-1}(x)$ est bien défini et $\tilde{g}^{-1}(x) \in F \setminus f(X) \subset F$.

Dans tous les cas, $h(x) \in F$.

h est bien définie.

- (b) Montrons que h est injective et surjective.

Inj. Soit $x, x' \in E$ tels que $h(x) = h(x')$. On distingue deux cas :

- Si $x \in X$, alors $h(x) = f(x) \in f(X)$. Supposons $x' \notin X$. On aurait $h(x') = \tilde{g}^{-1}(x') \in F \setminus f(X)$. Comme $h(x) = h(x')$, on en déduirait une contradiction. Donc $x' \in X$. Ainsi $h(x') = f(x') = h(x) = f(x)$. Comme f est injective, $x = x'$.
- Si $x \notin X$, le même raisonnement montre que $x' = x$.

Donc h est injective.

Surj. Soit $y \in F$. On distingue deux cas :

- Si $y \in f(X)$, alors il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in X$, $y = h(x)$.
- Si $y \in F \setminus f(X)$, on pose $x = \tilde{g}(y)$. On a alors $\tilde{g}^{-1}(x) = y$ et $x \in E \setminus X$, donc $y = h(x)$.

Donc h est surjective.

h est bijective, ce qui prouve le théorème de Cantor-Bernstein.

7. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On définit $\varphi_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad \varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On a alors par définition de $\varphi(A)$

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad x \in A \Leftrightarrow \varphi_A(x) = 1.$$

On considère ensuite l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ A &\longmapsto \varphi_A \end{aligned}$$

et on montre que f est injective.

Soit $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telles que $f(A) = f(B)$. Montrons que $A = B$. Soit $x \in \mathbb{N}$. On a

$$x \in A \Leftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \Leftrightarrow \varphi_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B.$$

Donc $A = B$.

f est injective.

8. Soit $u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$. Donc $(n, u_n) \in \mathbb{N}^2$ et $\{(n, u_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$.

Ψ est bien définie.

Montrons que Ψ est injective. Soit $u, v \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telles que $\Psi(u) = \Psi(v)$. Montrons que $u = v$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $(n, u_n) \in \Psi(u) = \Psi(v)$. Donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(n, u_n) = (m, v_m)$. On en déduit $n = m$ et $u_n = v_m = v_n$. Ainsi $u = v$.

Ψ est injective.

9. On sait que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents. Il existe donc $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ bijective. On pose

$$\begin{aligned} T : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) & T' : \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ A &\longmapsto t(A) & B &\longmapsto t^{-1}(B) \end{aligned}.$$

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$. On a

$$(T' \circ T)(A) = t^{-1}(t(A)) = A, \quad (T \circ T')(B) = t(t^{-1}(B)) = B.$$

Donc T est bijective.

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ sont équipotents.

10. D'après la question 7, il existe une application injective de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

D'après la question 8, $\psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ est injective. Or d'après la question 9, $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents et $T : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ est bijective, de bijection réciproque T' . On en déduit que $T' \circ \Psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est injective.

On peut donc appliquer le théorème de Cantor-Bernstein et conclure

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, une suite strictement croissante. On montre $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq u_n$, par récurrence sur n .

Init. On a $u_0 \in \mathbb{N}$, donc $0 \leq u_0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $n \leq u_n$. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, on a $u_n < u_{n+1}$, d'où $n < u_{n+1}$. Comme $n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$, on en déduit $n + 1 \leq u_{n+1}$.

Donc, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq u_n.$$

12. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. On montre séparément l'existence et l'unicité de c .

Existence . Considérons l'ensemble $A = \left\{ s \in \mathbb{N} \mid \binom{s+1}{2} \leq p \right\}$. Montrons que A possède un plus grand élément. Comme $\binom{1}{0} = 0 \leq p$, $0 \in A$. Donc A est une partie non vide de $\mathbb{N}$. De plus, $\forall s \in \mathbb{N}, \binom{s+1}{2} = \frac{s(s+1)}{2}$. Ainsi, $\forall s \in \mathbb{N}, \binom{s+2}{2} - \binom{s+1}{2} = s + 1 > 0$, donc la suite $\left(\binom{s+1}{2} \right)_{s \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante. Par conséquent, d'après la question 1, $\forall s \in \mathbb{N}, s \leq \binom{s+1}{2}$. Ainsi, si $s \in A$, $s \leq \binom{s+1}{2} \leq p$, donc A est majoré par p . A admet donc un plus grand élément c . Comme $c \in A$ et $c + 1 \notin A$, on obtient

$$\binom{c+1}{2} \leq p < \binom{c+2}{2}.$$

Unicité. Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ vérifiant le résultat. Supposons $c_1 \neq c_2$. Quitte à échanger c_1 et c_2 , on peut supposer $c_1 < c_2$. On a donc $c_1 + 1 \leq c_2$. Comme la suite $\left(\binom{s+1}{2} \right)_{s \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a $p < \binom{c_1+2}{2} \leq \binom{c_2+1}{2} \leq p$, ce qui est absurde. Donc nécessairement $c_1 = c_2$.

Donc

$$\exists! c \in \mathbb{N} \left(\binom{c+1}{2} \leq p < \binom{c+2}{2} \right).$$

(b) On a par définition $a, b \in \mathbb{Z}$.

- Comme $\binom{c+1}{2} \leq p$, on a bien $a = p - \binom{c+1}{2} \in \mathbb{N}$.
- Comme $\binom{c+2}{2} = \binom{c+1}{2} + c + 1$, on a $b = c - a = c + \binom{c+1}{2} - p = \binom{c+2}{2} - 1 - p$.
Comme $p < \binom{c+2}{2}$, $p + 1 \leq \binom{c+2}{2}$, et donc $b \in \mathbb{N}$.
- Enfin $f(a, b) = a + \binom{a+b+1}{2} = p - \binom{c+1}{2} + \binom{c+1}{2} = p$.

$$(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid f(a, b) = p.$$

13. On a montré à la question 2.2 que $\forall p \in \mathbb{N}, \exists (a, b) \in \mathbb{N}^2 f(a, b) = p$, donc f est surjective.

Montrons que f est injective. Soit $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. Posons $p = f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. D'après la question 2.1, il existe un unique $c \in \mathbb{N}$ tel que $\binom{c+1}{2} \leq p < \binom{c+2}{2}$.

Or on a $p = a_1 + \binom{a_1 + b_1 + 1}{2}$. Comme $a_1 \in \mathbb{N}$ et $b_1 \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\binom{a_1 + b_1 + 1}{2} \leq p < a_1 + b_1 + 1 + \binom{a_1 + b_1 + 1}{2} = \binom{a_1 + b_1 + 2}{2}.$$

Par unicité de c , on en déduit $a_1 + b_1 = c$. De même on prouve que $a_2 + b_2 = c$. On en déduit

$$a_1 = p - \binom{a_1 + b_1 + 1}{2} = p - \binom{c+1}{2} = p - \binom{a_2 + b_2 + 1}{2} = a_2,$$

puis $b_1 = c - a_1 = c - a_2 = b_2$. Donc $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ et f est injective.

f est bijective.

Problème 1

Soit $(I_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $I_n \geq 0$. Montrer que la suite (I_n) est convergente.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

4. Montrer que le produit $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constant.
5. (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ (on pourra commencer par encadrer I_{n+1}^2 pour tout n).
 (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.
 (c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_n$ (on pourra penser à comparer trois termes successifs de la suite).
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produits puis à l'aide de factorielles.

Problème 2

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $g : x \mapsto \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

Étude de l'intégrale

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer g' et en déduire les variations de g .
3. Déterminer le signe de g .
4. Déterminer la limite de $\frac{g'(x)}{x-1}$ puis de $\frac{g(x)}{(x-1)^2}$ lorsque $x \rightarrow 1$.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = g(1/x)$.

Précisions graphiques

Soit h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \mapsto \frac{\text{Arctan } x}{x}$.

6. Montrer que h est prolongeable par continuité en 0. On appellera encore h son prolongement.
7. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \text{Arctan}(x) \ln(x) - \int_1^x h(t) dt$.
8. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On appelle encore g son prolongement. Étudier la dérivabilité de g (à droite) en 0.
9. Interpréter graphiquement (en 0 et en $+\infty$) les résultats précédents.

Valeur de $g(0)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_k : x \mapsto \int_1^x t^k \ln(t) dt$.

10. Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer $f_k(x)$.

11. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

12. En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k f_{2k}(x) \right| \leq f_{2n+2}(x).$$

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| g(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$.

14. Donner une valeur approchée de $g(0)$ à 10^{-2} près.

15. Tracer une allure de $\mathcal{C}_g$ en prenant en compte toutes les informations obtenues lors de ce problème et en les faisant apparaître sur votre dessin dans la mesure du possible.

Problème 1

Soit $(I_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

1. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$.

Cela permet de calculer $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$

2. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$. Donc $0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$. Par croissance de l'intégrale, on a donc $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$, ce qui montre que (I_n) est une suite décroissante de termes positifs ou nuls.

La suite (I_n) étant décroissante et minorée (par 0), elle est convergente.

3. Soit $n \geq 2$. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(t) \sin(t) dt.$

On intègre par parties en posant $\begin{cases} u(t) = \sin^{n-1}(t) \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases}$. Alors $\begin{cases} u'(t) = (n-1) \cos(t) \sin^{n-2}(t) \\ v(t) = -\cos(t) \end{cases}$.

$$I_n = [-\cos(t) \sin^{n-1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^{n-2}(t) dt = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t)) \sin^{n-2}(t) dt.$$

Ainsi $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$. Et donc $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

4. La relation précédente s'écrit pour $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

Alors $I_{n+2} I_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} I_n I_{n+1}$, i.e. $(n+2) I_{n+2} I_{n+1} = (n+1) I_n I_{n+1}$.

Cela montre que $((n+1) I_n I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, égale à $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

5. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$, donc $0 \leq (n+1) I_{n+1} I_{n+1} \leq (n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi $0 \leq I_{n+1}^2 \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$, soit $0 \leq |I_n| \leq \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$. Par encadrement, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ donc, comme $I_n \neq 0$, $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, soit, d'après 3,

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1. \text{ Or } \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ donc par encadrement, } \frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

(c) Sur le même principe, pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} \geq I_n \geq I_{n-1}$ donne : $n I_n I_{n+1} \geq n I_n I_n \geq n I_n I_{n-1}$, ou encore $\frac{n}{n+1} (n+1) I_n I_{n+1} \geq n I_n I_n \geq n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{4}$. Par encadrement, on obtient $n I_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$,

d'où $\sqrt{n} I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

6. D'après 3, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2n} = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \right) I_0, \quad I_{2n+1} = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \right) I_1, \quad \text{soit}$$

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$$

$$I_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$$

Problème 2

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $g : x \mapsto \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

Étude de l'intégrale

1. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (par quotient avec $1+t^2 \neq 0$) donc sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$), pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc par théorème fondamental de l'analyse, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. D'après le théorème fondamental, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$, négatif sur $]0, 1[$, positif sur $]1, +\infty[$, nul en 1.
Donc g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et croissante sur $]1, +\infty[$.
3. Comme $g(0) = 0$, g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle en 1.
4. $1+x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 2$ et $\frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ par exemple par taux d'accroissement. Donc $\frac{g'(x)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $0 < \eta < 1$ tel que $\forall t \in [1-\eta, 1+\eta] \setminus \{1\}$, $\frac{1}{2} - \varepsilon \leq \frac{g'(t)}{t-1} \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$. On a alors, pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$,

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) (t-1) \leq g'(t) \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) (t-1).$$

Soit $x \in [1-\eta, 1+\eta] \setminus \{1\}$. Par croissance de l'intégrale de 1 à x ,

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{(x-1)^2}{2} \leq g(x) \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{(x-1)^2}{2} \text{ car } g(1) = 0.$$

Ceci montre que $\frac{g(x)}{(x-1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{4}$.

Interprétation graphique : la courbe représentative de g présente l'allure d'une parabole ($x \mapsto \frac{1}{4}(x-1)^2$) au voisinage de $x = 1$.

5. On effectue le changement de variable $u = \frac{1}{t}$; $du = -\frac{1}{t^2} dt$.

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = \int_1^{1/x} -\frac{\ln(1/u)}{1+u^2} du = \int_1^{1/x} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = g(1/x).$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = g(1/x)$.

Précisions graphiques

Soit h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \mapsto \frac{\text{Arctan } x}{x}$.

6. $\frac{\text{Arctan } x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ (taux d'accroissement) donc poser $\boxed{h(0) = 1 \text{ prolonge } h \text{ par continuité en } 0}$.
7. On effectue une intégration par parties avec $t \mapsto \text{Arctan } t$ et $t \mapsto \ln(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$.
 Soit $x \in \mathbb{R}$. $g(x) = [\text{Arctan}(t) \ln(t)]_1^x - \int_0^1 \frac{\text{Arctan } t}{t} dt$. Donc $\boxed{g(x) = \text{Arctan}(x) \ln(x) - \int_1^x h(t) dt}$.
8. $\text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $\text{Arctan}(x) \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x)$, qui tend vers 0 en 0 par croissances comparées. De plus, h est désormais continue sur $[0, 1]$, ainsi $\int_0^1 h(t) dt \in \mathbb{R}$.
 Donc poser $\boxed{g(0) = \int_0^1 h(t) dt \text{ prolonge } g \text{ par continuité en } 0}$.
 $x \mapsto \int_1^x h(t) dt$ est dérivable en 0 par théorème fondamental car h est continue sur $[0, 1]$.
 Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}(x) \ln(x)$, prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$.
 Alors pour tout $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\text{Arctan}(x) \ln(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$. Ainsi f n'est pas dérivable en 0. Et donc $\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en } 0}$ (sinon $f : x \mapsto g(x) + \int_1^x h(t) dt$ le serait aussi).
9. La courbe de g présente une demi-tangente verticale en 0 et (comme $g(x) = g(1/x)$ pour tout x) g tend vers $g(0)$ en $+\infty$.

Valeur de $g(0)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_k : x \mapsto \int_1^x t^k \ln(t) dt$.

10. Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_k(x) = \left[\frac{t^{k+1} \ln(t)}{k+1} \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^k}{k+1} dt$.

Ainsi $\boxed{f_k(x) = \frac{x^{k+1} \ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1} - 1}{(k+1)^2}}$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

La somme géométrique donne $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1 + x^2}$, d'où

$$\boxed{\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2}}.$$

12. $\forall t \geq 1$, $\frac{\ln(t)}{1 + t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} \ln(t) + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1 + t^2}$. Par croissance de l'intégrale sur $[1, x]$ pour

$$x > 1 : g(x) \leq \sum_{k=0}^n (-1)^k f_{2k}(x) + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt.$$

Cela donne, en valeurs absolues : $\boxed{\left| g(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k f_{2k}(x) \right| \leq f_{2n+2}(x)}$.

On fait le même raisonnement sur $[x, 1]$ en faisant attention aux signes dans les inégalités.

13. On fait tendre x vers 0. D'après la formule de 10, $f_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{(k+1)^2}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\left| g(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}}.$

14. Avec $n = 4$, l'estimation d'erreur ci-dessus donne $\left| g(0) - \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{121} \leq 10^{-2}$. D'où une valeur

approchée de $g(0)$ à 10^{-2} près : $\sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} = \boxed{\frac{91369}{99225}}.$

15. Une allure de $\mathcal{C}_g$ se déduit de l'ensemble des résultats précédents : minimum nul en $x = 1$, symétrie par rapport à la transformation $x \mapsto 1/x$, demi-tangente verticale en 0 et asymptote horizontale en $+\infty$.

Problème 1

Dans ce problème, $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction continue. Étant donnés $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, on considère l'équation différentielle

$$t^2 y'' + aty' + by = g(t) \quad (E)$$

1. On note (E_0) l'équation homogène associée (toujours pour $t \in \mathbb{R}_+^*$). Montrer que $t \mapsto t^m$ est solution si et seulement si m est solution de l'équation $X(X-1) + aX + b = 0$.
2. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, on pose u définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = f(e^x)$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si u est solution (définie pour $x \in \mathbb{R}$) de

$$u'' + (a-1)u' + bu = g(e^x). \quad (E')$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ les équations différentielles suivantes.
 - (a) $t^2 y'' + 5ty' + 4y = t$,
 - (b) $t^2 y'' + y = t + \frac{1}{t}$.
4. Résoudre (*i.e.* trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$)

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Problème 2

1. Montrer que l'équation $X^2 - X - 1 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes.
On notera φ la plus grande de ces solutions et $\hat{\varphi}$ la plus petite. Dans tout le problème (y compris dans cette question) on ne cherchera pas à donner une expression explicite de φ et $\hat{\varphi}$. On admet aussi que φ et $\hat{\varphi}$ sont irrationnels.
Sans calculer φ et $\hat{\varphi}$, donner les valeurs de $\varphi + \hat{\varphi}$ et $\varphi\hat{\varphi}$.
- On note $\mathbb{Z}[\varphi]$ l'ensemble suivant.

$$\mathbb{Z}[\varphi] = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\varphi\}.$$

2. Montrer que $\mathbb{Z}[\varphi]$ est un sous-anneau du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$.
On note G le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}[\varphi], +, \times)$.
3. Soit $x \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\varphi$.
4. Soit $x = a + b\varphi$, avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. L'unicité du couple (a, b) nous permet de poser $\hat{x} = a + b\hat{\varphi}$ et $N(x) = x\hat{x}$.
 - (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}[\varphi], N(x) \in \mathbb{Z}$.
 - (b) Montrer que $\forall x, x' \in \mathbb{Z}[\varphi], \widehat{xx'} = \hat{x}\hat{x'}$.
 - (c) En déduire que $\forall x, x' \in \mathbb{Z}[\varphi], N(xx') = N(x)N(x')$.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}[\varphi], x \in G \Leftrightarrow N(x) \in \{-1, 1\}$. $\mathbb{Z}[\varphi]$ est-il un corps ?
6. On pose $H = G \cap]1, +\infty[$.

- (a) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On pose $x = a + b\varphi$. Montrer que si $x \in H$, alors $a \geq 0$ et $b > 0$.
- (b) En déduire que φ est le plus petit élément de H .
- (c) Soit $x \in H$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\varphi^p \leq x < \varphi^{p+1}.$$

- (d) En déduire que $H = \{\varphi^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$.

7. Montrer que

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ (\varepsilon, p) &\longmapsto \varepsilon\varphi^p \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

Problème 1

Dans ce problème, $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction continue. Étant donnés $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, on considère l'équation différentielle

$$t^2 y'' + aty' + by = g(t) \quad (E)$$

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. $y : t \mapsto t^m$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, y'(t) = mt^{m-1} \text{ et } y''(t) = m(m-1)t^{m-2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, t^2 y''(t) + aty'(t) + by(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, (m(m-1) + am + b)t^m = 0 \\ &\Leftrightarrow m(m-1) + am + b = 0 \end{aligned}$$

car $t^m \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Finalement,

$$t \mapsto t^m \text{ est solution de } (E_0) \iff m \text{ est solution de } X(X-1) + aX + b = 0.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et définissons $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = f(e^x).$$

De manière équivalente, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t) = u(\ln t)$.

Par composition, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(t) = \frac{1}{t} u'(\ln t) \quad \text{et} \quad f''(t) = \frac{1}{t^2} u''(\ln t) - \frac{1}{t^2} u'(\ln t).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } E &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, t^2 f''(t) + atf'(t) + bf(t) = g(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, u''(\ln t) + (a-1)u'(\ln t) + bu(\ln t) = g(t) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, u''(x) + (a-1)u'(x) + bu(x) = g(e^x) \end{aligned}$$

car $t \mapsto \ln t$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi

$$f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \iff u \text{ est solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R}.$$

3. (a) $m(m-1) + 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2$, qui est aussi l'équation caractéristique de (E') .
Les solutions u de l'équation homogène associée à $(E') : u'' + 4u' + 4u = e^x$ sont

$$\{x \mapsto (Ax + B)e^{2x} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi, en posant $x = \ln t$, les solutions de l'équation homogène (E_0) sont $\left\{ t \mapsto \frac{A + B \ln t}{t^2} \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$.

Enfin $x \mapsto \frac{1}{9}e^x$ est solution particulière de (E') . Les solutions sont donc

$$\left\{ t \mapsto \frac{A + B \ln t}{t^2} + \frac{t}{9} \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) L'équation (E') associée est $u'' - u' + u = e^x + e^{-x}$.

L'équation $m(m-1)+1=0$ a deux solutions complexes : $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. D'où les solutions de l'équation homogène associée à (E') :

$$\left\{ x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x \right) \right) \right\}.$$

En posant $x = \ln t$, on a les solutions de l'équation homogène.

$$\left\{ t \mapsto \sqrt{t} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t \right) \right) \right\}.$$

On cherche une solution particulière par superposition. On obtient $y_p(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^{-1}$. Finalement, les solutions sont

$$\left\{ t \mapsto \sqrt{t} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln t \right) \right) + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \right\}.$$

4. **Analyse** Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''(x) = \frac{-1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{-1}{x^2} f(x)$.

Ainsi, f est solution de l'équation $x^2 y'' + y = 0$, résolue précédemment.

Donc $f \in \left\{ x \mapsto \sqrt{x} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right) \right\}$.

Synthèse Soit $A, B \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \sqrt{x} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-A \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + B \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right) \right]$$

et

$$f \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) - B \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right).$$

On a $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ dès lors que $\begin{cases} \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = A \\ \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = A \end{cases}, i.e. \sqrt{3}B = A$.

En conclusion, les solutions sont

$$\left\{ x \mapsto C \sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x - \frac{\pi}{6} \right) \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Problème 2

1. Le discriminant du trinôme $X^2 - X - 1$ est $\Delta = 5$. Comme $\Delta > 0$,

le trinôme $X^2 - X - 1$ admet deux racines réelles distinctes.

On note φ et $\hat{\varphi}$ ces deux solutions, de sorte que $\hat{\varphi} < \varphi$.

On a (somme et produit des racines d'un trinôme) $\varphi + \hat{\varphi} = 1$ et $\varphi\hat{\varphi} = -1$.

2. Montrons que $\mathbb{Z}[\varphi]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

- Par définition de $\mathbb{Z}[\varphi]$, $\mathbb{Z}[\varphi] \subset \mathbb{R}$.
- Pour $(a, b) = (0, 0)$, on obtient $a + b\varphi = 0$, donc $0 \in \mathbb{Z}[\varphi]$.
- Pour $(a, b) = (1, 0)$, on obtient $a + b\varphi = 1$, donc $1 \in \mathbb{Z}[\varphi]$.
- Soit $x, x' \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\varphi$ et $x' = a' + b'\varphi$. On a alors

$$x + x' = (a + a') + (b + b')\varphi.$$

Comme $a + a' \in \mathbb{Z}$ et $b + b' \in \mathbb{Z}$, on a $x + x' \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Donc $\mathbb{Z}[\varphi]$ est stable par $+$.

- Comme $\varphi^2 = \varphi + 1$,

$$xx' = (aa' + bb') + (ab' + ba' + bb')\varphi.$$

Comme $aa' + bb' \in \mathbb{Z}$ et $ab' + ba' + bb' \in \mathbb{Z}$, on a $xx' \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Donc $\mathbb{Z}[\varphi]$ est stable par $\times$.

- Enfin,

$$-x = (-a) + (-b)\varphi.$$

Comme $-a \in \mathbb{Z}$ et $-b \in \mathbb{Z}$, on a $-x \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Donc $\mathbb{Z}[\varphi]$ est stable par passage à l'opposé.

$\mathbb{Z}[\varphi]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

3. Soit $x \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Supposons $x = a + b\varphi = a' + b'\varphi$, avec $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$. Par différence,

$$a - a' = (b' - b)\varphi.$$

Si $b \neq b'$, alors φ serait rationnel. Donc $b = b'$ et $a = a'$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{Z}[\varphi], \exists! (a, b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\varphi.$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{Z}[\varphi]$, avec $x = a + b\varphi$. On a

$$\begin{aligned} N(x) &= x\hat{x} \\ &= (a + b\varphi)(a + b\hat{\varphi}) \\ &= a^2 + ab(\varphi + \hat{\varphi}) + b^2\varphi\hat{\varphi} \\ &= a^2 + ab - b^2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{Z}[\varphi], N(x) \in \mathbb{Z}$.

- (b) Soit $x, x' \in \mathbb{Z}[\varphi]$. On écrit $x = a + b\varphi$ et $x' = a' + b'\varphi$, avec $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$. Comme φ et $\hat{\varphi}$ sont racines du trinôme $X^2 - X - 1$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{xx'} &= (aa' + bb') + (ab' + ba' + bb')\hat{\varphi} \\ \hat{x} \times \hat{x'} &= (a + b\hat{\varphi})(a' + b'\hat{\varphi}) = (aa' + bb') + (ab' + ba' + bb')\hat{\varphi}. \end{aligned}$$

Donc $\widehat{xx'} = \hat{x}\hat{x'}$.

(c) On déduit

$$N(xx') = (xx')(\widehat{xx'}) = xx'\hat{x}\hat{x}' = (x\hat{x})\left(x'\hat{x}'\right) = N(x)N(x').$$

$$\text{Donc } \boxed{N(xx') = N(x)N(x')}.$$

5. Soit $x \in G$. Il existe $y \in \mathbb{Z}[\varphi]$ tel que $xy = 1$. On en déduit

$$N(x)N(y) = N(xy) = N(1) = 1.$$

Comme $N(x), N(y) \in \mathbb{Z}$, $N(x)$ divise 1. On en déduit

$$N(x) \in \{-1, 1\}.$$

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{Z}[\varphi]$ tel que $N(x) \in \{-1, 1\}$.

Remarquons que puisque $\hat{\varphi} = 1 - \varphi$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b\hat{\varphi} = a + b - b\varphi \in \mathbb{Z}[\varphi]$.

- Si $N(x) = 1$, on a $x\hat{x} = 1$. Comme $\hat{x} \in \mathbb{Z}[\varphi]$, x est inversible dans $\mathbb{Z}[\varphi]$ et $x^{-1} = \hat{x}$.
- Si $N(x) = -1$, on a $x \times (-\hat{x}) = 1$. Comme $-\hat{x} \in \mathbb{Z}[\varphi]$, x est inversible dans $\mathbb{Z}[\varphi]$ et $x^{-1} = -\hat{x}$.

Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}[\varphi], x \in G \Leftrightarrow N(x) \in \{-1, 1\}}.$$

Comme $2 \in \mathbb{Z}[\varphi]$ et $N(2) = 4$, 2 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}[\varphi]$. Donc

$$\boxed{\mathbb{Z}[\varphi] \text{ n'est pas un corps}}.$$

6. (a) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $x = a + b\varphi$. Supposons $x \in H$. On a alors $x \in G$ et $x > 1$. On en déduit que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\varphi]$ et $0 < x^{-1} < 1$. De plus, d'après la question précédente, $N(x) = 1$ ou $N(x) = -1$.

- Si $N(x) = 1$, alors $x^{-1} = \hat{x}$. Ainsi $-1 < -\hat{x}$, d'où $0 < x - \hat{x} = b(\varphi - \hat{\varphi})$ et donc $b > 0$ car $\hat{\varphi} < \varphi$. De plus, comme $\varphi \times \hat{\varphi} < 0$, on a nécessairement $\varphi > 0$ et $\hat{\varphi} < 0$. Donc $0 < a + b\hat{\varphi} < a$.
- Si $N(x) = -1$, alors $x^{-1} = -\hat{x}$. Ainsi $1 < x - \hat{x} = b(\varphi - \hat{\varphi})$ et donc $b > 0$ car $\hat{\varphi} < \varphi$. Comme $-1 < \hat{x}$, on en déduit $-1 < a + b\hat{\varphi} < a$ et donc $0 \leq a$ car $a \in \mathbb{Z}$.

Donc, dans les deux cas, $\boxed{\text{si } a + b\varphi \in H, \text{ alors } a \geq 0 \text{ et } b > 0}$.

(b) Tout d'abord, $N(\varphi) = \varphi \times \hat{\varphi} = -1$, donc $\varphi \in G$. De plus, comme $\varphi + \hat{\varphi} = 1$ et $\hat{\varphi} < 0$, $\varphi > 1$.
Donc $\boxed{\varphi \in H}$.

Montrons maintenant que φ est un minorant de H . Soit $x \in H$. En particulier, $x \in \mathbb{Z}[\varphi]$, donc il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\varphi$. D'après la question précédente, $a \geq 0$ et $b > 0$. On en déduit $b \geq 1$ car $b \in \mathbb{Z}$, puis $a + b\varphi \geq \varphi$ car $\varphi > 0$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est le plus petit élément de } H}$.

(c) Soit $x \in H$. On considère

$$A = \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid \varphi^k \leq x \right\}.$$

Comme $\varphi = \min H$, $1 \in A$ et donc A est une partie non vide de $\mathbb{N}$. De plus

$$\varphi^k \leq x \Leftrightarrow k \leq \frac{\ln x}{\ln \varphi},$$

car $\ln \varphi > 0$. Donc A est majoré et admet un plus grand élément p . Comme $p + 1 \notin A$, on a $x < \varphi^{p+1}$. Donc

$$\boxed{\forall x \in H, \exists! p \in \mathbb{N}^* \varphi^p \leq x < \varphi^{p+1}}.$$

(d) On montre le résultat par double inclusion.

$\supset$ $(G, \times)$ est un groupe et $\varphi \in G$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, \varphi^p \in G$.

De plus, comme $\varphi > 1$, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \varphi^p \geq \varphi > 1$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, \varphi^p \in H$, i.e. $\{\varphi^p \mid p \in \mathbb{N}^*\} \subset H$.

$\subset$ Soit $x \in H$. D'après la question précédente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^p \leq x < \varphi^{p+1}$.

On pose alors $y = \frac{x}{\varphi^p}$. On a $1 \leq y < \varphi$.

Comme $x \in G$, $\varphi \in G$ et $(G, \times)$ est un groupe, on en déduit $y \in G$.

Supposons $y > 1$. On a alors $y \in H$ et $y < \varphi$, ce qui est impossible.

Donc nécessairement $y = 1$ et $x = \varphi^p$. Ainsi $H \subset \{\varphi^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$.

Finalement, $H = \{\varphi^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$.

7. Commençons par vérifier que Θ est bien défini. Comme $\varphi \in G$ et $(G, \times)$ est un groupe, $\forall p \in \mathbb{Z}, \varphi^p \in G$. De plus, comme $-1 \in G$, $\forall (\varepsilon, p) \in \mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z}$, $\varepsilon \varphi^p \in G$. Donc Θ est bien défini. On doit ensuite montrer que Θ est un morphisme de groupes, injectif et surjectif.

- Commençons par expliciter la loi du groupe $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z}$. Il s'agit du produit cartésien des groupes $(\mathbb{U}_2, \times)$ et $(\mathbb{Z}, +)$. Donc la loi $\star$ du groupe $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z}$ est définie par

$$\forall ((\varepsilon, p), (\varepsilon', p')) \in \mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z}, (\varepsilon, p) \star (\varepsilon', p') = (\varepsilon \varepsilon', p + p').$$

Puis

$$\begin{aligned} \Theta((\varepsilon, p) \star (\varepsilon', p')) &= \Theta(\varepsilon \varepsilon', p + p') \\ &= \varepsilon \varepsilon' \varphi^{p+p'} \\ &= (\varepsilon \varphi^p) \times (\varepsilon' \varphi^{p'}) \\ &= \Theta(\varepsilon, p) \times \Theta(\varepsilon', p'). \end{aligned}$$

Donc Θ est un morphisme de groupes.

- Montrons que $\text{Ker } \Theta = \{(1, 0)\}$. Soit $(\varepsilon, p) \in \mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z}$ tel que $\Theta(\varepsilon, p) = 1$, i.e. $\varepsilon \varphi^p = 1$.

Comme $\varphi > 0$, $\varepsilon \varphi^p$ a même signe que ε . Donc $\varepsilon = 1$. Ainsi $\varphi^p = 1$.

Comme $\varphi \neq 1$, on en déduit $p \ln \varphi = 0$, puis $p = 0$. Donc $(\varepsilon, p) = (1, 0)$.

Cela montre que $\text{Ker } \Theta \subset \{(1, 0)\}$.

Comme $(1, 0)$ est l'élément neutre de $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{Z}$, l'inclusion réciproque est vérifiée.

Par conséquent $\text{Ker } \Theta = \{(1, 0)\}$ et Θ est injectif.

- Montrons enfin que Θ est surjectif. Soit $x \in G$. On distingue alors plusieurs cas

- Si $x > 1$, alors $x \in H$ et, d'après la question précédente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \varphi^p = \Theta(1, p)$.
- Si $0 < x < 1$, alors $x^{-1} \in H$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{-1} = \varphi^p$, d'où $x = \varphi^{-p} = \Theta(1, -p)$.
- Si $x = 1$, alors $x = \Theta(1, 0)$.

Cela prouve que $\forall x \in G, x > 0 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} x = \Theta(1, p)$. Si $x < 0$, alors $-x \in G$ et $-x > 0$.

Donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $-x = \varphi^p$, d'où $x = -\varphi^p = \Theta(-1, p)$.

Comme $0 \notin G$, tous les cas possibles ont été traités. Donc Θ est surjectif.

Donc Θ est un isomorphisme de groupes.

Problème 1

L'objectif de ce problème est de déterminer les triplets pythagoriciens et d'en déduire le grand théorème de Fermat pour $n = 4$.

A Préliminaire

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout nombre premier p , on note $\nu_p(n)$ la valuation p -adique de n .

1. Soit $a, b, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $a^k \mid b^k$, alors $a \mid b$.
2. Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\left(\exists m \in \mathbb{N}^* \ n = m^k \right) \Leftrightarrow (\forall p \in \mathcal{P}, \nu_p(n) \equiv 0 \ [k]).$$

3. Soit $m, k, a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$ et $ab = m^k$. Montrer qu'il existe $c, d \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = c^k$ et $b = d^k$.

B Triplets pythagoriciens

On appelle **triplet pythagorien** tout triplet $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$.

Un triplet pythagorien (a, b, c) est dit **primitif** si $a \wedge b = 1$.

Soit (a, b, c) un triplet pythagorien.

4. (a) Montrer que $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c$.
- (b) En déduire qu'il existe $\delta \in \mathbb{N}^*$ et un triplet pythagorien primitif (a', b', c') tel que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ et $c = \delta c'$.

Dans la suite, on suppose que (a, b, c) est un triplet pythagorien primitif.

5. En considérant les congruences de a^2 , b^2 et c^2 modulo 4, montrer que a et b n'ont pas la même parité et que c est impair.

On dit qu'un triplet pythagorien primitif (a, b, c) est **rangé** si b est pair et a et c sont impairs. On suppose maintenant que (a, b, c) est un triplet pythagorien primitif et rangé.

6. (a) Montrer que $(c - a) \wedge (c + a) = 2$.
- (b) Montrer qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$p^2 = \frac{c + a}{2} \quad \text{et} \quad q^2 = \frac{c - a}{2}.$$

En déduire que

$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq \quad \text{et} \quad c = p^2 + q^2.$$

- (c) Montrer que p et q sont premiers entre eux, n'ont pas la même parité et que $q < p$.

7. Réciproquement, soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que p et q n'ont pas la même parité et que $q < p$. Montrer que $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ est un triplet pythagorien primitif rangé.

C Grand théorème de Fermat pour $n = 4$

On considère l'équation diophantienne $(E) : a^4 - b^4 = c^2$. On dit qu'une solution $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ de (E) est **primitive** si $a \wedge b = 1$.

8. Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ une solution de (E) . Montrer que l'équation (E) admet une solution primitive (a', b', c') telle que $a' \leq a$.

On suppose dorénavant que (a, b, c) est une solution primitive de (E) .

9. Montrer que a est impair.
10. On suppose que b est impair. En considérant le triplet pythagoricien (b^2, c, a^2) , puis en calculant $b^2 a^2$, montrer que l'équation (E) admet une solution primitive $(a', b', c') \in (\mathbb{N}^*)^3$ telle que $a' < a$.
11. On suppose que b est pair.
- (a) Montrer qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que p est impair, q est pair, $b^2 = 2pq$ et $a^2 = p^2 + q^2$.
 - (b) Montrer qu'il existe $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^2 = r^4 + 4s^4$, puis qu'il existe $t, u \in \mathbb{N}^*$ tels que $r^2 = t^4 - u^4$.
En déduire que l'équation (E) admet une solution primitive $(a', b', c') \in (\mathbb{N}^*)^3$ telle que $a' < a$.
12. En déduire que l'équation (E) n'admet aucune solution $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$.
13. En déduire le grand théorème de Fermat pour $n = 4$, *i.e.* que l'équation $a^4 + b^4 = c^4$ n'admet aucune solution $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

Problème 1

1. Soit $a, b, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^k \mid b^k$. Soit $p \in \mathcal{P}$. Par propriétés des valuations p -adiques, on a $\nu_p(a^k) \leq \nu_p(b^k)$. Or $\nu_p(a^k) = k\nu_p(a)$ et $\nu_p(b^k) = k\nu_p(b)$. Comme $k > 0$, on en déduit $\nu_p(a) \leq \nu_p(b)$. On a donc prouvé $\{p \in \mathcal{P} \mid \nu_p(a) \leq \nu_p(b)\}$, de quoi on déduit $a \mid b$ par théorème de cours.

$$\boxed{\text{Si } a^k \mid b^k, \text{ alors } a \mid b.}$$

2. Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$.

- $\Rightarrow$ Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = m^k$. Soit $p \in \mathcal{P}$. On a $\nu_p(n) = k\nu_p(m)$, donc $\nu_p(n) \equiv 0 [k]$.
- $\Leftarrow$ Supposons $\{p \in \mathcal{P} \mid \nu_p(n) \equiv 0 [k]\}$. On décompose n en produit de facteurs premiers. Il existe un ensemble fini Q de nombres premiers tel que

$$n = \prod_{p \in Q} p^{\nu_p(n)}.$$

Par hypothèse, pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $\alpha_p \in \mathbb{N}$ tel que $\nu_p(n) = k\alpha_p$. On pose alors

$$m = \prod_{p \in Q} p^{\alpha_p}.$$

On a alors

$$m^k = \left(\prod_{p \in Q} p^{\alpha_p} \right)^k = \prod_{p \in Q} p^{k\alpha_p} = \prod_{p \in Q} p^{\nu_p(n)} = n.$$

Donc

$$\boxed{(\exists m \in \mathbb{N}^* \ n = m^k) \Leftrightarrow (\forall p \in \mathcal{P}, \nu_p(n) \equiv 0 [k])}.$$

3. Soit $m, k, a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$ et $ab = m^k$. Soit $p \in \mathcal{P}$. Comme $a \wedge b = 1$, on a $\min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\} = 0$. Comme $ab = m^k$, on a $\nu_p(a) + \nu_p(b) = k\nu_p(m)$. On a donc deux possibilités, soit $(\nu_p(a), \nu_p(b)) = (0, k\nu_p(m))$, soit $(\nu_p(a), \nu_p(b)) = (k\nu_p(m), 0)$. Dans tous les cas, on a $\nu_p(a) \equiv 0 [k]$ et $\nu_p(b) \equiv 0 [k]$. On en déduit le résultat à l'aide de la question précédente.

$$\boxed{\text{Si } ab = m^k \text{ et } a \wedge b = 1, \text{ alors il existe } c, d \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } a = c^k \text{ et } b = d^k.}$$

4. (a) Soit $d = a \wedge b$. Alors d^2 divise a^2 et b^2 , donc $d^2 \mid (a^2 + b^2)$, donc $d^2 \mid c^2$. On en déduit $d \mid c$ d'après la question 1. En particulier $a \wedge b$ divise a , b et c , donc $a \wedge b \mid a \wedge c$ et $a \wedge b \mid b \wedge c$. On montre de même $a \wedge c \mid a \wedge b$ et $b \wedge c \mid a \wedge b$. Donc

$$\boxed{a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c}.$$

- (b) Posons $\delta = a \wedge b$. On a $\delta \mid a$ et $\delta \mid b$. De plus, d'après la question précédente, $\delta \mid c$. Donc il existe $a', b', c' \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ et $c = \delta c'$. Il reste à montrer que (a', b', c') est un triplet pythagoricien primitif.

- Comme (a, b, c) est un triplet pythagoricien, $a^2 + b^2 = c^2$. Ainsi $\delta^2((a')^2 + (b')^2) = \delta^2(c')^2$. Comme $\delta > 0$, on en déduit $(a')^2 + (b')^2 = (c')^2$, donc (a', b', c') est un triplet pythagoricien.
- On a $\delta = a \wedge b = \delta a' \wedge \delta b' = \delta a' \wedge b'$, donc $a' \wedge b' = 1$ et (a', b', c') est un triplet pythagoricien primitif.

Il existe $\delta \in \mathbb{N}^*$ et un triplet pythagoricien primitif (a', b', c') tel que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ et $c = \delta c'$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si n est pair, alors $2 \mid n$, donc $4 \mid n^2$, donc $n^2 \equiv 0 \pmod{4}$.
- Si n est impair, alors $n \equiv 1 \pmod{4}$ ou $n \equiv 3 \pmod{4}$. Dans les deux cas $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

On a donc montré qu'un carré est congru à 0 ou à 1 modulo 4.

Comme $a \wedge b = 1$, a et b ne peuvent pas être tous les deux pairs. Supposons que a et b soient tous les deux impairs. D'après ce qui précède, on a $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$ et $b^2 \equiv 1 \pmod{4}$, donc $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$, ce qui est impossible. Donc a et b n'ont pas la même parité. On a alors $c^2 \equiv 1 \pmod{4}$, donc c est impair.

a et b n'ont pas la même parité et c est impair.

6. (a) Soit $d = c - a \wedge c + a$. d divise $2c$ et $2a$, donc d divise $2a \wedge c = 2$ car $a \wedge c = a \wedge b = 1$. De plus, comme a et c sont impairs, $c - a$ et $c + a$ sont pairs, donc $2 \mid d$. Donc

$$(c - a) \wedge (c + a) = 2.$$

- (b) Comme b est pair, il existe $b' \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = 2b'$. On a alors $b^2 = 4(b')^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$, donc $(b')^2 = uv$ avec $u = \frac{c + a}{2}$ et $v = \frac{c - a}{2}$. D'après la question précédente, $u, v \in \mathbb{N}^*$ et $u \wedge v = 1$. On en déduit, d'après la question 3, qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $u = p^2$ et $v = q^2$.

$$\text{Il existe } p, q \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } \frac{c + a}{2} = p^2 \text{ et } \frac{c - a}{2} = q^2.$$

On en déduit directement $c = p^2 + q^2$, $a = p^2 - q^2$ et $b^2 = 4p^2q^2$, donc $b = 2pq$ car $b, p, q > 0$.

$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq, \quad c = p^2 + q^2.$$

- (c) En reprenant les notations de la question précédente, on a $u \wedge v = 1$, donc $p^2 \wedge q^2 = 1$. Or $p^2 \wedge q^2 = (p \wedge q)^2$, donc $p \wedge q = 1$. On en déduit que p et q ne peuvent pas être tous les deux pairs. Si p et q sont tous les deux impairs, alors $c = p^2 + q^2$ serait pair, ce qui n'est pas le cas. Donc p et q n'ont pas la même parité. Enfin, comme $a > 0$, on a $p^2 > q^2$, donc $q < p$.

p et q sont premiers entre eux, n'ont pas la même parité et $q < p$.

7. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que p et q n'ont pas la même parité et que $q < p$. Posons $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ et $c = p^2 + q^2$. Comme $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $q < p$, on a $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

- On a

$$a^2 + b^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4 = (p^2 + q^2)^2 = c^2.$$

Donc (a, b, c) est un triplet pythagoricien.

- Soit $\delta = a \wedge b$. D'après la question 4a, on a $\delta = a \wedge c$. En particulier δ divise a et c , donc δ divise $c + a = 2p^2$ et $c - a = 2q^2$. Ainsi δ divise $2p^2 \wedge 2q^2 = 2(p \wedge q)^2 = 2$. De plus, comme p et q n'ont pas la même parité, a est impair. On en conclut que $\delta = 1$. Donc (a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif.
- Enfin, comme a est impair, (a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif rangé.

$(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ est un triplet pythagoricien primitif rangé.

8. Soit $\delta = a \wedge b$. Alors δ^4 divise a^4 et b^4 , donc $\delta^4 \mid (a^4 - b^4)$, donc $\delta^4 \mid c^2$. On en déduit $\delta^2 \mid c$ d'après la question 1. Ainsi, il existe $a', b', c' \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ et $c = \delta^2 c'$. Comme $a^4 - b^4 = c^2$, on a

$$\delta^4((a')^4 - (b')^4) = \delta^4(c')^2,$$

donc $(a')^4 - (b')^4 = (c')^2$ car $\delta > 0$. De plus,

$$\delta = a \wedge b = \delta a' \wedge \delta b',$$

donc $a' \wedge b' = 1$ et (a', b', c') est une solution primitive de (E) telle que $a' \leq a$.

(E) admet une solution primitive (a', b', c') telle que $a' \leq a$.

9. Supposons a pair. Comme $a \wedge b = 1$, b est impair. Rappelons qu'un carré est congru à 0 ou à 1 modulo 4. Ainsi $b^2 \equiv 1 \pmod{4}$ et $b^4 \equiv 1 \pmod{4}$. Comme $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$, on en déduit $c^2 \equiv 3 \pmod{4}$, ce qui est absurde. Donc a est impair.

a est impair.

10. Supposons b impair. Comme $(b^2)^2 + c^2 = (a^2)^2$, (b^2, c, a^2) est un triplet pythagoricien. De plus, $a^2 \wedge b^2 = (a \wedge b)^2 = 1$ et b^2 est impair. C'est donc un triplet pythagoricien primitif rangé. D'après la question 6, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que

$$b^2 = p^2 - q^2 \quad \text{et} \quad a^2 = p^2 + q^2.$$

On a alors $(ab)^2 = p^4 - q^4$, donc (p, q, ab) est une solution primitive de (E) . De plus, $p^2 < a^2$, donc $p < a$. Donc (E) admet une solution primitive $(a', b', c') = (p, q, ab)$ telle que $a' < a$.

Si b est impair, (E) admet une solution primitive (a', b', c') telle que $a' < a$.

11. (a) Supposons b pair. Comme $c^2 + (b^2)^2 = (a^2)^2$, $a^2 \wedge b^2 = (a \wedge b)^2 = 1$ et b^2 est pair, (c, b^2, a^2) est un triplet pythagoricien primitif rangé. D'après la question 6, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, de parité différente, tels que

$$b^2 = 2pq \quad \text{et} \quad a^2 = p^2 + q^2.$$

Quitte à échanger p et q , on peut supposer p impair et q pair.

Il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que p est impair, q est pair, $b^2 = 2pq$ et $a^2 = p^2 + q^2$.

- (b) Comme b et q sont pairs, il existe $b', q' \in \mathbb{N}^*$ tels que $b = 2b'$ et $q = 2q'$. On a alors $(b')^2 = pq'$. Comme p est premier avec q , p est premier avec q' . D'après la question 3, il existe $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = r^2$ et $q' = s^2$. Ainsi

$$a^2 = r^4 + 4s^4.$$

De plus, $r^2 \wedge 2s^2 = p \wedge q = 1$, donc $(r^2, 2s^2, c)$ est un triplet pythagoricien primitif rangé. D'après la question 6, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que

$$s^2 = \alpha\beta \quad \text{et} \quad r^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

D'après la question 3, il existe $t, u \in \mathbb{N}^*$ tels que $\alpha = t^2$ et $\beta = u^2$. Ainsi $r^2 = t^4 - u^4$. De plus, t et u sont premiers entre eux. Donc (t, u, r) est une solution primitive de (E) . Enfin,

$$t^4 < 4t^4u^4 = 4s^4 < a^2 < a^4,$$

donc $t < a$.

Si b est pair, (E) admet une solution primitive (a', b', c') telle que $a' < a$.

12. Supposons que (E) admette une solution dans $(\mathbb{N}^*)^3$. D'après la question 8, (E) admet des solutions primitives. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{N}^* \mid \exists b, c \in \mathbb{N}^*, a^4 - b^4 = c^2 \text{ et } a \wedge b = 1\}.$$

Par hypothèse, $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Elle admet donc un plus petit élément a_0 . Il existe alors $b_0, c_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que (a_0, b_0, c_0) est une solution primitive de (E) et toute solution primitive (a, b, c) de (E) vérifie $a_0 \leq a$. Cela contredit les résultats des questions 10 et 11.

(E) n'admet aucune solution dans $(\mathbb{N}^*)^3$.

13. Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $a^4 + b^4 = c^4$. On a alors

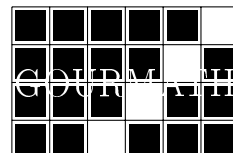
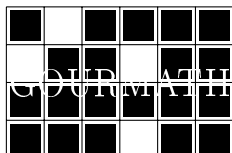
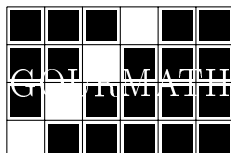
$$c^4 - a^4 = (b^2)^2.$$

Donc (c, a, b^2) est une solution de (E) appartenant à $(\mathbb{N}^*)^3$, ce qui est impossible.

L'équation $a^4 + b^4 = c^4$ n'admet aucune solution $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

Problème 1

La chocolaterie GourMath lance une nouvelle tablette de chocolat pour Noël. C'est une tablette de 4 lignes et 6 colonnes, donc 24 carrés au total. L'originalité est que cette tablette sera composée de 20 carreaux de chocolat noir et 4 carreaux de chocolat blanc, répartis indifféremment dans la tablette. (La présence d'un logo permet de reconnaître le sens dans lequel est tournée la tablette). Voici 3 exemples de tablettes différentes :



1. Combien y a-t-il de telles tablettes différentes ?
2. Combien d'entre elles ont exactement un coin blanc ?
3. Combien ont exactement un carré blanc sur chaque ligne ?
4. Combien ont au moins un carré blanc sur la première ligne ?
5. Combien ont leurs quatre carrés blancs sur quatre colonnes différentes ?
6. Combien ont leurs quatre carrés blancs sur quatre lignes et quatre colonnes différentes ?
7. Pour Pâques, la chocolaterie envisage de produire des tablettes carrées à n lignes et n colonnes avec n carrés blancs, à raison d'exactlyement un par ligne et par colonne. Combien peuvent-ils commercialiser de tablettes différentes ? Quelle taille de tablette envisager pour toucher une clientèle de mille gourmands avec des tablettes à tirage unique ?

Exercice 2

1. La tablette ayant un sens bien défini, chacune des 24 cases peut être identifiée par un numéro de 1 à 24, ou par deux coordonnées de 1 à 6 et de 1 à 4 ou encore par une lettre (1-D) et un nombre (1-6). Dans tous les cas, soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des 24 cases. Définir une tablette, c'est donner les 4 cases qui seront blanches (ou les 20 cases qui seront noires). Il s'agit donc d'une partie de $\mathcal{C}$ à quatre éléments (l'ensemble des quatre cases blanches).

Cela donne $N = \binom{24}{4}$ tablettes différentes (ou $\binom{24}{20}$ naturellement).

2. • Il y a 4 manières de choisir le coin qui sera blanc.
 • Pour chacune d'entre elles, il reste à placer 3 carrés blancs parmi les 20 autres. Il y a $\binom{20}{3}$ manières de faire cela (comme précédemment).

Cela donne un total de $4 \times \binom{20}{3}$ tablettes.

3. Une tablette avec un carré blanc sur chaque ligne est donnée par quatre numéros de colonnes correspondant à la position en colonne du carré blanc sur chaque ligne. Il s'agit d'une 4-liste de $\{1, \dots, 6\}$. Cela donne 6^4 tablettes. Formellement, repérons les cases par une lettre (1-D) et un nombre (1-6). L'application qui à une 4-liste (m, n, p, q) de $\{1, \dots, 6\}$ associe les quatre cases (Am, Bn, Cp, Dq) (par exemple $(4, 2, 4, 5) \mapsto \{A4, B2, C4, D5\}$) est une bijection entre l'ensemble recherché et l'ensemble des 4-listes (m, n, p, q) de $\{1, \dots, 6\}$.

4. Dénombrons le complémentaire, à savoir les tablettes sans carré blanc sur la première ligne. Cela revient simplement à sélectionner les quatre carrés blancs parmi les 18 cases du reste de la grille, soit $\binom{18}{4}$ possibilités.

Cela donne donc $N - \binom{18}{4} = \binom{24}{4} - \binom{18}{4}$ tablettes.

5. Une tablette est donnée par

- le choix des quatre colonnes concernées, ce qui donne $\binom{6}{4}$ possibilités,
- pour chacune de ces possibilités, le choix dans chaque colonne de la ligne occupée par le carré blanc. De manière analogue à la question précédente, cela donne 4^4 possibilités.

Finalement, on a $\binom{6}{4} \times 4^4 = 15 \times 4^4$ tablettes.

6. On raisonne comme pour la question 5. On doit donner exactement une case par ligne, repérée par son numéro de colonne. Cette fois cependant, les 4 numéros de colonnes doivent être différents. Cela revient à donner un 4-arrangement de $\{1, \dots, 6\}$.

Cela donne $A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 360$ tablettes.

7. De manière analogue à la question précédente, pour chaque ligne, il s'agit de donner un numéro de colonne, sans répétition possible. Cela revient à donner un n -arrangement des numéros de colonne

$\{1, \dots, n\}$, c'est à dire une permutation de $\{1, \dots, n\}$.

On a donc $n!$ tablettes.

Autre manière plus formelle de voir les choses : l'application qui à chaque numéro de ligne associe le numéro de la colonne où se situe le carré blanc dans cette ligne réalise une permutation de $\{1, \dots, n\}$.

Le premier entier n tel que $n! > 1000$ est $n = 7$ ($6! = 720$). Il faut donc prévoir des tablettes à

7 carreaux de côté (ce qui permettra d'éponger une éventuelle demande de plus de 5000 tablettes...MIAM!).

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n et on définit

$$\mathcal{N}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists p \in \mathbb{N}, M^p = 0_n\}.$$

Autrement dit $\mathcal{N}_n$ est l'ensemble des matrices carrées de taille n telles qu'une de leur puissance est la matrice nulle.

On notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de taille n .

1. Donner un exemple de matrice non nulle de $\mathcal{N}_2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in \mathcal{N}_3$.
3. Soit $A \in \mathcal{N}_n$. Montrer que $\lambda A \in \mathcal{N}_n$.
4. La question de la somme.
 - (a) Soit $A, B \in \mathcal{N}_n$ telles que $AB = BA$. Montrer que $A + B \in \mathcal{N}_n$.
 - (b) Ce résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas que A et B commutent ?
5. La question du produit.
 - (a) Soit $A, B \in \mathcal{N}_n$. Montrer que si $AB \in \mathcal{N}_n$, alors $BA \in \mathcal{N}_n$.
 - (b) Soit $A \in \mathcal{N}_n$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $AC = CA$, alors $AC \in \mathcal{N}_n$.
 - (c) Donner deux matrices $A, B \in \mathcal{N}_2$ telles que $AB \notin \mathcal{N}_2$.
6. Questions d'inversibilité : soit $A \in \mathcal{N}_n$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$.
 - (a) Montrer que A n'est pas inversible ?
 - (b) Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et déterminer $(I_n - A)^{-1}$.
 - (c) Que pensez-vous de l'inversibilité de la matrice $I_n + A$.
7. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, [J]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n et on définit

$$\mathcal{N}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists p \in \mathbb{N}, M^p = 0_n\}.$$

Autrement dit $\mathcal{N}_n$ est l'ensemble des matrices carrées de taille n telles qu'une de leurs puissances est la matrice nulle. On dit qu'elles sont **nilpotentes**.

On notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de taille n .

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_2$ (on vérifie que son carré est nul).

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. On vérifie que $A^3 = 0_3$, donc $A \in \mathcal{N}_3$.

3. Soit $A \in \mathcal{N}_n$, on dispose donc de $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$.

Alors $(\lambda A)^p = \lambda^p A^p = 0_n$ donc $\lambda A \in \mathcal{N}_n$.

4. La question de la somme.

(a) Soit $A, B \in \mathcal{N}_n$ telles que $AB = BA$.

On dispose de $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$ et de $q \in \mathbb{N}$ tel que $B^q = 0_n$.

Soit $m = \max(p, q)$. Alors d'après la formule du binôme de Newton (car $AB = BA$) :

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

Or la définition de m est telle que pour $0 \leq k \leq m$, soit $k \geq p$, soit $m - k \geq q$. Ainsi, soit $A^k = 0_n$, soit $B^{m-k} = 0_n$. Finalement $(A + B)^m = 0_n$, donc $A + B \in \mathcal{N}_n$.

(b) Contre-exemple : Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on vérifie que $A, B \in \mathcal{N}_2$ mais $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{N}_2$ ($\forall p \in \mathbb{N}^*, (AB)^p = AB$).

5. La question du produit.

(a) Soit $A, B \in \mathcal{N}_n$. Supposons $AB \in \mathcal{N}_n$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $(AB)^p = 0_n$.

Alors $(BA)^{p+1} = B(AB)^p A = B0_n A = 0_n$. Donc $BA \in \mathcal{N}_n$.

(b) Soit $A \in \mathcal{N}_n$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dispose de $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$.

Si $AC = CA$, alors $(AC)^p = A^p C^p = 0_n$ donc $AC \in \mathcal{N}_n$.

(c) Voir question 4b.

6. Questions d'inversibilité : soit $A \in \mathcal{N}_n$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$.

(a) Si A était inversible, on aurait $0_n = (A^{-1})^p A^p = I_n$, ce qui est absurde.

Donc A n'est pas inversible.

(b) On développe : $(I_n - A) \left(\sum_{i=0}^{p-1} A^i \right) = \sum_{i=0}^{p-1} A^i - \sum_{i=0}^{p-1} A^{i+1} = I_n - A^p$ par télescopage.

Donc $(I_n - A) \left(\sum_{i=0}^{p-1} A^i \right) = I_n$.

De même $\left(\sum_{i=0}^{p-1} A^i \right) (I_n - A) = I_n$ donc $I_n - A$ est inversible $(I_n - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{p-1} A^i$.

(c) Comme $-A \in \mathcal{N}_n$, le résultat précédent montre que $I_n + A$ est inversible. Et $(I_n + A)^{-1} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i A^i$.

7. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, [J]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On montre par récurrence (sur k)

que pour tout $k \in \mathbb{N}, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, [J^k]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, [A]_{i,j} = 0$ si $i \geq j$, 1 sinon¹.

On montre que $A = \sum_{i=1}^{n-1} J^i$.

On a vu dans la question précédente que $J^n = 0_n$, donc $J \in \mathcal{N}_n$, de même que ses puissances d'après 5b. De plus les puissances de J commutent ($J^k J^{k'} = J^{k'} J^k = J^{k+k'}$). Finalement d'après 3d (généralisée par récurrence si on veut), $A \in \mathcal{N}$.

1. La question initialement posée était plus compliquée et nécessiterait de montrer, comme on a fait pour J , que les diagonales de 0 progressent à chaque puissance.

Problème 1 Fonctions convexes**A Calcul préliminaire**

1. Soit $x < y < z$ trois nombres réels. On pose $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$. Montrer que $\lambda \in]0, 1[$ et que $y = \lambda x + (1-\lambda)z$.

B Le vif du sujet

Soit M_1 et M_2 d'abscisses respectives x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$ deux points de l'axe (Ox) . Tout point du segment $[M_1M_2]$ aura pour abscisse $x \in [x_1, x_2]$. D'après le calcul préliminaire, cette abscisse peut être exprimée comme $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ avec $\lambda \in [0, 1]$. Par exemple, pour $\lambda = 1$, on obtient le point M_1 , pour $\lambda = 0$, on obtient le point M_2 et pour $\lambda = 1/2$, on obtient le milieu du segment $[M_1M_2]$. Ainsi, on peut décrire le segment $[x_1, x_2]$ comme l'ensemble des $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ pour $\lambda \in [0, 1]$.

Définition 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** sur I lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

À l'inverse, on dit que f est **concave** lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

- Montrer que f est convexe si et seulement si l'arc de $\mathcal{C}_f$ compris entre M_1 d'abscisse x_1 et M_2 d'abscisse x_2 est situé en dessous du segment $[M_1M_2]$.
- Montrer que f est convexe et concave si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est une droite affine.
- Montrer que f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.
- Soit $n \geq 2$ un nombre entier. Montrer que si f est convexe, alors pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, on a

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

- (a) Soit f convexe et soit $\alpha < \beta < \gamma$. Soit λ tel que $\beta = \lambda\alpha + (1-\lambda)\gamma$ (voir résultat préliminaire). Montrer les trois inégalités suivantes.

$$f(\gamma) - f(\beta) \geq \lambda(f(\gamma) - f(\alpha)) \tag{3}$$

$$f(\beta) - f(\alpha) \leq (1-\lambda)(f(\gamma) - f(\alpha)) \tag{4}$$

$$\lambda(f(\beta) - f(\alpha)) \leq (1-\lambda)(f(\gamma) - f(\beta)) \tag{5}$$

(b) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction

$$\begin{aligned}\Phi_a : I \setminus \{a\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\end{aligned}$$

est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

7. (a) Soit P , Q et R trois assertions. Montrer que si on a $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow P \end{cases}$, alors on a P , Q et R équivalentes

entre elles.

(b) Rappeler l'équation de la tangente en a à la courbe $\mathcal{C}_f$.

(c) On suppose que f est dérivable. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) f est convexe.

(ii) f' est croissante.

(iii) La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.

8. Supposons f deux fois dérivable (*i.e.* dérivable et telle que f' soit dérivable). Montrer que f est convexe si et seulement si f'' est positive.

Problème 1 Fonctions convexes**A Calcul préliminaire**

1. Soit $x < y < z$ trois nombres réels. On pose $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$.

$y > x$ donc $z - y < z - x$. Et $z - x > 0$. Donc $\frac{z-y}{z-x} < 1$. De plus $z - y > 0$ donc $\frac{z-y}{z-x} > 0$.

$$\text{Et } \lambda x + (1 - \lambda)z = \frac{z-y}{z-x}x + \left(1 - \frac{z-y}{z-x}\right)z = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z = \frac{zx - yx + yz - xz}{z-x} = y.$$

B Le vif du sujet

On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

2. Les coordonnées de M_1 et M_2 sont $M_1(x_1, f(x_1))$ et $M_2(x_2, f(x_2))$.

Pour tout $x \in [x_1, x_2]$, on écrit $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ avec $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$. Alors

- le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées $(x, f(x))$
- si on note (x, y) les coordonnées du point d'abscisse x du segment $[M_1M_2]$, par une relation de

Thalès, on a $\lambda = \frac{f(x_2) - y}{f(x_2) - f(x_1)}$ et donc $y = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$.

Ainsi : f est convexe si et seulement si $f(x) \leq y$,

si et seulement si l'arc de $\mathcal{C}_f$ compris entre M_1 et M_2 est situé sous le segment $[M_1M_2]$.

3. $\Rightarrow$ Supposons f est convexe et concave.

Pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, considérons les points M_1 et M_2 d'abscisses $-n$ et n . L'arc de $\mathcal{C}_f$ qu'ils encadrent est en dessous et au-dessus du segment $[M_1M_2]$ donc l'arc de la courbe et le segment sont confondus. Pour tout n la partie de la courbe comprise entre $x = -n$ et $x = n$ est rectiligne, donc $\mathcal{C}_f$ est une droite.

$\Leftarrow$ Supposons que f est affine. Alors $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$.

Alors $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = a(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + b$

$$\text{et } \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = \lambda(ax_1 + b) + (1 - \lambda)(ax_2 + b) = a(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + \underbrace{b(\lambda + 1 - \lambda)}_b.$$

Ceci montre que $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$.

4. f est concave $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ et $\lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$
 $\Leftrightarrow -f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq -(\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2))$
 $\Leftrightarrow -f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda(-f(x_1)) + (1 - \lambda)(-f(x_2))$
 $\Leftrightarrow -f$ est convexe.

5. Supposons f convexe. Procédons par récurrence pour montrer pour tout $n \geq 2$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\text{pour tous } x_1, \dots, x_n \in I \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \text{ on a } f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Init. pour $n = 2$, c'est exactement la définition de la convexité (avec $\lambda = \lambda_1$ et donc $1 - \lambda = \lambda_2$).

Hér. Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Soit $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$.

- Posons, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$.

Ainsi, $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$. Donc d'après l'hypothèse de récurrence, $f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i)$.

Si on note $X = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$, cela s'écrit $f(X) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i)$.

Par ailleurs, soit $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$; alors $1 - \lambda = \lambda_{n+1}$.

On applique la définition de la convexité entre X et x_{n+1} :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + (1 - \lambda)x_{n+1}) &\leq \lambda f(X) + (1 - \lambda)f(x_{n+1}) \\ &\leq \lambda \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)}.$$

6. (a) Soit $\alpha < \beta < \gamma$. D'après le résultat préliminaire, en posant $\lambda = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$, $\beta = \lambda\alpha + (1 - \lambda)\gamma$. Par

convexité, $f(\beta) \leq \lambda f(\alpha) + (1 - \lambda)f(\gamma)$ (*)

et donc $f(\beta) - f(\gamma) \leq \lambda f(\alpha) - \lambda f(\gamma)$.

Finalement, $\boxed{f(\gamma) - f(\beta) \geq \lambda(f(\gamma) - f(\alpha))}$.

De (*), on peut aussi obtenir $\boxed{f(\beta) - f(\alpha) \leq (1 - \lambda)(f(\gamma) - f(\alpha))}$.

De (*), on tire aussi $(\lambda + (1 - \lambda))f(\beta) \leq \lambda f(\alpha) + (1 - \lambda)f(\gamma)$

et donc $\boxed{\lambda(f(\beta) - f(\alpha)) \leq (1 - \lambda)(f(\gamma) - f(\beta))}$.

- (b) Soit $a \in I$.

$\Rightarrow$ Supposons f convexe. Soit x, y dans $I \setminus \{a\}$ tels que $x < y$.

1^{er} cas : $x < y < a$.

D'après l'inégalité (1), avec $\lambda = \frac{a - y}{a - x}$, on a $f(a) - f(y) \geq \lambda(f(a) - f(x))$,

soit $f(a) - f(y) \geq \frac{a - y}{a - x}(f(a) - f(x))$.

Finalement, $\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, c'est à dire $\boxed{\Phi_a(x) \leq \Phi_a(y)}$.

2^e cas : $x < a < y$.

D'après l'inégalité (3), avec $\lambda = \frac{y - a}{y - x}$, on a $\lambda(f(a) - f(x)) \leq (1 - \lambda)(f(y) - f(a))$,

soit $\frac{y - a}{y - x}(f(a) - f(x)) \leq \frac{a - x}{y - x}(f(y) - f(a))$.

Finalement, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$, c'est à dire $\boxed{\Phi_a(x) \leq \Phi_a(y)}$.

3^e cas : $a < x < y$.

D'après l'inégalité (2), avec $\lambda = \frac{y-x}{y-a}$, on a $f(x) - f(a) \leq (1-\lambda)(f(y) - f(a))$,

soit $f(x) - f(a) \leq \frac{x-a}{y-a}(f(y) - f(a))$.

Finalement, $\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y-a}$, c'est à dire $\boxed{\Phi_a(x) \leq \Phi_a(y)}$.

Ceci montre que $\boxed{\Phi_a \text{ est croissante}}$

$\Leftarrow$ Supposons Φ_a croissante pour tout $a \in I$.

Soit $x_1, x_2 \in I$. On suppose, quitte à les renuméroter, que $x_1 < x_2$. Soit $\lambda \in [0, 1]$. On pose $t = \lambda x + (1-\lambda)y \in [x, y]$, ainsi $\lambda = \frac{y-t}{y-x}$.

La croissance de la fonction Φ_y donne $\Phi_y(x) \leq \Phi_y(t)$, d'où $\frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leq \frac{f(t) - f(y)}{t-y}$, soit $\lambda(f(x) - f(y)) \geq f(t) - f(y)$. D'où $f(t) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, ce qui montre que $\boxed{f \text{ est convexe}}$.

7. (a) Supposons qu'on a $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow P \end{cases}$.

On a $P \Rightarrow Q$ et comme $Q \Rightarrow R$ et $R \Rightarrow P$, on a aussi $Q \Rightarrow P$.

Ceci montre $P \Leftrightarrow Q$ et on montre de même que $Q \Leftrightarrow R$ et $R \Leftrightarrow P$.

Ainsi $\boxed{P, Q \text{ et } R \text{ sont équivalentes}}$.

- (b) La tangente en a à la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

- (c) On suppose que f est dérivable.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Supposons f convexe. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Pour tout $x \in I$, on a, par croissance de Φ_x , $\frac{f(a) - f(x)}{a-x} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b-x}$. Par passage à la limite $x \rightarrow a$, cela donne $f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

On a aussi, en faisant tendre x vers b , $\frac{f(a) - f(b)}{a-b} \leq f'(b)$.

Ces deux inégalités montrent que $f'(a) \leq f'(b)$, ce qui montre que $\boxed{f' \text{ est croissante}}$.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ On suppose f' croissante et pour tout a , on note (T_a) la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a . Étudions $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$.
 g est dérivable et pour tout $x \in I$, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Or f' est croissante, d'où le tableau de variations suivant.

x	a
$g'(x)$	$\begin{array}{ccc} - & 0 & + \end{array}$
$g(x)$	$\begin{array}{ccc} \swarrow & 0 & \searrow \end{array}$

g est donc toujours positive ou nulle et donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } (T_a)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) On suppose que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.

Soit $x_1, x_2 \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$.

On note M_1 le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_1 et M_2 le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_2 .

Soit $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et P le point de $[M_1M_2]$ d'abscisse x .

Ainsi $x_P = x$ et $y_P = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$.

Or la courbe est au-dessus de la tangente en M . D'où
$$\begin{cases} f(x_1) \geq f'(x)(x_1 - x) + f(x) \\ f(x_2) \geq f'(x)(x_2 - x) + f(x) \end{cases}.$$

Donc
$$\begin{aligned} y_P &\geq \lambda[f'(x)(x_1 - x) + f(x)] + (1 - \lambda)[f'(x)(x_2 - x) + f(x)] \\ &\geq f(x) + f'(x)(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x) \end{aligned}$$

Comme $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, on a finalement $y_P = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(x)$ ce qui montre que f est convexe.

8. Supposons f deux fois dérivable. Alors f' est dérivable et donc f' est croissante si et seulement si f'' est positive.

Donc f est convexe si et seulement si f'' est positive.

Problème 1

L'objet de ce problème est l'étude d'une famille de polynômes. On les utilisera en partie C pour évaluer la (très célèbre) limite d'une suite introduite en partie B.

A Une famille de polynômes

On définit la suite de polynômes (T_n) de la manière suivante :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. Vérifier que vous obtenez bien $T_2 = 2X^2 - 1$ puis exprimer T_3 et T_4 .
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de T_n est n et son coefficient dominant est 2^{n-1} .
 (b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $a_n = T_n(0)$.
 (c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $b_n = T_n(1)$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, T_n(\cos(t)) = \cos(nt). \quad (\text{E})$$

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est l'unique polynôme P vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(\cos(t)) = \cos(nt).$$

- (c) Montrer que pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, $T_k \circ T_n = T_n \circ T_k = T_{nk}$.
 (d) En déduire l'expression du polynôme T_6 .
4. (a) Retrouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les valeurs de a_n et b_n à l'aide de la relation (E).
 (b) À l'aide de la relation (E), déterminer la valeur de $T'_n(1)$.
 5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

En déduire, en fonction de n , la parité du polynôme T_n .

6. Dans cette question, on considère $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, soit $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$. Montrer que $T_n(x_k) = 0$.
 - (b) En déduire l'ensemble des racines de T_n et justifier qu'elles sont toutes comprises dans l'intervalle $[-1, 1]$.
 - (c) Donner la factorisation de T_n en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
 - (d) Déterminer $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$.
 - (e) Si $T_n = \sum_{k=0}^n c_k X^k$, justifier que $\sum_{k=1}^n x_k = -c_{n-1}$. En déduire la valeur de cette somme.

B Deux sommes

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.
- (a) Déterminer a et b tels que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
- (c) En déduire que (S_n) est une suite convergente. On note ℓ sa limite.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$.
- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_{2n} en fonction de S_n et I_n . Vérifier cette formule avec $n = 3$.
- (b) Montrer que (I_n) est convergente. On note ℓ' sa limite. Donner une relation entre ℓ et ℓ' .

C Calcul de limite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on rappelle la notation $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$.

9. Une formule générale de dérivation : soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions dérivables. Montrer que

$$\left(\prod_{i=1}^n f_i\right)' = \sum_{k=1}^n \left(f_k' \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} f_i\right).$$

10. Soit I un intervalle ne contenant aucun des x_k . Montrer que

$$\forall x \in I, \quad \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k}.$$

11. En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)} = n^2.$$

12. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $1 - \cos(t) = 2 \sin^2(t/2)$.
- (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\tan^2(t)$ à l'aide de la seule fonction $\sin^2$ et des opérations usuelles.
- (c) En déduire les valeurs de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)}$.
13. (a) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, montrer que $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.
- (b) Donner alors un encadrement de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)^2}$ puis de la somme I_n définie en partie B.
- (c) En déduire la valeur de ℓ' .
- (d) Montrer finalement que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.

Problème 1

L'objet de ce problème est l'étude des polynômes de Tchebychev². On les utilisera en partie C pour évaluer la (très célèbre) valeur, solution du problème connu sous le nom de problème de Bâle (ville de Jacques Bernoulli et d'Euler). Cependant les questions de la partie B sont largement indépendantes des autres parties.

A Une famille de polynômes

1. On a alors $T_2 = 2X^2 - 1$ puis $T_3 = 2X(2X^2 - 1) - x = \boxed{4X^3 - 3X}$ et $T_4 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = \boxed{8X^4 - 8X^2 + 1}$.
2. (a) Procédons par récurrence double. La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.
 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour T_n et T_{n+1} .
 On a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Le degré de $2XT_{n+1}$ est $n + 2$ et celui de T_n est n . Comme ces deux polynômes sont de degrés différents, leur somme est de $\boxed{\text{degré } n + 2}$ et le coefficient dominant est celui de $2XT_{n+1}$.
 De plus si l'on écrit $T_{n+1} = 2^n X^{n+1} + R$ par hypothèse de récurrence (avec $\deg R \leq n$), alors $2XT_{n+1} = 2^{n+1} X^{n+2} + 2XR$, avec $\deg(2XR) \leq n + 1$. Donc $\boxed{\text{le coefficient dominant de } T_{n+2} \text{ est } 2^{n+1}}$.
 (b) En évaluant en 0 la relation de récurrence, on a $T_{n+2}(0) = T_n(0)$. Ainsi, pour tout n pair, en posant $n = 2k$, $T_{2k}(0) = (-1)^k T_0(0) = (-1)^k$ et pour tout n impair, $T_n(0) = \pm T_1(0) = 0$.
 Autrement dit, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k} = (-1)^k \text{ et } a_{2k+1} = 0}$.
 (c) En évaluant en 0 la relation de récurrence, on obtient $b_{n+2} = 2b_{n+1} - b_n$, avec $b_0 = 1$ et $b_1 = 1$.
 Puis on montre, soit en étudiant une suite récurrente à 2 termes, soit par récurrence double, que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 1}$.
3. (a) Montrons cette relation par récurrence double.
Pour $n = 0$: $\forall t \in \mathbb{R}, T_0(\cos(t)) = 1 = \cos(0t)$.
Pour $n = 1$: $\forall t \in \mathbb{R}, T_1(\cos(t)) = \cos(t) = \cos(1t)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\forall t \in \mathbb{R}, T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ et $T_{n+1}(\cos(t)) = \cos((n+1)t)$.
 D'après la relation de récurrence, $T_{n+2}(\cos(t)) = 2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos(nt)$.
 Or $2\cos(t)\cos((n+1)t) = \cos((n+2)t) + \cos(nt)$ d'après la question précédente (et en utilisant la parité ou la commutativité du produit).
 D'où la propriété au rang $n + 2$.
 Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{T_n(\cos(t)) = \cos(nt)}. \quad (\text{E})$$
- (b) On vient de voir que T_n vérifie cette relation, reste à montrer l'unicité.
 Supposons qu'on ait un polynôme P vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, P(\cos(t)) = \cos(nt)$.
 Alors $\forall t \in \mathbb{R}, P(\cos(t)) = T_n(\cos(t))$, i.e. $(P - T_n)(\cos(t)) = 0$.
 Pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(t)$. Donc $(P - T_n)(x) = (P - T_n)(\cos(t)) = 0$.

2. Pafnouti Tchebychev était un mathématicien russe du XIX^e siècle. On lui doit de nombreuses contributions, en théorie des probabilités et en théorie des nombres. Il est notamment l'initiateur de travaux ayant mené, avec Liapounov et Markov puis Kolmogorov, aux probabilités telles qu'on les connaît aujourd'hui

Ainsi tous les réels de $[-1, 1]$ sont racines du polynôme $P - T_n$. Donc $P - T_n$ est le polynôme nul et $\boxed{P = T_n}$.

- (c) Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Même principe : pour tout $x \in [-1, 1]$, on écrit $x = \cos(t)$.

$$T_n \circ T_k(x) = T_n(\cos(kt)) = \cos(nkt) = T_{nk}(x).$$

Les polynômes $T_n \circ T_k$ et T_{nk} coïncident sur $[-1, 1]$ donc sont égaux (si on veut refaire le raisonnement : leur différence possède une infinité de racines).

Comme $T_n \circ T_k = T_{nk} = T_{kn} = T_k \circ T_n$, on a bien $\boxed{T_k \circ T_n = T_n \circ T_k = T_{nk}}$.

(d) $T_6 = T_2 \circ T_3 = 2(4X^3 - 3X)^2 - 1 = \boxed{32X^6 - 48X^4 + 18X^2 - 1}$.

4. (a) On applique la relation (E) avec, par exemple, $t = \frac{\pi}{2}$. Cela donne $T_n(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$. On retrouve

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k} = (-1)^k \text{ et } a_{2k+1} = 0}.$$

Avec $t = 0$: $b_n = T_n(1) = \cos(n \times 0) = \boxed{1}$.

- (b) Soit $x \in [0, 1]$. Posons $x = \cos(t)$ avec $t \in [0, \pi/2]$.

Alors $\frac{T_n(x) - T_n(1)}{x - 1} = \frac{T_n(\cos(t)) - 1}{\cos(t) - 1} = \frac{\cos(nt) - 1}{\cos(t) - 1}$. On va utiliser des encadrements déjà étudiés pour les fonctions $\cos$ et $g : t \mapsto \cos(nt)$, dérivables en 0. On les montre en étudiant des différences ou à l'aide de formules de Taylor, à revoir après le chapitre concerné.

$$-\frac{t^2}{2} \leq \cos(t) - 1 \leq -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} \text{ et donc } -\frac{n^2 t^2}{2} \leq \cos(nt) - 1 \leq -\frac{n^2 t^2}{2} + \frac{n^4 t^4}{24}.$$

$$\text{Ceci montre } \frac{\cos(t) - 1}{t^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{\cos(nt) - 1}{t^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -\frac{n^2}{2}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{\cos(nt) - 1}{\cos(t) - 1} = \frac{\cos(nt) - 1}{t^2} \frac{t^2}{\cos(t) - 1} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} n^2.$$

Par composition de limites, $\frac{T_n(x) - 1}{x - 1} \xrightarrow[x \rightarrow 1]{} n^2$, donc $\boxed{T'_n(1) = n^2}$.

5. **M1** On procède par récurrence double. Les initialisations sont élémentaires.

Pour $n \in \mathbb{N}$, si l'on suppose la propriété vraie pour T_n et T_{n+1} , alors :

$$T_{n+2}(-x) = -2xT_{n+1}(-x) - T_n(-x) = -(-1)^{n+1}2xT_{n+1}(x) - (-1)^n T_n(x) \text{ par H.R.}$$

$$\text{Puis } T_{n+2}(-x) = (-1)^{n+2}(2xT_{n+1}(x) - T_n(x)) = (-1)^{n+2}T_{n+2}(x).$$

$$\text{D'où } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)}.$$

M2 Soit $x \in [-1, 1]$. On écrit $x = \cos(t)$.

$$T_n(-x) = T_n(-\cos(t)) = T_n(\cos(t + \pi)) = \cos(nt + n\pi) \text{ d'après (E).}$$

$$\text{Or } \cos(nt + n\pi) = (-1)^n \cos(nt), \text{ donc } T_n(-x) = (-1)^n \cos(nt) = (-1)^n T_n(x).$$

Ceci montre que les polynômes $T_n(-x)$ et $(-1)^n T_n(x)$ coïncident sur $[-1, 1]$, donc ils coïncident sur $\mathbb{R}$ (leur différence possède une infinité de racines).

Ainsi $\boxed{T_n \text{ est pair pour } n \text{ pair et impair pour } n \text{ impair}}$.

6. Dans cette question, on considère $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, soit $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$.

$$T_n(x_k) = \cos\left(n\frac{2k-1}{2n}\pi\right) = \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{0}.$$

- (b) Les x_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont des valeurs différentes (par monotonie/injectivité de la fonction $\cos$ sur $[0, \pi]$). Cela donne donc n racines distinctes de T_n , qui est de degré n . Il n'y en a donc pas d'autres, elles sont toutes simples et comprises (comme valeurs du $\cos$) dans l'intervalle $[-1, 1]$.

- (c) En n'oubliant pas le coefficient dominant, on obtient $T_n = 2^{n+1} \prod_{k=1}^n (x - x_k)$. Chaque facteur est bien irréductible car de degré 1.
- (d) Le coefficient constant de T_n est, en développant, $(-1)^n 2^{n+1} \prod_{k=1}^n x_k$. Par ailleurs, on l'obtient comme $T_n(0)$.
Ainsi, $\prod_{k=1}^n x_k = \boxed{(-1)^n \frac{a_n}{2^{n+1}}}$. On laisse le soin au lecteur d'aller rechercher l'expression de a_n dans les premières questions. On vérifie que quand n est impair, $x_{\frac{n+1}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et le produit est alors bien nul.
- (e) Si $T_n = \sum_{k=0}^n c_k x^k$, on obtient $\sum_{k=1}^n x_k = -c_{n-1}$ en identifiant dans les deux écritures le coefficient de x^{n-1} . Le polynôme T_n étant de la parité de n , il n'a pas de termes de parité opposée, donc en particulier pas de terme de degré $n-1$. Ainsi $c_{n-1} = 0$ et $\boxed{\text{la somme est nulle}}$.

B Deux sommes

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.
- (a) $\boxed{\frac{1}{k(k-1)} = \frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1}}$. Par télescopage, $\boxed{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout k , on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.
 $S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$. Donc $\boxed{S_n \leq 2 - \frac{1}{n}}$.
- (c) D'une part (S_n) est une suite croissante car $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ pour tout n .
D'autre part (S_n) est majorée par 2 d'après ce qui précède.
Donc $\boxed{(S_n) \text{ est une suite convergente}}$. On note ℓ sa limite.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$.
- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En séparant termes pairs et impairs, on a $S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2}$.
Or $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} S_n$.
Donc $\boxed{S_{2n} = I_n + \frac{1}{4} S_n}$.
Avec $n = 3$: $S_6 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} = \underbrace{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}}_{I_3} + \frac{1}{4} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)}_{S_3}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $I_n = S_{2n} - \frac{1}{4}S_n$, ce qui en fait une suite convergente. On note ℓ' sa limite.

On a alors $\ell' = \frac{3}{4}\ell$.

C Calcul de limite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on rappelle la notation $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$.

9. Une formule générale de dérivation : soit $f_1, \dots, f_n$ des fonctions dérivables. On montre par récurrence que

$$\left(\prod_{i=1}^n f_i\right)' = \sum_{k=1}^n \left(f_k' \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} f_i\right).$$

La formule est vraie pour $n = 1, n = 2$.

Si on la suppose vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit $\prod_{i=1}^{n+1} f_i = \left(\prod_{i=1}^n f_i\right) \times f_{n+1}$ et on applique la formule de dérivée d'un produit de 2 fonctions puis l'hypothèse de récurrence.

Pour 3 fonctions : $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

10. Soit I un intervalle ne contenant aucun des x_k . On a $T_n = 2^{n+1} \prod_{k=1}^n (x - x_k)$. On applique la formule

précédente avec $f_i : x - x_i$. $T_n'(x) = \sum_{k=1}^n \left(1 \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (x - x_i)\right)$.

Le quotient donne alors $\forall x \in I, \quad \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k}$.

11. On évalue cette égalité en $x = 1$ pour obtenir $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)} = n^2$.

12. (a) La formule $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ donne $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. $\tan^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t}$.

(c) D'après 11, $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)} = n^2$, d'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)} = 2n^2$.

Et 12b donne $\frac{1}{\tan^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t} - 1$. D'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)} = 2n^2 - n$.

13. (a) $\sin$ et $\tan$ sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $\sin$ est concave car $\sin'' = -\sin$ est négative sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\tan$ est convexe. Donc par comparaison avec leur tangente en 0, on a $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

Remarque. Sans convexité, on peut aussi écrire une IAF en 0 voire faire une étude de la différence (plus long).

(b) Cela donne $\frac{1}{\tan^2 t} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{\sin^2 t}$.

Donc $2n^2 - n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{2k-1}{4n}\pi\right)^2} \leq 2n^2$.

Ainsi en divisant par $\frac{16n^2}{\pi^2}$, $\frac{2n^2 - n}{16n^2} \pi^2 \leq I_n \leq \frac{\pi^2}{8}$.

(c) D'après le théorème des gendarmes, $\ell' = \frac{\pi^2}{8}$.

(d) Finalement, $\ell = \frac{4}{3}\ell'$ donc $\ell = \frac{\pi^2}{6}$.

Problème 1

Dans ce problème, on se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. On définit l'application

$$f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], \quad P \mapsto P'' - XP'.$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
 (b) i. Soit $k \in \mathbb{N}$. Expliciter $f(X^k)$.
 ii. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner le degré et le coefficient dominant de $f(P)$ en fonction de ceux de P .
 (c) Déterminer le noyau de l'application f .
 (d) L'application f est-elle surjective ? On ne demande pas de déterminer $\text{Im}(f)$.
2. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit **pair** si et seulement si ses coefficients de degré impair sont nuls. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit **impair** si et seulement si ses coefficients de degré pair sont nuls. On note $\mathcal{P}_X$ l'ensemble des polynômes pairs et $\mathcal{I}_X$ l'ensemble des polynômes impairs.

(a) Montrer que

$$P(-X) = P(X) \iff P \in \mathcal{P}_X.$$

(b) Montrer que

$$P(-X) = -P(X) \iff P \in \mathcal{I}_X.$$

- (c) Montrer que $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{I}_X$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.
- (d) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{I}_X$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
- (e) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{I}_X$ sont stables par f .

3. On considère la restriction de f au sous-espace vectoriel $\mathcal{I}_X$, notée g , définie par

$$g : \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{I}_X, \quad P \mapsto P'' - XP'.$$

- (a) Justifier que g est bien définie et que c'est un endomorphisme de $\mathcal{I}_X$.
- (b) Déterminer le noyau de g .
- (c) Montrer que g est surjective.
- (d) Justifier que g est un automorphisme de $\mathcal{I}_X$. Déterminer $g^{-1}(X)$, $g^{-1}(X^3)$ et $g^{-1}(X^5)$.
4. On cherche dans cette question à expliciter l'image de l'application f . On considère une suite de réels $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on définit l'application

$$\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k P^{(k)}(0).$$

- (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Justifier que le réel $\varphi(P)$ est bien défini.
- (b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi(P)$ en fonction des coefficients de P .
- (c) Montrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- (d) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
 i. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée k -ième de $f(P)$ en fonction des dérivées successives de P .
 ii. En déduire une expression de $\varphi \circ f(P)$.

iii. Montrer que

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\varphi) \iff \forall i \in \mathbb{N}, \varphi \circ f(X^i) = 0.$$

iv. Montrer que la condition précédente se traduit par une relation de récurrence portant sur la suite (λ_k) que l'on explicitera.

v. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ contient $\text{Im}(f)$ si et seulement si

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{2i+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{2i} = \frac{\lambda_0}{2^i i!}.$$

(e) En déduire que

$$\text{Im}(f) = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0 \right. \right\}.$$

Problème 1

On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et l'on considère l'application

$$f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], \quad P \mapsto P'' - XP'.$$

1. (a) Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)'' - X(\lambda P + Q)' = \lambda P'' + Q'' - X(\lambda P' + Q') = \lambda f(P) + f(Q).$$

Ainsi, f est une application linéaire, donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

- (b) i. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{Si } k = 0, f(1) = 0.$$

$$\text{Si } k = 1, f(X) = -X.$$

$$\text{Si } k \geq 2,$$

$$f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - kX^k.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - kX^k.$$

- ii. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul de degré n et

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, \quad a_n \neq 0.$$

Par linéarité,

$$f(P) = \sum_{k=0}^n a_k f(X^k) = \sum_{k=0}^n a_k (k(k-1)X^{k-2} - kX^k).$$

$$\text{Si } n = 0, f(P) = 0.$$

Si $n \geq 1$, le terme dominant de $f(P)$ est $-na_n X^n$, donc

$$\deg(f(P)) = n.$$

- (c) Soit $P \in \text{Ker}(f)$. Alors $P'' - XP' = 0$.

D'après la question précédente, cela implique que P est constant. Ainsi

$$\text{Ker}(f) = \mathbb{R}_0[X].$$

- (d) Les polynômes constants non nuls n'ont pas d'antécédent par f . Donc f n'est pas surjective.

2. On introduit

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P \text{ est pair}\}, \quad \mathcal{I} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P \text{ est impair}\}.$$

- (a) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

On a

$$P(-X) = \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k X^k.$$

Donc

$$P(-X) = P(X) \iff a_k(-1)^k = a_k \iff a_k = 0 \text{ si } k \text{ impair.}$$

Ainsi

$$P(-X) = P(X) \iff P \in \mathcal{P}.$$

(b) De même,

$$P(-X) = -P(X) \iff a_k(-1)^k = -a_k \iff a_k = 0 \text{ si } k \text{ pair.}$$

Donc

$$P(-X) = -P(X) \iff P \in \mathcal{I}.$$

(c) Les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont clairement stables par combinaison linéaire, donc ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.

(d) On a $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$.

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(X) = \frac{1}{2}(P(X) + P(-X)) + \frac{1}{2}(P(X) - P(-X)).$$

Le premier terme est pair et le second impair. Ainsi

$$\mathbb{R}[X] = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}.$$

(e) Soit $P \in \mathcal{P}$. Alors

$$P(-X) = P(X) \Rightarrow P'(-X) = -P'(X), \quad P''(-X) = P''(X).$$

Donc

$$f(P)(-X) = P''(-X) + XP'(-X) = P''(X) - XP'(X) = f(P)(X).$$

Ainsi $f(P) \in \mathcal{P}$.

De même, si $P \in \mathcal{I}$,

$$P'(-X) = P'(X), \quad P''(-X) = -P''(X),$$

et donc

$$f(P)(-X) = -f(P)(X).$$

Ainsi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont stables par f .

3. On note g la restriction de f à $\mathcal{I}$.

(a) D'après la question précédente, $\mathcal{I}$ est stable par f . Donc g est bien définie et linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathcal{I}$.

(b) Si $P \in \text{Ker}(g)$, alors $f(P) = 0$ et $P \in \mathcal{I}$. Le seul polynôme constant impair étant nul,

$$\text{Ker}(g) = \{0\}.$$

(c) Montrons que tout monôme impair appartient à $\text{Im}(g)$.

On vérifie que $g(-X) = X$.

On raisonne ensuite par récurrence pour montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^{2n+1} \in \text{Im}(g).$$

- (d) Comme $\mathcal{I}$ admet pour base les monômes impairs, g est surjective. Étant injective, g est un automorphisme.

4. On introduit une suite (λ_k) et la forme linéaire

$$\varphi(P) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k P^{(k)}(0).$$

- (a) Cette somme est finie car P est un polynôme.

- (b) Si $P = \sum a_k X^k$, alors

$$P^{(k)}(0) = k! a_k.$$

- (c) Il est immédiat que φ est linéaire.

- (d) On montre que

$$f(P)^{(k)}(0) = P^{(k+2)}(0) - kP^{(k)}(0).$$

On en déduit

$$\varphi(f(P)) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k (P^{(k+2)}(0) - kP^{(k)}(0)).$$

On vérifie ensuite que

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\varphi) \iff \forall i \in \mathbb{N}, \quad \varphi(f(X^i)) = 0.$$

Cela conduit à la relation

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_i = \frac{\lambda_{i-2}}{i}.$$

On en déduit

$$\lambda_{2i+1} = 0, \quad \lambda_{2i} = \frac{\lambda_0}{2^i i!}.$$

- (e) En choisissant $\lambda_0 = 1$, on obtient

$$\text{Im}(f) = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] ; \sum_{k \geq 0} \frac{P^{(2k)}(0)}{2^k k!} = 0 \right\}.$$

Problème 1

Dans tout problème, on note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel usuel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $g \in E$. L'objectif de ce problème est d'étudier l'équation intégrale suivante, d'inconnue $f \in E$.

$$(\mathcal{E}) : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) - \int_0^x (x-t)f(t) dt = g(x).$$

Pour tout $f \in E$, on note $A(f)$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt.$$

On note aussi $D_2 : E \rightarrow E$, l'application linéaire définie par $\forall f \in E, D_2(f) = f''$.

A Étude de A

1. Soit $f \in E$.
 - (a) Montrer que $A(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
 - (b) Calculer $A(f)'(x)$ et $A(f)''(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2.
 - (a) Montrer que A est un endomorphisme de E .
 - (b) Montrer que A est injective.
3. On pose $p = A \circ D_2 \in \mathcal{L}(E)$.
 - (a) Montrer que p est un projecteur.
 - (b) Déterminer $\text{Ker } p$.
4.
 - (a) Soit $f \in E$. Justifier l'existence de $u \in E$ tel que $u'' = f$, $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$.
 - (b) En déduire que $\text{Im } p = \text{Im } A$.
5.
 - (a) Soit $f \in E$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, p(f)(x) = f(x) - f(0) - xf'(0)$.
 - (b) En déduire $\text{Im } A$.

B Étude des solutions de $(\mathcal{E})$

Soit $g \in E$. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{F}) : y'' - y = g(x)$, d'inconnue $y \in E$ et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{F})$.

6. Montrer que $(\mathcal{F})$ admet une unique solution $h \in E$ vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$.
7.
 - (a) Soit $u \in E$ tel que $u(0) = u'(0) = 0$. Montrer que u est solution de $(\mathcal{F}) \Leftrightarrow u''$ est solution de $(\mathcal{E})$.
 - (b) En déduire que $(\mathcal{E})$ admet une unique solution $f \in E$ dont on donnera une expression à l'aide de h .
8. Déterminer la solution $f \in E$ de $(\mathcal{E})$ lorsque $g = \exp$.

Problème 1**A Étude de A**

1. (a) On a $\forall x \in \mathbb{R}, A(f) = xF_1(x) - F_2(x)$, avec

$$F_1 : x \mapsto \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad F_2 : x \mapsto \int_0^x tf(t) dt.$$

Ainsi F_1 est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. F_1 est dérivable et sa dérivée, f , est $\mathcal{C}^\infty$ donc F_1 est $\mathcal{C}^\infty$. De même F_2 est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto xf(x)$ qui est $\mathcal{C}^\infty$. Donc F_2 est $\mathcal{C}^\infty$. Finalement, $A(f)$ est $\mathcal{C}^\infty$ en tant que produit et combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

$$\boxed{A(f) \in E}.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En reprenant les notations de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} A(f)'(x) &= F_1(x) + xF_1'(x) + F_2'(x) \\ &= \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{A(f)'(x) = \int_0^x f(t) dt}.$$

On remarque que $A(f)'$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on a

$$\boxed{A(f)''(x) = f(x)}.$$

2. (a) On a déjà montré que $\forall f \in E, A(f) \in E$. Il reste à montrer que A est linéaire. Soit $f_1, f_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} A(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= \int_0^x (x-t)(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) dt \\ &= \int_0^x (\lambda_1(x-t)f_1(t) + \lambda_2(x-t)f_2(t)) dt \\ &= \lambda_1 \int_0^x (x-t)f_1(t) dt + \lambda_2 \int_0^x (x-t)f_2(t) dt \\ &= \lambda_1 A(f_1)(x) + \lambda_2 A(f_2)(x) \\ &= (\lambda_1 A(f_1) + \lambda_2 A(f_2))(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $A(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 A(f_1) + \lambda_2 A(f_2)$. Donc A est linéaire.

$$\boxed{A \in \mathcal{L}(E)}.$$

- (b) Soit $f \in \text{Ker } A$. On a $A(f) = 0_E$. On en déduit $A(f)'' = 0_E$. Or, d'après la question 2, $A(f)'' = f$. Ainsi $f = 0_E$.

Donc $\text{Ker } A = \{0_E\}$ et donc $\boxed{A \text{ est injective}}.$

3. (a) On a montré à la question 2 que $\forall f \in E, A(f)'' = f$, cela signifie que $D_2 \circ A = \text{id } E$. On en déduit alors

$$p^2 = p \circ p = (A \circ D_2) \circ (A \circ D_2) = A \circ (D_2 \circ A) \circ D_2 = A \circ \text{id } E \circ D_2 = A \circ D_2 = p.$$

Donc

$$\boxed{p \text{ est un projecteur}}.$$

- (b) Soit $f \in E$. Comme A est injectif, on a

$$p(f) = 0 \Leftrightarrow (A \circ D_2)(f) = 0 \Leftrightarrow A(f'') = 0 \Leftrightarrow f'' = 0.$$

Or les fonctions dont la dérivée seconde est nulle sont les fonctions affines. Donc

$$\boxed{\text{Ker } p = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}}.$$

4. (a) Soit $f \in E$. Comme f est continue, f admet une primitive v qui vérifie $v(0) = 0$. v est en particulier continue et admet donc une primitive u qui vérifie $u(0) = 0$. u est donc deux fois dérivable et $u'' = f$ qui est $\mathcal{C}^\infty$. Donc $u \in E$, $u(0) = 0$ et $u'(0) = v(0) = 0$. Donc

$$\boxed{\exists u \in E \text{ tel que } u'' = f, u(0) = 0 \text{ et } u'(0) = 0}.$$

- (b) On montre les deux inclusions.

$\boxed{\subset}$ Soit $h \in \text{Im } p$. Il existe alors $f \in E$ tel que $h = p(f) = (A \circ D_2)(f) = A(f'')$. Ainsi, $h \in \text{Im } A$. Donc $\text{Im } p \subset \text{Im } A$.

$\boxed{\supset}$ Soit $h \in \text{Im } A$. Il existe alors $f \in E$ tel que $h = A(f)$. D'après la question précédente, il existe $u \in E$ tel que $u'' = f$. On en déduit $h = A(f) = A(u'') = p(u)$. Ainsi $h \in \text{Im } p$. Donc $\text{Im } A \subset \text{Im } p$.

Donc

$$\boxed{\text{Im } p = \text{Im } A}.$$

5. (a) Soit $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$p(f)(x) = A(f'')(x) = \int_0^x (x-t)f''(t) dt.$$

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} p(f)(x) &= [(x-t)f'(t)]_0^x + \int_0^x f'(t) dt \\ &= -xf'(0) + [f(t)]_0^x \end{aligned}$$

$$\boxed{p(f)(x) = f(x) - f(0) - xf'(0)}.$$

- (b) D'après la question précédente, $\text{Im } A = \text{Im } p$ et comme p est un projecteur, $\text{Im } p = \text{Ker } (p - \text{id } E)$. Soit $f \in E$. On a alors

$$\begin{aligned} f \in \text{Im } A &\Leftrightarrow f \in \text{Ker } (p - \text{id } E) \\ &\Leftrightarrow p(f) - f = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, p(f)(x) - f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(0) + xf'(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{Im } A = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}}.$$

B Étude des solutions de $\mathcal{E}$

6. $(\mathcal{F})$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants et g est continue. Le problème de Cauchy admet donc une unique solution h . Il reste à montrer que h est $\mathcal{C}^\infty$. Pour cela, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h est de classe $\mathcal{C}^n$.

Init. h est deux fois dérivable donc h est de classe $\mathcal{C}^1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons h de classe $\mathcal{C}^n$. On a $h'' = g + h$. Or g est $\mathcal{C}^\infty$, donc de classe $\mathcal{C}^n$. On en déduit que h'' est de classe $\mathcal{C}^n$, puis que h est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. En particulier, h est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Donc h est de classe $\mathcal{C}^\infty$, d'après le principe de récurrence.

$$(\mathcal{F}) \text{ admet une unique solution } h \in E \text{ vérifiant } h(0) = h'(0) = 0.$$

7. (a) Soit $u \in E$ tel que $u(0) = u'(0) = 0$. D'après les questions 5b et 4b, $u \in \text{Im } A = \text{Im } p$. Comme p est un projecteur, on a donc $A(u'') = p(u) = u$. On en déduit alors

$$\begin{aligned} u \text{ est solution de } (\mathcal{F}) &\Leftrightarrow u'' - u = g \\ &\Leftrightarrow u'' - A(u'') = g \end{aligned}$$

$$u \text{ est solution de } (\mathcal{F}) \Leftrightarrow u'' \text{ est solution de } (\mathcal{E}).$$

- (b) **Analyse** Soit $f \in E$ une solution de $(\mathcal{E})$. D'après la question 4a, il existe $u \in E$ tel que $u'' = f$ et $u'(0) = u(0) = 0$. D'après la question précédente, u est alors une solution de $(\mathcal{F})$. Comme $u'(0) = u(0) = 0$, on en déduit que $u = h$. Par conséquent, $f = h''$.

Synthèse D'après les questions 6 et 7a, h'' est bien solution de $(\mathcal{E})$.

Donc

$$(\mathcal{E}) \text{ admet une unique solution } f \in E \text{ et on a } f = h'' = g + h.$$

8. Commençons par résoudre $(\mathcal{F})$. On résout l'équation différentielle

$$y'' - y = e^x.$$

- L'équation homogène $(\mathcal{F}_0)$ associée à $(\mathcal{F})$ admet pour équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$. Cette équation admet deux racines réelles 1 et -1 . Ainsi, par théorème de cours, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{F}_0)$ est

$$\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- On recherche ensuite une solution particulière de $(\mathcal{F})$ de la forme $y_0 : x \mapsto axe^x$, avec $a \in \mathbb{R}$, car 1 est racine simple de l'équation caractéristique. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) = a(x+1)e^x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, y_0''(x) = a(x+2)e^x.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} y_0 \text{ est solution de } (\mathcal{F}) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y_0''(x) - y_0(x) = e^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a(x+2)e^x - axe^x = e^x \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi $y_0 : x \mapsto \frac{1}{2}xe^x$ est solution particulière de $(\mathcal{F})$. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{F})$ est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{2}xe^x + \lambda e^x + \mu e^{-x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Il reste à déterminer λ et μ à l'aide des conditions initiales. Soit $y : x \mapsto \frac{1}{2}xe^x + \lambda e^x + \mu e^{-x}$. On a alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = \frac{-1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-1}{4} \\ \mu = \frac{1}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc

L'unique solution h de $y'' - y = e^x$ vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$ est $h : x \mapsto \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} = \frac{xe^x - \operatorname{sh} x}{2}.$
--

D'après les questions précédentes, l'unique solution f de $(\mathcal{E})$ est donc

$f : x \mapsto g(x) + h(x) = \frac{(2+x)e^x - \operatorname{sh} x}{2}.$

Problème 1

Pour tout entier $n \geq 3$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$ et on considère l'équation

$$x^n - nx + 1 = 0 \quad (E_n)$$

D'un côté...

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation (E_n) admet une unique solution dans $]0, 1[$. On la note x_n .
2. Pour $n \geq 3$, déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 3}$. Justifier que (x_n) est convergente.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$.
4. En déduire que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et préciser la limite de x_n .
5. Montrer que $(1 + x_n^n)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
6. En déduire un équivalent de $\left(x_n - \frac{1}{n}\right)$.

...de l'autre

7. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation (E_n) admet une unique solution sur $]1, +\infty[$. On la note y_n .
8. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{n}$.
9. En déduire qu'à partir d'un certain rang, $1 < y_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
10. En déduire le comportement de la suite (y_n) .
11. Démontrer que $y_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

Problème 1**D'un côté...**

1. On considère $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. Une étude nous la donne strictement décroissante sur $] -\infty, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
On a $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = 2 - n < 0$ pour $n \geq 3$, donc d'après le théorème de la bijection, (E_n) a une unique solution dans $]0, 1[$.

2. Soit $n \geq 3$. On a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 = x_n(x_n^n - nx_n + 1) - x_n^2 = -x_n^2 < 0.$$

Ainsi $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$, donc comme f_{n+1} est décroissante, on a $x_{n+1} < x_n$.

Donc $(x_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et minorée par 0, donc convergente.

3. Pour tout $n \geq 3$, on a $x_n^n = nx_n - 1$. Comme $x_n \in]0, 1[$ et que (x_n) est décroissante, elle converge vers $\ell \geq 0$.

Si $\ell > 0$, alors $nx_n \rightarrow +\infty$, donc $x_n^n \rightarrow +\infty$, contradiction. Donc $\ell = 0$, et ainsi $x_n^n \rightarrow 0$.

4. Soit $n \geq 3$. On pose $y_n = x_n - \frac{1}{n}$, donc $\frac{x_n}{\frac{1}{n}} = nx_n = 1 + x_n^n \rightarrow 1$. Ainsi $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et en particulier $x_n \rightarrow 0$.

5. On écrit $(1 + x_n^n)^n = \exp(n \ln(1 + x_n^n))$.

Or $\ln(1 + x_n^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n^n$ car $x_n^n \rightarrow 0$.

Donc $n \ln(1 + x_n^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx_n^n = n(nx_n - 1)$.

Or $nx_n \rightarrow 1$ donc à pcr, $nx_n \leq 2$ puis $x_n \leq \frac{2}{n}$, soit $x_n^n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n$.

Par croissances comparées, $nx_n^n \leq n \left(\frac{2}{n}\right)^n \rightarrow 0$.

Finalement $n \ln(1 + x_n^n) \rightarrow 0$ et donc $(1 + x_n^n)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$.

6. Soit $n \geq 3$. On pose $u_n = x_n - \frac{1}{n}$, si bien que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On remplace $x_n = \frac{1}{n} + u_n$ dans l'équation.

$$\left(\frac{1}{n} + u_n\right)^n - n\left(\frac{1}{n} + u_n\right) + 1 = 0, \text{ i.e. } \left(\frac{1}{n} + u_n\right)^n - nu_n = 0.$$

Alors $\frac{1}{n^n} e^{n \ln(1 + nu_n)} = nu_n$.

Or $nu_n = nx_n - 1 = x_n^n$ qui tend vers 0, donc $n \ln(1 + nu_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times nu_n$.

De plus (x_n) étant décroissante, $nu_n < x_3^n$ donc par croissances comparées, $n \times nu_n < nx_3^n \rightarrow 0$.

Finalement $e^{n \ln(1 + nu_n)} \rightarrow 1$ et donc $nu_n \sim \frac{1}{n^n}$. Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{n+1}}$.

...de l'autre

7. Nouvelle application du théorème de la bijection.
8. Soit $n \geq 3$.

$$\ln \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{n} \right) = n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \ln n$$

Or $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ car cette dernière quantité tend vers 0.

Donc $n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \sqrt{n}$.

Ainsi $\frac{\ln n}{n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)} \sim \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ et donc $\ln n = o \left(\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$.

Donc $\ln \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{n} \right) \sim n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \sqrt{n} \rightarrow +\infty$.

Finalement, par compositions de cette limite avec celle de $\exp$ en $+\infty$, $\boxed{\frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{n} \rightarrow +\infty}$.

9. On a $f_n(1) < 0$ et

$$f_n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n - n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + 1.$$

Or $n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n = o \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \right)$ et $1 = o \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n \right)$.

Donc $f_n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n$.

Ainsi $f_n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow +\infty$ et est donc positive à pcr. Donc

$$\boxed{1 < y_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ à partir d'un certain rang.}}$$

10. Par théorème d'encadrement, $\boxed{y_n \rightarrow 1}$.

11. On écrit $y_n^n = ny_n - 1$. Posons $v_n = y_n - 1$ avec $v_n \rightarrow 0$.

Alors à l'aide de la fonction $\ln$, on a $n \ln(1 + v_n) = \ln(n - 1 + nv_n)$.

D'une part, $n \ln(1 + v_n) \sim nv_n$ car $v_n \rightarrow 0$.

D'autre part, $\ln(n - 1 + nv_n) = \ln(n) + \ln \left(1 - \frac{1}{n} + v_n \right) \sim \ln(n)$ car $-\frac{1}{n} + v_n \rightarrow 0$.

Finalement $\boxed{v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}}$.

Problème 1

On s'intéresse à la population de la planète Wagal, dont le fonctionnement est le suivant. À l'origine était un individu, appelé ancêtre, seul représentant de la génération 0. Ensuite, chaque individu de la génération n peut avoir de 0 à 3 enfants, formant la génération $n + 1$. En pratique un individu aura

- 3 enfants avec la probabilité $1/8$,
- 2 enfants avec la probabilité $3/8$,
- 1 enfant avec la probabilité $3/8$,
- 0 enfant avec la probabilité $1/8$,

et ce indépendamment des descendance des autres individus.

On suppose que la situation peut être modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On s'intéresse pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'événement E_n : « la lignée s'éteint à la génération n », qui signifie qu'il n'y a aucun individu à la génération n . On note $p_n = P(E_n)$.

1. Calculer p_0 et p_1 .

Pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on note A_k l'événement « l'ancêtre a eu k enfants ».

2. Préciser $P(A_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.
3. Supposons que l'ancêtre a eu 2 enfants. Sa descendance se divise ainsi en deux parties : les descendants de son premier enfant et ceux de son deuxième enfant. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note les événements :
 $E_{1,n}$: « il n'y a plus de descendants du côté de son premier enfant à la génération n » ;
 $E_{2,n}$: « il n'y a plus de descendants du côté de son deuxième enfant à la génération n ».

(a) Expliquer les égalités $P_{A_2}(E_{1,n+1}) = P_{A_2}(E_{2,n+1}) = p_n$.

(b) En déduire que $P_{A_2}(E_{n+1}) = p_n^2$.

4. De même, donner $P_{A_0}(E_{n+1})$, $P_{A_1}(E_{n+1})$ et $P_{A_3}(E_{n+1})$.

5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}p_n + \frac{3}{8}p_n^2 + \frac{1}{8}p_n^3$ et discuter le cas $n = 0$.

6. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3$.

(a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \frac{1}{8}(x-1)(x^2 + ax + b).$$

On notera α et β les deux racines de $X^2 + aX + b$ avec $\alpha < 0 < \beta < 1$.

- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq p_n \leq \beta$.
- (c) Déterminer les variations de p_n .
- (d) En déduire le comportement de p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter.

Problème 1

On s'intéresse à la population de la planète Wagal, dont le fonctionnement est le suivant. À l'origine était un individu, appelé ancêtre, seul représentant de la génération 0. Ensuite, chaque individu de la génération n peut avoir de 0 à 3 enfants, formant la génération $n + 1$. En pratique un individu aura

- 3 enfants avec la probabilité $1/8$,
- 2 enfants avec la probabilité $3/8$,
- 1 enfant avec la probabilité $3/8$,
- 0 enfant avec la probabilité $1/8$,

et ce indépendamment des descendance des autres individus.

On suppose que la situation peut être modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On s'intéresse pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'événement E_n : « la lignée s'éteint à la génération n », qui signifie qu'il n'y a aucun individu à la génération n . On note $p_n = P(E_n)$.

1. La génération 0 n'est pas éteinte (il y a l'ancêtre), donc $p_0 = 0$.

Les individus de la génération 1 sont exactement les enfants de l'ancêtre. Donc E_1 est réalisé si l'ancêtre n'a pas d'enfant (A_0 avec les notations de la suite). Donc $p_1 = \frac{1}{8}$ d'après l'énoncé.

Pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on note A_k l'événement « l'ancêtre a eu k enfants ».

2. L'énoncé nous donne aussi les autres probabilités : $P(A_0) = \frac{1}{8}$, $P(A_1) = \frac{3}{8}$, $P(A_2) = \frac{3}{8}$ et $P(A_3) = \frac{1}{8}$.

3. Supposons que l'ancêtre a eu 2 enfants. Sa descendance se divise ainsi en deux parties : les descendants de son premier enfant et ceux de son deuxième enfant. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note les événements :

$E_{1,n}$: « il n'y a plus de descendants du côté de son premier enfant à la génération n » ;

$E_{2,n}$: « il n'y a plus de descendants du côté de son deuxième enfant à la génération n ».

- (a) L'arbre qui représente la descendance du premier enfant de l'ancêtre est exactement le même que celui qu'étudie le problème en faisant jouer à ce premier enfant le rôle d'ancêtre. Ainsi $E_{1,n+1}$ se produit avec la même probabilité que l'extinction de la lignée en n générations à partir d'un individu seul donné.

Ce raisonnement vaut bien sûr également pour le côté du deuxième enfant. Ainsi $P_{A_2}(E_{1,n+1}) = P_{A_2}(E_{2,n+1}) = P(E_n)$, soit $P_{A_2}(E_{1,n+1}) = P_{A_2}(E_{2,n+1}) = p_n$.

- (b) L'extinction de la lignée à la génération $n + 1$ suppose l'extinction des deux descendance examinées : celle du premier enfant et celle du deuxième enfant de l'ancêtre, à échéance de la génération $n + 1$, soit $P_{A_2}(E_{n+1}) = P_{A_2}(E_{1,n+1} \cap E_{2,n+1})$.

Par indépendance, $P_{A_2}(E_{n+1}) = P_{A_2}(E_{1,n+1}) \times P_{A_2}(E_{2,n+1}) = p_n^2$.

4. De même, $P_{A_0}(E_{n+1}) = 1$, $P_{A_1}(E_{n+1}) = p_n$ et $P_{A_3}(E_{n+1}) = p_n^3$, toujours par indépendance (notamment pour cette dernière probabilité) des descendance de chaque enfant de l'ancêtre.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme A_0 , A_1 , A_2 et A_3 forment un s.c.e, d'après la formule des probabilités totales, on

a $P(E_{n+1}) = \sum_{i=0}^3 P(A_i)P_{A_i}(E_{n+1})$, ce qui donne d'après les questions précédentes :

$$p_{n+1} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}p_n + \frac{3}{8}p_n^2 + \frac{1}{8}p_n^3.$$

D'après la première question, on constate que cette formule reste vraie pour $n = 0$.

6. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3$.

(a) On obtient $\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{f(x) - x = \frac{1}{8}(x-1)(x^2 + 4x - 1)}$.

On notera α et β les deux racines de $X^2 + aX + b$ avec $\alpha < 0 < \beta < 1$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, E_n \subset E_{n+1}$ (si la lignée s'éteint, elle est éteinte à toutes les générations suivantes).

Donc $p_n \leq p_{n+1}$, *i.e.* $0 \leq p_{n+1} - p_n = f(p_n) - p_n$.

Or $f(x) - x$ est positif sur $[\alpha, \beta]$ puis négatif sur $[\beta, 1]$ d'après la factorisation ci-dessus.

Donc p_n (qui est dans $[0, 1]$ *a priori*) est $\boxed{\text{dans } [0, \beta]}$.

(c) Sur $[0, \beta]$, $f(x) - x$ est positif. Comme $p_n \in [0, \beta]$, $p_{n+1} - p_n = f(p_n) - p_n \geq 0$ donc (p_n) est croissante.

(d) (p_n) est croissante et majorée, donc (p_n) converge. La seule limite possible est un point fixe de f , compris entre 0 et β . Seul β convient. Donc $\boxed{p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta}$.

Les risques d'extinction sont non nuls (dès la première génération, $p_1 = \frac{1}{8}$). À chaque génération le risque d'extinction augmente, mais de moins en moins vite. Il serait intéressant d'étudier la variable aléatoire qui mesure à quelle génération l'extinction se produit (étude peut-être ardue).

Problème 1 Des carrés magiques

Dans tout le problème, les matrices considérées appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est notée

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix}$$

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 9 et sa base canonique, notée $\mathcal{B}$, est formée des matrices suivantes :

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & E_9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + kE_4 + lE_5 + mE_6 + rE_7 + sE_8 + tE_9.$$

Étant donnée une telle matrice, on étudie la somme des coefficients d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale. On définit ainsi huit nombres :

$$\begin{aligned} s_1 &= a + b + c, & s_2 &= k + l + m, & s_3 &= r + s + t, \\ s_4 &= a + k + r, & s_5 &= b + l + s, & s_6 &= c + m + t, \\ s_7 &= a + l + t, & s_8 &= r + l + c. \end{aligned}$$

Notons que s_7 s'appelle la trace de la matrice.

On appelle

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note :

S l'ensemble des matrices symétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

A l'ensemble des matrices antisymétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

V le sous-espace Vect J , engendré par J ,

T l'ensemble des matrices de trace nulle (*i.e.* pour lesquelles s_7 est nul).

Généralités

1. Donner les dimensions et des bases de S et A . Justifier que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = S \oplus A$.
2. Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que $S \cap T$ et V sont deux sous-espaces supplémentaires de S et donner leurs dimensions respectives.

Une application linéaire

Soit $\varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^8$
 $M \mapsto (s_1, \dots, s_8)$

4. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$.
5. Écrire la matrice de φ , de la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ, dans la base canonique de $\mathbb{R}^8$.
6. Montrer que le rang de cette matrice est 7. (*On pourra par exemple exprimer une ligne comme combinaison des précédentes puis montrer que les autres sont libres, mais ce n'est pas la seule méthode possible.*)
7. En déduire la dimension de $\text{Ker } \varphi$.

Matrices magiques

On s'intéresse maintenant à l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices *magiques*, c'est-à-dire pour lesquelles les huit nombres $s_1, \dots, s_8$ sont tous égaux à un même nombre s , appelé somme de la matrice magique.

8. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
9. Montrer que $\mathcal{M} \cap T$ et V sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}$.
10. Montrer que $\mathcal{M} \cap T = \text{Ker } \varphi$. En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.
11. Donner une matrice de $\mathcal{M} \cap T \cap S$ et une matrice de $\mathcal{M} \cap T \cap A$.
12. En déduire une base de $\mathcal{M}$.

Problème 2

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer que $x \mapsto \int_{-x}^x \frac{dt}{(t - \alpha)^n}$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.
Indication : calculer $\int_{-x}^x \frac{dt}{(t - \alpha)^n}$ en utilisant les méthodes vues en cours, puis passez à la limite.
 - (b) Montrer que $x \mapsto \int_{-x}^x \frac{dt}{t - \alpha}$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.
*Indication : attention ! α est un **nombre complexe non réel** ! Donc pas de $\ln$ hâtif pour le calcul de primitive. Écrivez $\alpha = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer ensuite séparément les parties réelles et imaginaires de $\int_{-x}^x \frac{dt}{t - \alpha}$ puis passez à la limite. Vous devriez trouver une limite égale à $i\pi$ si $b > 0$ et autre chose si $b < 0$...*
2. Soit $R \in \mathbb{C}(X)$ sans pôle réel et telle que $\deg R \leq -2$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de R et $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des pôles de R de partie imaginaire strictement positive.
 - (a) Écrire la décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{C}(X)$ (On ne demande pas de calculer les coefficients de chaque élément simple).
 - (b) Pour tout $\alpha \in \mathcal{P}$, on appelle résidu de R en α , et on note $\text{Res}_\alpha(R)$ le coefficient de $\frac{1}{X - \alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de R sur $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \text{Res}_\alpha(R) = 0.$$

Indication : calculez de deux manières $\lim_{x \rightarrow +\infty} xR(x)$.

- (c) Montrer que $x \mapsto \int_{-x}^x R(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ et établir la formule des résidus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x R(t) dt = 2i\pi \sum_{\alpha \in \mathcal{P}^+} \text{Res}_\alpha(R).$$

3. Application. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$. En utilisant la formule des résidus, calculer

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{t^{2m}}{t^{2n} + 1} dt.$$

Indication : Vérifier qu'on peut appliquer la formule des résidus, puis déterminer tous les pôles de $R(X) = \frac{X^{2m}}{X^{2n} + 1}$ de partie imaginaire strictement positive et leurs résidus. Simplifier ensuite le plus possible le résultat.

Problème 1 Des carrés magiques

Dans tout le problème, les matrices considérées appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est notée

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ r & s & t \end{pmatrix}$$

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension 9 et sa base canonique, notée $\mathcal{B}$, est formée des matrices suivantes :

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & E_9 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + kE_4 + lE_5 + mE_6 + rE_7 + sE_8 + tE_9.$$

Étant donnée une telle matrice, on étudie la somme des coefficients d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale. On définit ainsi huit nombres :

$$\begin{aligned} s_1 &= a + b + c, & s_2 &= k + l + m, & s_3 &= r + s + t, \\ s_4 &= a + k + r, & s_5 &= b + l + s, & s_6 &= c + m + t, \\ s_7 &= a + l + t, & s_8 &= r + l + c. \end{aligned}$$

Notons que s_7 s'appelle la trace de la matrice.

On appelle

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note :

S l'ensemble des matrices symétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

A l'ensemble des matrices antisymétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

V le sous-espace Vect J , engendré par J ,

T l'ensemble des matrices de trace nulle (*i.e.* pour lesquelles s_7 est nul).

Généralités

1. $S = \text{Vect}(E_1, E_5, E_9, E_2 + E_4, E_3 + E_7, E_6 + E_8)$ est de dimension 6
et $A = \text{Vect}(E_2 - E_4, E_3 - E_7, E_6 - E_8)$ est de dimension 3.
La concaténation de ces deux bases forme une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (9 matrices, vérifier qu'elle est libre).
Donc $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = S \oplus A$.
2. $M \mapsto \text{tr}(M) = s_7$ est linéaire et son noyau est T qui est donc un sev.
La trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, surjective car non identiquement nulle. D'après le théorème du rang, $\dim(T) = 8$.
3. On vérifie que $S \cap T \subset S$ et $V \subset S$. De plus ils sont d'intersection nulle et sont de dimensions respectives 5 et 1, dont la somme vaut bien $\dim S = 6$, donc $S = (S \cap T) \oplus V$.

Une application linéaire

$$\begin{aligned} \text{Soit } \varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^8 \\ M &\mapsto (s_1, \dots, s_8) \end{aligned}$$

4. φ est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$. On peut le vérifier pour chacune de ses applications coordonnées.

$$5. \text{ Notons } C \text{ cette matrice : } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Par exemple : $L_6 = L_1 + L_2 + L_3 - L_4 - L_5$ puis un pivot de Gauß montre que les autres lignes forment une matrice de rang 7.
7. D'après le théorème du rang, on a alors $\dim(\text{Ker } \varphi) = 2$.

Matrices magiques

On s'intéresse maintenant à l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices *magiques*, c'est-à-dire pour lesquelles les huit nombres $s_1, \dots, s_8$ sont tous égaux à un même nombre s , appelé somme de la matrice magique.

8. Soit l'application $\psi : M \mapsto (s_1 - s_2, s_1 - s_3, \dots, s_1 - s_8)$, linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^7$. On peut exprimer $\mathcal{M}$ comme son noyau, ce qui en fait un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
9. Le plus convaincant est de procéder par analyse-synthèse. Une matrice magique M , de somme s , se décompose de manière unique $M = \underbrace{(M - sJ)}_{\in \mathcal{M} \cap T} + \underbrace{sJ}_{\in V}$.
10. On montre aisément par double inclusion que $\mathcal{M} \cap T = \text{Ker } \varphi$. Par théorème du rang, $\dim(\mathcal{M} \cap T) = 1$.
11. Seule la matrice nulle est dans $\mathcal{M} \cap T \cap S$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \cap T \cap A$.

12. Une base de $\mathcal{M}$ s'obtient, d'après 9, en concaténant une base de $M \cap T$ et une base de V , soit (avec la matrice ci-dessus) : $\{D, J\}$ est une base de $\mathcal{M}$.

Problème 2

1. (a) Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(t - \alpha)^n} = (t - \alpha)^{-n}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et $F : t \mapsto \frac{1}{-n+1}(t - \alpha)^{-n+1} = \frac{-1}{(n-1)(t - \alpha)^{n-1}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_{-x}^x \frac{dt}{(t - \alpha)^n} dt = \left[\frac{-1}{(n-1)(t - \alpha)^{n-1}} \right]_{-x}^x = \frac{-1}{n-1} \left(\frac{1}{(x - \alpha)^{n-1}} - \frac{1}{(-x - \alpha)^{n-1}} \right)$$

Comme $n - 1 > 0$, on en déduit le résultat par opération sur les limites.

$$x \mapsto \int_{-x}^x \frac{dt}{(t - \alpha)^n} \text{ admet une limite lorsque } x \text{ tend vers } +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{dt}{(t - \alpha)^n} = 0.$$

- (b) Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On écrit $\alpha = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Comme $\alpha \notin \mathbb{R}$, $b \neq 0$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t - \alpha}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{t - \alpha} = \frac{1}{(t - a) - ib} = \frac{t - a + ib}{(t - a)^2 + b^2} = \frac{t - a}{(t - a)^2 + b^2} + i \frac{b}{(t - a)^2 + b^2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_{-x}^x \frac{dt}{t - \alpha} = \int_{-x}^x \frac{t - a}{(t - a)^2 + b^2} dt + i \int_{-x}^x \frac{b}{(t - a)^2 + b^2} dt.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \frac{t - a}{(t - a)^2 + b^2} dt &= \left[\frac{1}{2} \ln((t - a)^2 + b^2) \right]_{-x}^x = \frac{1}{2} (\ln((x - a)^2 + b^2) - \ln((-x - a)^2 + b^2)) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(x - a)^2 + b^2}{(-x - a)^2 + b^2} \right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - a)^2 + b^2}{(-x - a)^2 + b^2} = 1$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{t - a}{(t - a)^2 + b^2} dt = 0$.

D'autre part, en effectuant le changement de variable affine $u = \frac{t - a}{b}$, on obtient

$$\int_{-x}^x \frac{b}{(t - a)^2 + b^2} dt = \int_{\frac{-x-a}{b}}^{\frac{x-a}{b}} \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan \left(\frac{x - a}{b} \right) - \arctan \left(\frac{-x - a}{b} \right).$$

On distingue alors deux cas.

- Si $b > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - a}{b} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - a}{b} = -\infty$, ainsi par opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{b}{(t - a)^2 + b^2} dt = \pi.$$

- Si $b < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-a}{b} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-a}{b} = +\infty$, ainsi par opérations sur les limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{b}{(t-a)^2 + b^2} dt = -\pi.$$

On en déduit le résultat, par opération sur les limites.

$$\boxed{x \mapsto \int_{-x}^x \frac{dt}{t-\alpha} \text{ admet une limite lorsque } x \text{ tend vers } +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{dt}{(t-\alpha)^n} = \begin{cases} i\pi & \text{si } \operatorname{Im}(\alpha) > 0 \\ -i\pi & \text{si } \operatorname{Im}(\alpha) < 0 \end{cases} .}$$

2. (a) Comme $\deg R < 0$, la partie entière de R est nulle. Pour tout $\alpha \in \mathcal{P}$, notons ν_α la multiplicité de α en tant que pôle de R . D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, il existe des nombres complexes $(\lambda_{\alpha,j})_{\substack{\alpha \in \mathcal{P} \\ 1 \leq j \leq \nu_\alpha}}$ tels que :

$$\boxed{R(X) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \sum_{j=1}^{\nu_\alpha} \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(X-\alpha)^j} .}$$

- (b) Comme $\deg R \leq -2$, $\deg(XR(X)) \leq -1$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xR(x) = 0$. D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathcal{P}$, et tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x-\alpha)^j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{si } j \geq 2. \end{cases}$$

Ainsi, d'après la question précédente, et par opérations sur les limites, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xR(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \lambda_{\alpha,1} = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \operatorname{Res}_\alpha(R).$$

Par unicité de la limite,

$$\boxed{\sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \operatorname{Res}_\alpha(R) = 0 .}$$

- (c) Comme R n'a aucun pôle réel, $t \mapsto R(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a, d'après la question 2b :

$$\int_{-x}^x R(t) dt = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} \sum_{j=1}^{\nu_\alpha} \int_{-x}^x \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j} dt.$$

Soient $\alpha \in \mathcal{P}$ et $j \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question 1a, si $j \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j} dt = 0$.
- D'après la question 1b, si $j = 1$ et $\operatorname{Im}(\alpha) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j} dt = i\pi\lambda_{\alpha,j} = i\pi\operatorname{Res}_\alpha(R)$.
- D'après la question 1b, si $j = 1$ et $\operatorname{Im}(\alpha) < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{\lambda_{\alpha,j}}{(t-\alpha)^j} dt = -i\pi\lambda_{\alpha,j} = -i\pi\operatorname{Res}_\alpha(R)$.

Par opérations sur les limites, on en déduit déjà que

$$x \mapsto \int_{-x}^x R(t) dt \text{ admet une limite finie lorsque } x \text{ tend vers } +\infty$$

De plus

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x R(t) dt = i\pi \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{P} \\ \operatorname{Im}(\alpha) > 0}} \operatorname{Res}_\alpha(R) - \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{P} \\ \operatorname{Im}(\alpha) < 0}} \operatorname{Res}_\alpha(R) \right).$$

Or, d'après la question précédente, $\sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{P} \\ \operatorname{Im}(\alpha) < 0}} \operatorname{Res}_\alpha(R) = - \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{P} \\ \operatorname{Im}(\alpha) > 0}} \operatorname{Res}_\alpha(R)$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x R(t) dt = 2i\pi \sum_{\alpha \in \mathcal{P}^+} \operatorname{Res}_\alpha(R).$$

3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$. Posons $R(X) = \frac{X^{2m}}{X^{2n} + 1}$. On a $\deg R = 2(m - n) \leq -2$. De plus, R n'a aucun pôle réel, car $\forall x \in \mathbb{R}, x^{2n} + 1 > 0$. D'après la formule des résidus, I est bien défini et on a

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x R(t) dt = 2i\pi \sum_{\alpha \in \mathcal{P}^+} \operatorname{Res}_\alpha(R).$$

Déterminons les pôles de R . Remarquons déjà que R est écrit sous forme irréductible car 0 est la seule racine possible du numérateur et 0 n'est pas racine du dénominateur. Les pôles de R sont donc les racines de $X^{2n} + 1$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z^{2n} + 1 = 0 \Leftrightarrow z^{2n} = -1$. Les pôles de R sont donc les racines $2n$ -ièmes de -1 . Il y en a $2n$. Donc R n'a que des pôles simples. D'autre part $\xi = \exp\left(\frac{i\pi}{2n}\right)$ est une racine $2n$ -ième de -1 . Les autres sont les $\xi\omega^k$, avec $\omega = \exp\left(\frac{i\pi}{n}\right) = \xi^2$ et $k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$. Autrement dit

$$\mathcal{P} = \left\{ \xi^{2k+1} \mid k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket \right\}.$$

Déterminons maintenant les pôles de R qui ont une partie imaginaire strictement positive. Soit $k \in \llbracket 0, 2n - 1 \rrbracket$. On a

$$\operatorname{Im}(\xi^{2k+1}) = \operatorname{Im}\left(\exp\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2n}\right)\right) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

Ainsi

- si $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, alors $0 < \frac{(2k+1)\pi}{2n} < \pi$, donc $\operatorname{Im}(\xi^{2k+1}) > 0$,
- si $k \in \llbracket n, 2n - 1 \rrbracket$, alors $\pi < \frac{(2k+1)\pi}{2n} < 2\pi$, donc $\operatorname{Im}(\xi^{2k+1}) < 0$.

On en déduit :

$$\mathcal{P}^+ = \left\{ \xi^{2k+1} \mid k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket \right\}$$

Calculons maintenant les résidus de ces pôles. Soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Posons $\alpha_k = \xi^{2k+1}$. On sait que

$$\operatorname{Res}_{\alpha_k}(R) = (R(X)(X - \alpha_k))|_{X=\alpha_k} = \left(\frac{X^{2m}}{2nX^{2n-1}} \right)|_{X=\alpha_k} = \frac{\alpha_k^{2m}}{2n\alpha_k^{2n-1}}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par α_k , on obtient $\text{Res}_{\alpha_k}(R) = \frac{\alpha_k^{2m+1}}{2n\alpha_k^{2n}}$. Donc, comme $\alpha_k^{2n} = -1$,

$$\text{Res}_{\alpha_k}(R) = \frac{-\alpha_k^{2m+1}}{2n}.$$

On en déduit que

$$I = 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \text{Res}_{\alpha_k}(R) = \frac{-i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{2m+1} = \frac{-i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\xi^{2k+1})^{2m+1} = \frac{-i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\xi^{2m+1})^{2k+1}.$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $(\xi^{2m+1})^2 = \exp\left(\frac{(2m+1)i\pi}{n}\right) \neq 1$ car $0 < 2m+1 < 2n$. Ainsi

$$I = \frac{-i\pi}{n} \times \frac{\xi^{2m+1} - (\xi^{2m+1})^{2n+1}}{1 - \xi^{2(2m+1)}} = \frac{-i\pi}{n} \times \frac{1 - (\xi^{2m+1})^{2n}}{\xi^{-(2m+1)} - \xi^{2m+1}}$$

Or $(\xi^{2m+1})^{2n} = (\xi^{2n})^{2m+1} = (-1)^{2m+1} = -1$ et comme $|\xi| = 1$, $\xi^{-(2m+1)} - \xi^{2m+1} = -2i \text{Im}(\xi^{2m+1}) = -2i \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right)$. D'où

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{t^{2m}}{t^{2n} + 1} dt = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right)}$$

Problème 1

L'échauffement est indépendant de la suite du problème. Simplement, il rappelle quelques résultats que vous êtes libres d'utiliser par la suite.

A Échauffement

1. Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E . Montrer que

$$v \circ u = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v.$$

2. On définit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2x - 4y, x - 2y) \end{aligned} .$$

On ne demande pas de montrer que cette application est linéaire.

- (a) Déterminer A la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.
- (b) Déterminer $f \circ f$. Que peut-on en déduire sur $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$?
- (c) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
- (d) Soit $X = (3, 1)$.
Calculer $f(X)$ et montrer que $(X, f(X))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On la notera $\mathcal{E}$.
- (e) Donner la matrice C de f dans cette base et expliciter P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$. Quelle relation lie A , C et P ?

B Généralités en dimension 2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, Id désigne l'application identité de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note usuellement $f^2 = f \circ f$.

3. Dans cette question, on suppose que f n'est pas l'endomorphisme nul et qu'il vérifie $f^2 = 0$.
- (a) Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ soit une famille libre de E .
 - (b) Montrer que cette famille $\mathcal{E}$ est alors une base de E .
 - (c) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.
4. Dans cette question, on suppose que f vérifie $f^2 = -2\operatorname{Id}$.
- (a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = \lambda \cdot x$ admet une unique solution (que l'on précisera).
 - (b) Soit $a \in E$ un vecteur non nul. Montrer que la famille $\mathcal{E} = (a, f(a))$ est une base de E .
 - (c) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.

C Un espace de polynômes

Dans cette partie, on appelle $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré maximum 3, dont on appelle $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique. On définit

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ P &\mapsto (1 + X^2)P'' - 2XP' \end{aligned}$$

5. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E .
- (b) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et calculer son rang.
- (c) Déterminer une base de $\text{Im } f$.
- (d) On appelle F l'ensemble des polynômes $P \in E$ qui vérifient $f(P) = -2P$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en déterminer une base.
- (e) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- (f) Vrai ou faux ? (justifier)
 - i. $\text{Im } f = F$.
 - ii. $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.
6. Le but de cette question est de déterminer les endomorphismes φ de E qui vérifient $\varphi^2 = f$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ solution du problème.
 - (a) Montrer que $f \circ \varphi = \varphi \circ f$.
 - (b) Montrer que $\forall P \in \text{Ker } f, \varphi(P) \in \text{Ker } f$.
 - (c) On définit $\varphi_0 : \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } f$.

$$P \mapsto \varphi(P)$$

On remarque que, d'après ce qui précède, φ_0 est un endomorphisme de $\text{Ker } f$.
 Montrer que $\varphi_0^2 = 0$. En déduire que soit $\varphi_0 = 0$, soit il existe une base de $\text{Ker } f$ dans laquelle la matrice de φ_0 est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - (d) De la même manière, justifier l'existence d'un endomorphisme φ_1 de F défini par : $\forall P \in F, \varphi_1(P) = \varphi(P)$. Calculer φ_1^2 . Que la partie B nous permet-elle de conclure ?
 - (e) En déduire la forme de la matrice de φ dans une base bien choisie.

Problème 1**A Échauffement**

1. Supposons que $v \circ u = 0$. Soit $y \in \text{Im } u$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a alors $v(u(x)) = 0$, donc $u(x) \in \text{Ker } v$. Ainsi $\text{Im } u \subset \text{Ker } v$.

Réciproquement, si $\text{Im } u \subset \text{Ker } v$, alors pour tout $x \in E$, on a $u(x) \in \text{Im } u$, donc $u(x) \in \text{Ker } v$. Ainsi $v(u(x)) = 0$, donc $(v \circ u)(x) = 0$. Ceci montre $v \circ u = 0$.

Donc $\boxed{v \circ u = 0 \iff \text{Im } u \subset \text{Ker } v}$

2. (a) On a $f(1, 0) = (2, 1)$ et $f(0, 1) = (-4, -2)$. Donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$
- (b) Le calcul de A^2 donne $A^2 = A$. Donc $\boxed{f \circ f = 0}$. D'après la question précédente, on en déduit que $\boxed{\text{Im } f \subset \text{Ker } f}$.
- (c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$, i.e. $x = 2y$. Donc $\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}((2, 1))}$ (il s'agit bien d'une base car c'est un seul vecteur non nul).
D'après le théorème du rang, $\text{rg}(f) = 1$ et $f((1, 0)) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Donc $\boxed{\text{Im } f = \text{Vect}(f((1, 0)) = \text{Vect}((2, 1))}$.
- (d) On a $f(X) = f(3, 1) = (2, 1)$. Montrons que $(X, f(X))$ est libre. Si $\lambda(3, 1) + \mu(2, 1) = (0, 0)$, alors $\begin{cases} 3\lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases}$, i.e. $\lambda = \mu = 0$. La famille est donc libre.
Comme elle contient deux vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}^2}$.
- (e) Dans la base $\mathcal{E} = (X, f(X))$, on a $f(X) = 0 \cdot X + 1 \cdot f(X)$ et $f(f(X)) = 0$. Donc $\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$ est $\boxed{P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$, car ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{B}$.
La relation entre les matrices est $\boxed{A = PCP^{-1}}$.

B Généralités en dimension 2

3. On suppose que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.
- (a) Comme $f \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$. Montrons que $(x, f(x))$ est libre.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda x + \mu f(x) = 0$. En appliquant f , on obtient $\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0$. Comme $f^2 = 0$, cela donne $\lambda f(x) = 0$. Or $f(x) \neq 0$, donc $\lambda = 0$. L'égalité initiale donne alors $\mu f(x) = 0$, donc $\mu = 0$.
Finalement, $\boxed{(x, f(x)) \text{ est libre}}$.
- (b) La famille $\mathcal{E} = (x, f(x))$ est libre et contient deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2. Donc $\boxed{\mathcal{E} \text{ est une base de } E}$.

(c) Dans la base $\mathcal{E} = (x, f(x))$, on a $f(x) = 0 \cdot x + 1 \cdot f(x)$ et $f(f(x)) = f^2(x) = 0$. Donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On suppose que $f^2 = -2\text{Id}$.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On résout $f(x) = \lambda x$. En appliquant f , on obtient $f^2(x) = \lambda f(x)$, donc $-2x = \lambda^2 x$. Ainsi $(\lambda^2 + 2)x = 0_E$. Comme $\lambda^2 + 2 \neq 0$, on a $x = 0_E$.

Réciproquement, $x = 0_E$ est bien solution. Donc l'unique solution est $x = 0$.

(b) Soit $a \in E$ non nul. Montrons que $(a, f(a))$ est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda a + \mu f(a) = 0_E$.

Si $\mu \neq 0$, alors $f(a) = -\frac{\lambda}{\mu}a$, ce qui contredit la question précédente, puisque $a \neq 0$. Donc nécessairement $\mu = 0$.

Puis $\lambda a = 0$, donc $\lambda = 0$ puisque $a \neq 0_E$.

La famille $(a, f(a))$ est libre. Comme E est de dimension 2, $\mathcal{E} = (a, f(a))$ est une base de E .

(c) Dans la base $\mathcal{E} = (a, f(a))$, on a $f(a) = f(a)$ et $f(f(a)) = f^2(a) = -2a$. Donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C Un espace de polynômes

5. (a) Soit $P \in E$. Alors $P' \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P'' \in \mathbb{R}_1[X]$. Donc $(1 + X^2)P'' \in \mathbb{R}_3[X]$ et $XP' \in \mathbb{R}_3[X]$. Ainsi $f(P) \in E$, donc $f(E) \subset E$.

Par ailleurs, la dérivation est linéaire, donc f est linéaire. Détails laissés en exercice.

Finalement, f est un endomorphisme de E .

(b) On calcule :

$$f(1) = 0, \quad f(X) = -2X, \quad f(X^2) = 2 - 2X^2, \quad f(X^3) = 6X.$$

$$\text{Ainsi, } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un rapide pivot de Gauß montre que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\text{rg}(f) = 2$.

(c) D'après la position des pivots dans le calcul précédent, $\text{Im } f = \text{Vect}(f(X), f(X^2)) = \text{Vect}(-2X, 2 - 2X^2) = \text{Vect}(X, 1 - X^2)$.

La liberté est acquise par le calcul précédent, mais on peut aussi la justifier car les deux polynômes sont de degrés différents.

Finalement, ils forment une base de $\text{Im } f$ et $\text{Im } f = \text{Vect}(X, 1 - X^2)$.

- (d) Posons $F = \{P \in E \mid f(P) = -2P\}$. $F = \text{Ker}(f + 2\text{id})$ et $f + 2\text{id}$ est linéaire car f et id le sont. Donc F est un sev de E . Mais cette déduction n'est même pas utile car le calcul suivant va montrer que F est un sev en tant que sev engendré par...

$$\text{Matriciellement, } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f + 2\text{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc avec $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, on a

$$P \in F \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = c(X^2 - 1) + bX.$$

Donc $\boxed{F = \text{Vect}(X^2 - 1, X)}$ et c'est bien une base car c'est une famille libre (polynômes de degrés distincts).

- (e) D'après les questions précédentes, $\text{Ker } f = \text{Vect}(1, X^3 - 3X)$ et $F = \text{Vect}(X^2 - 1, X)$.
Ainsi, dans la base $\mathcal{E} = (1, X^3 - 3X, X^2 - 1, X)$,

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

- (f) i. Vrai. En effet, les bases obtenues précédemment sont (quasiment) les mêmes, au signe près d'un des vecteurs.
ii. Vrai, par concaténation des bases.

6. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi^2 = f$.

- (a) On a $f \circ \varphi = \varphi^2 \circ \varphi = \varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2 = \varphi \circ f$.

Donc $\boxed{f \circ \varphi = \varphi \circ f}$.

- (b) Soit $P \in \text{Ker } f$. Alors $f(P) = 0_E$, donc $f(\varphi(P)) = \varphi(f(P)) = 0_E$.

Ainsi $\boxed{\forall P \in \text{Ker } f, \varphi(P) \in \text{Ker } f}$.

- (c) Soit $P \in \text{Ker } f$. Alors

$$\varphi_0^2(P) = \varphi^2(P) = f(P) = 0_E.$$

Donc $\boxed{\varphi_0^2 = 0}$.

Comme $\dim(\text{Ker } f) = 2$, la partie A permet de conclure que soit $\varphi_0 = 0$, soit il existe une base de

$\text{Ker } f$ dans laquelle la matrice de φ_0 est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

- (d) Soit $P \in F$. Alors $f(P) = -2P$, donc $f(\varphi(P)) = \varphi(f(P)) = \varphi(-2P) = -2\varphi(P)$.

Ainsi $\varphi(P) \in F$ et on a montré que F est stable par φ .

On peut donc définir l'endomorphisme $\varphi_1 : F \rightarrow F$ induit par φ .

Soit $P \in F$. Alors $\varphi_1^2(P) = \varphi^2(P) = f(P) = -2P$. Donc $\boxed{\varphi_1^2 = -2\text{Id}_F}$.

Comme $\dim(F) = 2$, la partie B permet de conclure qu'il existe une base de F dans laquelle la matrice de φ_1 est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

(e) On choisit une base de E obtenue en concaténant :

- une base de $\text{Ker } f$ adaptée à φ_0 (*i.e.* dans laquelle la matrice de φ_0 sera de la forme obtenue en 6c) ;
- une base de F adaptée à φ_1 (*i.e.* dans laquelle la matrice de φ_1 sera de la forme obtenue en 6d).

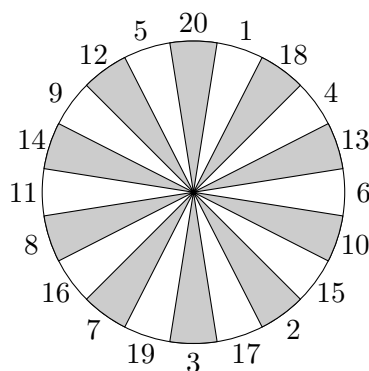
Dans cette base, la matrice de φ est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$, où $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Problème 1

Ce problème modélise un jeu de fléchettes, avec quelques libertés par rapport à la réalité pour les besoins de la cause. On suppose que chaque situation peut être représentée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.

Premier jeu

Je joue aux fléchettes sur une cible divisée en 20 secteurs numérotés de 1 à 20.



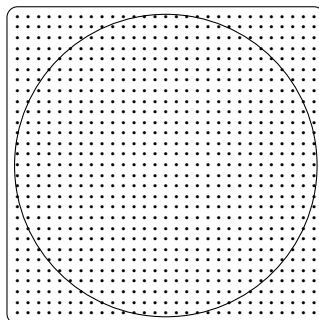
Je joue suffisamment mal pour que la probabilité pour chaque fléchette de tomber dans chacun des 20 secteurs soit égale à $\frac{1}{20}$.

1. Je décide de lancer 20 fléchettes (lancers indépendants).
 - (a) Je gagne si j'atteins le secteur 20 au moins une fois. Déterminer la probabilité de victoire.
 - (b) On appelle X la variable aléatoire du nombre de fléchettes qui ont atteint le secteur 20. Identifier la loi de X (justifier sans calculs).
2. J'ai maintenant une cible divisée en n secteurs ($n \in \mathbb{N}^*$), où je décide de lancer n fléchettes.
 - (a) Je gagne si j'atteins le secteur numéro n au moins une fois. Quelle est la probabilité de victoire et la limite de cette probabilité quand $n \rightarrow +\infty$?
 - (b) On note X_n la variable aléatoire du nombre de fléchettes qui ont atteint le secteur n . Déterminer la loi de X_n et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k)$.

Remarque. On dira plus tard que la suite de variables aléatoires (X_n) converge (en loi) vers une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson.

Deuxième jeu

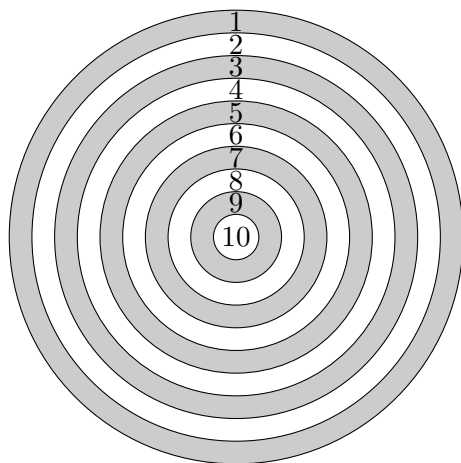
La cible est maintenant dessinée sur un support carré percé de $n \times n$ petits trous dans lesquels les fléchettes peuvent se planter.



On ne s'intéresse plus aux différentes zones ou au score. Le jeu est de lancer successivement n fléchettes, sans les reprendre (elles restent donc plantées dans le support). Je lance suffisamment mal pour que tous les trous aient la même probabilité $\frac{1}{n^2}$ d'être atteints par chaque fléchette. Si un trou déjà atteint est atteint à nouveau par une deuxième fléchette, celle-ci ne peut pas s'y planter. La partie est alors perdue. Si au contraire les n fléchettes atteignent n trous différents, j'ai gagné.

3. Montrer que la probabilité de victoire est $p_n = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n^2}\right)$.
4. À l'aide du calcul de $\ln(p_n)$, déterminer la limite de p_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Troisième jeu



La cible est maintenant constituée de 10 couronnes concentriques d'épaisseur 1 centimètre (*i.e.* les cercles tracés ont pour rayons $1, 2, 3, \dots, 10$). On associe à chaque zone un score entier entre 1 et 10, avec bien sûr 10 pour le disque central (de rayon 1), 9 pour la première couronne (en partant du centre), 8 pour la suivante, *etc.* comme indiqué sur le dessin. Je lance suffisamment mal pour que la probabilité que la fléchette tombe dans une zone donnée soit proportionnelle à l'aire de cette zone.

Je joue dans une fête foraine où les règles sont les suivantes : je lance une fléchette. Si je fais 6 ou plus, je gagne une somme égale au numéro de la zone (6 euros si j'atteins la zone 6, *etc.*). Si je fais 5 ou moins, je perds 2 euros.

5. La variable aléatoire N représente le numéro de la zone atteinte. Déterminer la loi de N .
6. La variable aléatoire G représente le gain lors d'un lancer (négatif si je perds de l'argent).
 - (a) Déterminer la loi et l'espérance de G . Vous remarquerez que le jeu m'est favorable (espérance de gain strictement positive).
 - (b) Le créateur du jeu souhaite modifier les règles pour que son jeu devienne rentable. Sur le même principe, je lance une fléchette et j'appelle N le numéro de la zone atteinte. Si $N \leq k$, je perds 2 euros et si $N > k$, je gagne la somme correspondante (N euros). On a vu que pour $k = 5$,

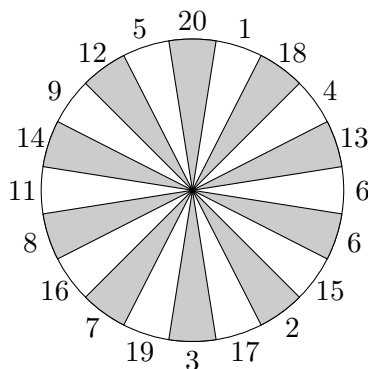
mon espérance est positive. Quelle est la plus petite valeur de k qui rende mon espérance de gain négative ?

Problème 1

Ce problème modélise un jeu de fléchettes, avec quelques libertés par rapport à la réalité pour les besoins de la cause. On suppose que chaque situation peut être représentée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.

Premier jeu

Je joue aux fléchettes sur une cible divisée en 20 secteurs numérotés de 1 à 20.



Je joue suffisamment mal pour que la probabilité pour chaque fléchette de tomber dans chacun des 20 secteurs soit égale à $\frac{1}{20}$.

- Je décide de lancer 20 fléchettes (lancers indépendants). Je note S_i le numéro du secteur atteint par la i -ième fléchette. S_i suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, 20 \rrbracket$.

- Soit V l'événement correspondant à une victoire. On passe par l'événement complémentaire.

$\bar{V} = \bigcap_{i=1}^{20} [S_i \neq 20]$. Or pour tout i , $P(S_i \neq 20) = \frac{19}{20}$ (loi uniforme) et les lancers sont indépendants, donc les événements concernant des S_i différents le sont aussi.

Finalement $P(\bar{V}) = \prod_{i=1}^{20} P(S_i \neq 20) = \left(\frac{19}{20}\right)^{20}$. Puis $P(V) = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{20}$.

- X représente le nombre de succès (atteindre le secteur 20) lors des 20 lancers, chaque lancer ayant une probabilité de succès de $\frac{1}{20}$. Donc $X \sim \mathcal{B}\left(20, \frac{1}{20}\right)$.

- J'ai maintenant une cible divisée en n secteurs ($n \in \mathbb{N}^*$), où je décide de lancer n fléchettes.

- Comme pour la première partie, $P(V) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$.

Or $n \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1/n}{1/n} = -1$, donc tend vers -1 .

Par continuité de $\exp$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

(b) On a $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$ et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-k}$.

Alors $P(X_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

Or $\frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$ et donc $\frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

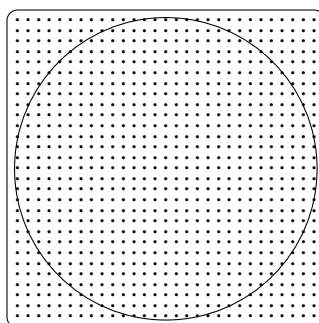
De plus on a déjà $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$.

Remarque. On dira plus tard que la suite de variables aléatoires (X_n) converge (en loi) vers une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson.

Deuxième jeu

La cible est maintenant dessinée sur un support carré percé de $n \times n$ petits trous dans lesquels les fléchettes peuvent se planter.



On ne s'intéresse plus aux différentes zones ou au score. Le jeu est de lancer successivement n fléchettes, sans les reprendre (elles restent donc plantées dans le support). Je lance suffisamment mal pour que tous les trous aient la même probabilité $\frac{1}{n^2}$ d'être atteints par chaque fléchette. Si un trou déjà atteint est atteint à nouveau par une deuxième fléchette, celle-ci ne peut pas s'y planter. La partie est alors perdue. Si au contraire les n fléchettes atteignent n trous différents, j'ai gagné. On note V l'événement « gagner à ce jeu ».

3. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note V_i l'événement « la i -ième fléchette se plante dans un trou pas encore occupé ». Alors $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$.

Chaque trou a la même probabilité d'être atteint. Lorsqu'on lance la i -ième fléchette, $i-1$ trous sont occupés. Donc $P(V_i) = \frac{n^2 - i}{n^2}$.

De plus les lancers sont indépendants, donc $P(V) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{n^2 - (i-1)}{n^2} \right)$. Une réindexation donne

$$p_n = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n^2} \right).$$

4. Tout d'abord, on redémontre avec Taylor reste intégral que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$

$$-x - x^2 \leq \ln(1-x) \leq -x.$$

$$\text{Puis } \ln(p_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{i}{n^2} \right).$$

On utilise l'encadrement précédent avec $\frac{i}{n^2} \leq \frac{1}{2}$ lorsque $i \leq n-1$ (valable dès que $n \geq 2$) :

$$-\frac{i}{n^2} - \frac{i^2}{n^4} \leq \ln \left(1 - \frac{i}{n^2} \right) \leq -\frac{i}{n^2}.$$

On somme de 1 à $n-1$, ce qui donne $-\frac{n(n-1)}{2n^2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^4} \leq \ln(p_n) \leq -\frac{n(n-1)}{2n^2}$.

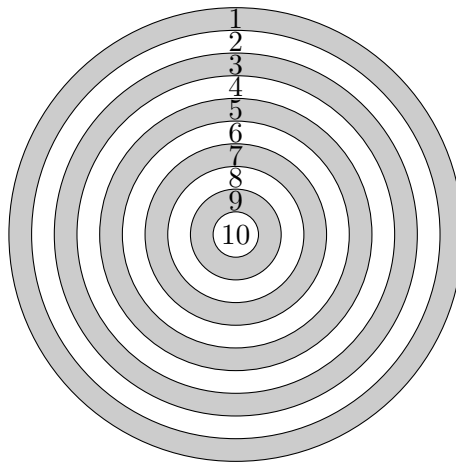
$$\text{Finalement, } \forall n \geq 2, \quad -\frac{n-1}{2n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3} \leq \ln(p_n) \leq -\frac{n-1}{2n}.$$

$$\text{Par croissance de exp, } \exp \left(-\frac{n-1}{2n} \right) \exp \left(-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3} \right) \leq p_n \leq \exp \left(-\frac{n-1}{2n} \right).$$

$$\text{Or } \exp \left(-\frac{n-1}{2n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \exp \left(-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^3} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\text{Donc par encadrement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Troisième jeu



La cible est maintenant constituée de 10 couronnes concentriques d'épaisseur 1 centimètre (*i.e.* les cercles tracés ont pour rayons $1, 2, 3, \dots, 10$). On associe à chaque cercle un score entier entre 1 et 10, avec bien

sûr 10 pour le disque central (de rayon 1), 9 pour la première couronne (en partant du centre), 8 pour la suivante, *etc.* comme indiqué sur le dessin. Je lance suffisamment mal pour que la probabilité que la fléchette tombe dans une zone donnée soit proportionnelle à l'aire de cette zone.

Je joue dans une fête foraine où les règles sont les suivantes : je lance une fléchette. Si je fais 6 ou plus, je gagne la somme correspondante (6 euros si j'atteins la zone 6, *etc.*). Si je fais 5 ou moins, je perds 2 euros.

5. La zone 10 a pour aire $\pi \times 1^2$, la zone 9 a pour aire $\pi \times 2^2 - \pi \times 1^2 = \pi(2^2 - 1^2)$ (le disque de rayon 2 privé du disque de rayon 1) et de même pour $i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$, la zone i a pour aire $\pi \times ((11-i)^2 - (10-i)^2)$. Si bien que l'aire des zones est proportionnelle à 1 (pour la zone 10), 3 (pour la zone 9), *etc.*, à $2i+1$ pour la zone $10-i$. Et l'aire totale est proportionnelle à $10^2 = 100$. D'où la loi de N :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(N=i)$	$\frac{19}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{100}$

6. La variable aléatoire G représente le gain lors d'un lancer (négatif si je perds de l'argent).

- (a) On a $G(\Omega) = \{-2, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Pour $i \geq 6$, $[G = i] = [N = i]$ et $[G = -2] = [N \leq 5]$.

k	-2	6	7	8	9	10
$P(G=k)$	$\frac{75}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{100}$

$$\text{Puis } \mathbb{E}(G) = (-2) \times \frac{75}{100} + 6 \times \frac{9}{100} + 7 \times \frac{7}{100} + 8 \times \frac{5}{100} + 9 \times \frac{3}{100} + 10 \times \frac{1}{100} = \boxed{\frac{30}{100}}.$$

- (b) Avec $k = 6$, la loi devient :

k	-2	7	8	9	10
$P(G=k)$	$\frac{84}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{100}$

$$\text{Et l'espérance : } \mathbb{E}(G) = (-2) \times \frac{84}{100} + 7 \times \frac{7}{100} + 8 \times \frac{5}{100} + 9 \times \frac{3}{100} + 10 \times \frac{1}{100} = \boxed{-\frac{42}{100}}. \text{ C'est}$$

donc à partir de $\boxed{k=6}$ que l'espérance devient négative

Problème 1

On note S_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On choisit une permutation σ uniformément au hasard dans S_n .

Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire qui compte le nombre de cycles de longueur k apparaissant dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

A Nombre moyen de cycles de longueur k

1. Soit $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ une partie de cardinal k . Déterminer le nombre de permutations de S_n pour lesquelles l'ensemble A constitue le support d'un cycle de longueur k présent dans la décomposition en produit de cycles.
2. Pour chaque partie A de cardinal k , on introduit la variable aléatoire

$$I_A = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ constitue un cycle de } \sigma, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de I_A .

3. Exprimer X_k à l'aide des variables (I_A) . et en déduire que

$$E(X_k) = \frac{1}{k}.$$

4. On note $X = \sum_{k=1}^n X_k$ le nombre total de cycles de σ . Déterminer $E(X)$ puis un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

B Cycles longs

L'expérience aléatoire est toujours le tirage aléatoire uniforme d'une permutation $\sigma \in S_n$.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit C_k l'événement « σ possède un cycle de longueur k » et L l'événement « σ possède un cycle long », c'est-à-dire un cycle de longueur strictement supérieure à $n/2$.

5. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $k > \frac{n}{2}$. Montrer que $P(C_k) = \frac{1}{k}$.
6. En déduire que $P(L)$ sous forme de somme puis $P(\overline{L})$ à l'aide d'une somme harmonique.

C Le problème des prisonniers

On dispose de 100 prisonniers et de 100 boîtes numérotées. Chaque boîte contient un numéro entre 1 et 100, chaque numéro apparaissant exactement une fois.

Les prisonniers entrent successivement dans la salle. Chacun peut ouvrir au plus 50 boîtes. Si tous les prisonniers retrouvent leur propre numéro, ils sont tous graciés ; sinon ils sont tous laissés en prison.

7. Sans consultation préalable, si chaque prisonnier ouvre indépendamment de ses congénères 50 boîtes au hasard, quelle est la probabilité qu'ils soient graciés ?
8. Les prisonniers ont la possibilité de se consulter avant le début de l'expérience et d'élaborer une stratégie commune (après le début de l'expérience, ils ne peuvent plus communiquer). À l'aide des parties précédentes, proposer une stratégie leur offrant une meilleure chance d'être graciés et donner une valeur approchée de la probabilité de succès.
9. Comportement asymptotique.

On pose exactement le même problème avec n prisonniers et n boîtes, chaque prisonnier pouvant ouvrir exactement $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ boîtes. On note p_n la probabilité de succès de la stratégie.

- (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k}$.
- (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.

Problème 1**A Nombre moyen de cycles de longueur k**

- Une telle permutation σ s'écrit $\gamma \circ \sigma'$ avec γ un cycle de support A et σ' une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (qui n'est autre que la permutation induite par σ).
 - Il y a $(k-1)!$ cycles de support A . En effet, écrire un cycle revient à ordonner les éléments de A ($k!$ possibilités), chaque cycle ayant k écritures différentes possibles. Le principe des bergers donne alors $\frac{k!}{k} = (k-1)!$ cycles.
Autrement dit, déterminer un cycle revient à choisir le premier élément écrit puis une permutation des $(k-1)$ autres éléments de A .
 - Puis les $n-k$ éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A$ peuvent être permutés arbitrairement, soit $(n-k)!$ possibilités.

Ainsi, le nombre de permutations recherché est $\boxed{(k-1)!(n-k)!}$.

- La variable I_A suit une loi de Bernoulli. Le tirage est équiprobable et $|S_n| = n!$ donc

$$P(I_A = 1) = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}.$$

Ainsi, $\boxed{I_A \sim \mathcal{B}\left(\frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\right)}$.

- En notant $\mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal k , on a $X_k = \sum_{A \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} I_A$. Par linéarité de l'espérance,

$$E(X_k) = \sum_{A \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} E(I_A) = \binom{n}{k} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k}.$$

Ainsi, $\boxed{E(X_k) = \frac{1}{k}}$.

- Par linéarité de l'espérance, $E(X) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$.

Ainsi, $\boxed{E(X) \sim \ln n}$ (équivalent du reste de la série harmonique divergente).

B Cycles longs

- Soit $k > \frac{n}{2}$.

Une permutation ne peut posséder qu'un seul cycle de longueur k , donc $X_k = \mathbf{1}_{C_k}$. Autrement dit, $C_k = (X_k \geq 1) = (X_k = 1)$.

Par conséquent, $P(C_k) = E(X_k) = \boxed{\frac{1}{k}}$.

6. Pour $k > \frac{n}{2}$, les événements C_k sont deux à deux incompatibles. En effet, deux cycles de longueur strictement supérieure à $n/2$ utiliseraient strictement plus de n éléments.

Ainsi, $L = \bigcup_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n C_k$ est une union disjointe, donc

$$P(L) = \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n P(C_k) = \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k}.$$

Donc $P(\overline{L}) = 1 - \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k}.$

Avec la notation $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (somme harmonique), $P(\overline{L}) = 1 - (H_n - H_{\lfloor n/2 \rfloor}).$

Finalement,

$$\boxed{P(L) = \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k}} \quad \text{et} \quad \boxed{P(\overline{L}) = 1 - (H_n - H_{\lfloor n/2 \rfloor})}.$$

C Le problème des prisonniers

7. Soit G l'événement « ils sont tous graciés ». Un prisonnier donné trouve son numéro avec probabilité $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. Les choix étant indépendants, $P(G) = \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$

Ainsi, $\boxed{P(G) = 2^{-100} \approx 7,89 \times 10^{-31}}.$

8. Les prisonniers adoptent la stratégie suivante : les prisonniers s'attribuent tous un numéro différent de 1 à 100 (par exemple l'ordre dans lequel ils vont aller ouvrir les boîtes). Le prisonnier i ouvre d'abord la boîte i . S'il y trouve le numéro j , il ouvre ensuite la boîte j , puis continue ainsi jusqu'à retrouver son propre numéro ou avoir ouvert 50 boîtes.

Le contenu des boîtes définit une permutation σ de $\llbracket 1, 100 \rrbracket$.

Chaque prisonnier parcourt alors le cycle de σ qui contient son numéro (l'orbite de son numéro).

Tous les prisonniers réussissent si et seulement si tous les cycles de σ sont de longueur inférieure ou égale à 50, c'est-à-dire si et seulement si l'événement $\overline{L}$ est réalisé.

D'après la question précédente, $\boxed{P(G) = 1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k}}.$

Numériquement, $\sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k} \approx 0,688172$, donc $P(G) \approx 0,311828$, soit une spectaculaire probabilité de succès de plus de 31% !

9. **Comportement asymptotique.**

(a) On écrit

$$\sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k/n}.$$

Cette somme est une somme de Riemann associée à la fonction $t \mapsto 1/t$ sur $[1/2, 1]$.

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k} = \int_{1/2}^1 \frac{dt}{t} = \boxed{\ln 2}$.

(b) On a $p_n = 1 - \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^n \frac{1}{k}$.

En passant à la limite, $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1 - \ln 2 \approx 0,30685}$.

Problème 1

Soit $n \geq 2$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note A^+ la transposée de la comatrice de A . On rappelle que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient de la i -ème ligne et j -ème colonne de la comatrice de A est $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$, où $A_{i,j}$ est la sous-matrice de A obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne. On rappelle de plus la relation

$$A \times A^+ = \det(A)I_n = A^+ \times A.$$

A Généralités

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que A est inversible. Déterminer une relation entre A^+ et A^{-1} .
2. Calculer A^+ dans le cas où $\text{rg}(A) \leq n - 2$.
3. On suppose dans cette question $\text{rg}(A) = n - 1$.
 - (a) Montrer que $A^+ \neq 0$.
 - (b) Comparer les noyaux et les images de A et A^+ et déterminer $\text{rg}(A^+)$.
4. Montrer que $\det(A^+) = (\det(A))^{n-1}$.
5. Exprimer $(A^+)^+$ en fonction de A .
Attention au cas particulier $n = 2$...

B Une relation

Dans cette partie, on cherche à démontrer la relation suivante :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (AB)^+ = B^+A^+.$$

6. Démontrer le résultat lorsque A et B sont inversibles.
7. On suppose maintenant $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconques.
 - (a) Montrer que l'application $P_A : x \mapsto \det(A + xI_n)$ est une application polynomiale de degré n .
 - (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, sauf pour un nombre fini de valeurs, $A + xI_n$ et $B + xI_n$ sont inversibles.
 - (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$M(x) = ((A + xI_n)(B + xI_n))^+ - (B + xI_n)^+(A + xI_n)^+.$$

Montrer que $M(x)$ est nulle pour une infinité de valeurs de x , puis pour tout $x \in \mathbb{R}$. Conclure.

8. Application. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $B^+ = P^{-1}A^+P$.
 - (b) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{E}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans la base $\mathcal{E}$. Soit g l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est A^+ . Montrer que g ne dépend que de f et pas de la base $\mathcal{E}$, ce qui permet de définir f^+ .

C Équation $A^+ = B$, d'inconnue A

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation

$$(E) : A^+ = B,$$

d'inconnue $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Résoudre (E) lorsque B est inversible.

On sera amené à distinguer plusieurs cas...

10. Résoudre (E) lorsque $\text{rg}(B) > 1$ et B n'est pas inversible.

11. On suppose maintenant $\text{rg}(B) = 1$.

(a) Résoudre (E) dans le cas où B est la matrice élémentaire $E_{1,1}$, puis dans le cas où $B = E_{2,1}$.

(b) On revient au cas général : B quelconque de rang 1. Montrer que B est semblable à $\lambda E_{1,1}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ou à $E_{2,1}$. En déduire que (E) admet au moins une solution.

D Un exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ et $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les termes diagonaux valent $1 - x$ et les autres 1.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-x \end{pmatrix}.$$

12. Calculer $\det(A_n)$.

13. Déterminer le rang de A_n .

14. Calculer explicitement A_n^+ lorsque $n \geq 2$.

1. Si A est inversible, alors en multipliant à gauche par A^{-1} dans l'égalité $A \times A^+ = \det(A)I_n$, on obtient

$$A^+ = \det(A)A^{-1}$$

2. Si $\text{rg}(A) \leq n - 2$, alors les plus grandes sous-matrices de A inversibles sont de taille au plus $n - 2$. En particulier, toutes les sous-matrices de A de taille $n - 1$ sont non inversibles et donc de déterminant nul.

$$\text{Si } \text{rg}(A) \leq n - 2, A^+ = 0.$$

3. (a) Si $\text{rg}(A) = n - 1$, alors A possède une sous-matrice de taille $n - 1$ inversible et donc de déterminant non nul. Ainsi, il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $\det(A_{i,j}) \neq 0$ et $A^+ \neq 0$.

$$\text{Si } \text{rg}(A) = n - 1, \text{ alors } A^+ \neq 0.$$

- (b) Comme $\text{rg}(A) = n - 1 < n$, $\det(A) = 0$. Ainsi $A \times A^+ = 0$ et $\text{Im}(A^+) \subset \text{Ker}(A)$. De même, $A^+ \times A = 0$ et $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A^+)$. Comme $\dim \text{Im}(A) = n - 1$, on en déduit $n - 1 \leq \dim \text{Ker}(A^+)$. Or d'après la question précédente $A^+ \neq 0$, d'où $\dim \text{Ker}(A^+) < n$. Par conséquent, $\dim \text{Ker}(A^+) = n - 1 = \dim \text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A^+) = \text{Im}(A)$. D'après le théorème du rang, on en déduit $\dim \text{Im}(A^+) = 1 = \dim \text{Ker}(A)$, et comme $\text{Im}(A^+) \subset \text{Ker}(A)$, on en déduit $\text{Im}(A^+) = \text{Ker}(A)$.

$$\boxed{\text{Ker}(A^+) = \text{Im}(A)}, \quad \boxed{\text{Im}(A^+) = \text{Ker}(A)} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{rg}(A^+) = 1}$$

4. On peut distinguer trois cas.

- Si A est inversible, alors $A^+ = \det(A)A^{-1}$. On en déduit $\det(A^+) = (\det(A))^n \times \det(A^{-1}) = (\det(A))^n \times \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{n-1}$.
- Si $\text{rg}(A) \leq n - 2$, alors $\det(A) = 0$ et $A^+ = 0$. Ainsi $\det(A^+) = 0 = (\det(A))^{n-1}$ car $n \geq 2$.
- Si $\text{rg}(A) = n - 1$, alors $\det(A) = 0$ et $\text{rg}(A^+) = 1 < n$. Ainsi $\det(A^+) = 0 = (\det(A))^{n-1}$ car $n \geq 2$.

$$\det(A^+) = (\det(A))^{n-1}$$

5. On distingue aussi plusieurs cas.

- Si A est inversible, alors A^+ est inversible et on a les relations

$$\begin{aligned} A \times A^+ &= \det(A)I_n = A^+ \times A \\ (A^+)^+ \times A^+ &= \det(A^+)I_n = A^+ \times (A^+)^+ \end{aligned}$$

Ainsi

$$(A^+)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A = \frac{1}{\det(A^+)}(A^+)^+.$$

On en déduit $(A^+)^+ = \frac{\det(A^+)}{\det(A)}A = (\det(A))^{n-2}A$.

- Si $\text{rg}(A) \leq n - 2$, alors $A^+ = 0$ et donc $(A^+)^+ = 0$.

- Si $n \geq 3$ et $\text{rg}(A) = n - 1$, alors $\text{rg}(A^+) = 1 \leq n - 2$ et donc $(A^+)^+ = 0$.
- Si $n = 2$, alors on peut faire un calcul direct. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors : $A^+ = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et donc

$$(A^+)^+ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

On vérifie alors que dans tous les cas, on obtient

$$(A^+)^+ = (\det(A))^{n-2} A$$

6. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et, d'après la question 1,

$$\begin{aligned} (AB)^+ &= \det(AB)(AB)^{-1} = \det(A)\det(B)B^{-1}A^{-1} \\ &= (\det(B)B^{-1})(\det(A)A^{-1}) \end{aligned}$$

$$(AB)^+ = B^+A^+$$

7. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $(m_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ les coefficients de la matrice $A + xI_n$. Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x \mapsto m_{i,j}(x)$ est une fonction polynomiale, de degré 1 si $i = j$, constante sinon. On a alors

$$P_A(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),i}(x).$$

On en déduit que $P_A : x \mapsto \det(A + xI_n)$ est une fonction polynomiale en tant que combinaison linéaire et produit de fonctions polynomiales. De plus, pour tout $\sigma \in S_n$

$$\deg \left(\prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),i} \right) = \sum_{i=1}^n \deg(m_{\sigma(i),i}) \begin{cases} = n & \text{si } \sigma = \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket} \\ < n & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_A : x \mapsto \det(A + xI_n) \text{ est une fonction polynomiale de degré } n.$$

- (b) Notons Z_A (resp. Z_B) l'ensemble des racines réelles du polynôme P_A (resp. P_B). Comme $\deg(P_A) = \deg(P_B) = n$, Z_A et Z_B sont des ensembles finis de cardinal au plus n . Notons $Z = Z_A \cup Z_B$. Z est alors une partie finie de $\mathbb{R}$, et si $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, alors $P_A(x) \neq 0$ et $P_B(x) \neq 0$. On en déduit que $A + xI_n$ et $B + xI_n$ sont inversibles.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ sauf pour un nombre fini de valeurs, } A + xI_n \text{ et } B + xI_n \text{ sont inversibles}$$

- (c) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, $A + xI_n$ et $B + xI_n$ sont inversibles, ainsi d'après la question 5, $M(x) = 0$. Comme Z est infini, la matrice $M(x)$ est nulle pour une infinité de valeurs de x . Or tous les coefficients de $x \mapsto A + xI_n$ sont des fonctions polynomiales. De la même manière qu'en 7a, on montre que les coefficients de $x \mapsto (A + xI_n)^+$ sont des fonctions polynomiales. On en déduit que tous les coefficients de M sont des fonctions polynomiales, en tant que somme et produit de fonctions polynomiales. Comme M est nulle pour une infinité de valeurs, on en déduit que toutes ces fonctions sont des fonctions nulles. On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}, M(x) = 0$, puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, ((A + xI_n)(B + xI_n))^+ = (B + xI_n)^+(A + xI_n)^+.$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient le résultat

$$(AB)^+ = B^+A^+$$

8. (a) Comme $B = P^{-1}AP$, et d'après la question précédente

$$B^+ = P^+ A^+ (P^{-1})^+.$$

Comme P , et donc P^{-1} , sont inversibles, on a d'après la question 1

$$P^+ = \det(P)P^{-1} \text{ et } (P^{-1})^+ = \det(P^{-1})P = \frac{1}{\det(P)}P.$$

On en déduit le résultat

$$\boxed{B^+ = P^{-1}A^+P}$$

- (b) Soit $\mathcal{E}'$ une autre base de E , B la matrice de f dans la base $\mathcal{E}'$ et g' l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{E}'$ est B^+ . On a alors $B = P^{-1}AP$, avec P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$. D'après la question précédente, $B^+ = P^{-1}A^+P$. Comme A^+ est la matrice de g dans la base $\mathcal{E}$, B^+ est la matrice de g dans la base $\mathcal{E}'$. Donc $g = g'$.

L'endomorphisme g ne dépend pas de la base $\mathcal{E}$ choisie.

9. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible. On raisonne par analyse-synthèse.

An. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^+ = B$. D'après les premières questions, A est inversible et $\det(A)A^{-1} = B$, d'où $\frac{1}{\det(A)}A = B^{-1}$ et $A = \det(A)B^{-1}$. De plus, $\det(B) = \det(A^+) = \det(A)^{n-1}$.

Syn. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda^{n-1} = \det(B)$. On pose $A = \lambda B^{-1}$. Comme $\det(B) \neq 0$, $\lambda \neq 0$ et A est inversible. Ainsi, $A^+ = \det(A)A^{-1} = \lambda^n (\det(B))^{-1} \lambda^{-1} B = \lambda^{n-1} (\det(B))^{-1} B = B$.

On en déduit que l'équation $A^+ = B$ admet autant de solutions que l'équation $\lambda^{n-1} = \det(B)$ en a.

Si n est pair, alors l'équation $A^+ = B$ admet pour unique solution $A = \sqrt[n-1]{\det(B)}B^{-1}$.
 Si n est impair et $\det(B) > 0$, alors l'équation $A^+ = B$ admet deux solutions $A = \pm \sqrt[n-1]{\det(B)}B^{-1}$.
 Si n est impair et $\det(B) < 0$, alors l'équation $A^+ = B$ n'admet aucune solution.

10. D'après les premières questions, A^+ est soit inversible, soit nulle, soit de rang 1. Donc :

Si $\text{rg}(B) > 1$ et B n'est pas inversible, (E) n'a pas de solution.

11. (a) On suppose $B = E_{1,1}$ et on raisonne par analyse-synthèse.

An. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^+ = B$. On écrit $A = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & L \\ \hline C & A' \end{array} \right)$, avec $a_{1,1} \in \mathbb{R}$, $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Notons $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Par définition de A^+ , $b_{1,1} = 1 = \det(A')$. En particulier, A' est inversible. Notons $C_2, \dots, C_n$ (resp. $L_2, \dots, L_n$) les colonnes (resp. lignes) de A' . Celles-ci forment une base de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$). Donc il existe des scalaires $(\lambda_i)_{2 \leq i \leq n}$ (resp. $(\mu_i)_{2 \leq i \leq n}$) tels que $C = \sum_{i=2}^n \lambda_i C_i$ (resp. $L = \sum_{i=2}^n \mu_i L_i$). On a alors :

- Pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$(-1)^{i+1}b_{1,i} = 0 = \det \begin{pmatrix} L \\ L_2 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} L_2 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = -\sum_{k=2}^n \mu_k \det \begin{pmatrix} L_2 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_k \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = -\sum_{k=2}^n \mu_k \delta_{i,k} = -\mu_i$$

On en déduit $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\mu_i = 0$, donc $L = 0$.

- De même, pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} (-1)^{j+1}b_{j,1} = 0 &= \det \begin{pmatrix} C & C_2 & \cdots & C_{j-1} & C_{j+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} C_2 & \cdots & C_{j-1} & C & C_{j+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= -\sum_{k=2}^n \lambda_k \det \begin{pmatrix} C_2 & \cdots & C_{j-1} & C_k & C_{j+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= -\sum_{k=2}^n \lambda_k \delta_{k,j} = -\lambda_j \end{aligned}$$

On en déduit $\forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\lambda_j = 0$, donc $C = 0$.

- Enfin, comme A' est inversible, un des mineurs au moins de A' est non nul. Donc il existe $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $\det(A'_{i,j}) \neq 0$. Ainsi, on a

$$(-1)^{i+j}b_{j+1,i+1} = 0 = \det \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1} & 0 \\ \hline 0 & A'_{i,j} \end{array} \right) = a_{1,1} \det(A'_{i,j}).$$

On en déduit que $a_{1,1} = 0$.

Syn. On vérifie aisément que les matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array} \right)$,

avec $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\det(A') = 1$ conviennent.

Si $B = E_{1,1}$, les solutions de (E) sont les matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array} \right)$,
avec $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\det(A') = 1$.

De la même manière, on montre que

si $B = E_{2,1}$, les solutions de (E) sont les matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline C & 0 & A' \end{array} \right)$,
avec $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $A' \in \mathcal{M}_{n-1,n-2}(\mathbb{R})$ et $\det \left(\begin{array}{c|c} C & A' \end{array} \right) = -1$.

- (b) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 et $b \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé. Comme $\text{rg}(B) = \text{rg}(b) = 1$, on a $\dim \text{Im}(b) = 1$ et $\dim \text{Ker } b = n-1$. On a alors deux cas possibles.

1^{er} cas : $\text{Im } b \subset \text{Ker } b$. Soit (e_2) une base de $\text{Im } b$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $(e_3, \dots, e_n)$ tels que $(e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\text{Ker } b$. Enfin, comme $e_2 \in \text{Im } b$, il existe $e_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $b(e_1) = e_2$. Comme $e_2 \neq 0$, $e_1 \notin \text{Ker } b$, donc $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de b est $E_{2,1}$. Donc B est semblable à $E_{2,1}$.

2^e cas : $\text{Im } b \not\subset \text{Ker } b$. Dans ce cas, comme $\text{Im } b$ est une droite vectorielle, $\text{Ker } b \cap \text{Im } b = \{0\}$ et alors $\text{Ker } b \oplus \text{Im } b = \mathbb{R}^n$. Soit (e_1) une base de $\text{Im } b$ et $(e_2, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker } b$. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. De plus, $b(e_1) \in \text{Im } b$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b(e_1) = \lambda e_1$. Et $\lambda \neq 0$ car $e_1 \notin \text{Ker } b$. Dans cette base, la matrice de b est donc $\lambda E_{1,1}$. Donc B est semblable à $\lambda E_{1,1}$.

Si $\text{rg}(B) = 1$, alors B est semblable à $E_{2,1}$ ou à $\lambda E_{1,1}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

B est semblable à B' , avec $B' = E_{2,1}$ ou $B' = \lambda E_{1,1}$. Il existe alors $P \in \text{GL}_n \mathbb{R}$ tel que $B = P^{-1}B'P$. D'après la question précédente, l'équation $A'^+ = B'$ admet au moins une solution A' . (en multipliant par λ une ligne non nulle d'une solution de l'équation $A^+ = E_{1,1}$, on obtient une solution de l'équation $A^+ = \lambda E_{1,1}$.) En posant $A = P^{-1}A'P$, on a alors, d'après la question 8a, $A^+ = P^{-1}A'^+P = P^{-1}B'P = B$. Donc l'équation $A^+ = B$ admet au moins une solution.

Si $\text{rg}(B) = 1$, l'équation $A^+ = B$ admet au moins une solution.

12. On effectue des opérations sur les lignes et les colonnes pour calculer $\det(A_n)$.

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-x & 1 & \dots & \dots & 1 \\ n-x & 1-x & \ddots & & \vdots \\ n-x & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-x & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-x & 1 & \dots & 1 & 1-x \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow \sum_{k=1}^n C_k \\ &= (n-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (n-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -x & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix} \quad C_i \leftarrow C_i - C_1, i \in \llbracket 2, n \rrbracket \\ &= (n-x)(-x)^{n-1} \\ \boxed{\det(A_n) = (-1)^n x^{n-1} (x-n)} \end{aligned}$$

13. Si $n \geq 2$, d'après la question précédente, A_n est inversible ssi $x \notin \{0, n\}$. Donc $\text{rg}(A_n) = n$ si $x \notin \{0, n\}$. Si $x = 0$, alors $\text{rg}(A_n) = 1$, car dans ce cas toutes les colonnes sont identiques. Enfin, si $x = n$, alors $\text{rg}(A_n) = n-1$. En effet, dans ce cas, A_n n'est pas inversible, mais A_{n-1} qui est une sous-matrice de A_n de taille $n-1$ est inversible. D'où le résultat (et on vérifie que ce résultat est encore valable pour $n = 1$).

$$\text{rg}(A_n) = \begin{cases} n & \text{si } x \notin \{0, n\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ n-1 & \text{si } x = n. \end{cases}$$

14. Il y a plusieurs manières de parvenir au résultat.

- Calculer chacun des coefficients de A_n^+ . Il n'y a en fait que deux calculs de déterminant à effectuer, car on peut montrer que les coefficients diagonaux de A_n^+ sont tous identiques, et que les autres coefficients sont aussi tous identiques.

- Calculer A_n^{-1} lorsque A_n est inversible, puis A_n^+ dans ce cas et ensuite en déduire la valeur de A_n^+ dans tous les cas, en utilisant le fait que tous les coefficients de A_n^+ sont des fonctions polynomiales en x . Pour calculer l'inverse de A_n , on peut effectuer des opérations sur les lignes ou les colonnes, ou bien remarquer que A_n est annulé par un polynôme du second degré. C'est cette dernière méthode que nous allons employer ici.

Notons J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a alors $A_n = J_n - xI_n$. Ainsi, comme J_n commute avec I_n et $J_n^2 = nJ_n$:

$$\begin{aligned} A_n^2 &= (J_n - xI_n)^2 = J_n^2 - 2xJ_n + x^2I_n \\ &= (n - 2x)J_n + x^2I_n = (n - 2x)(A_n + xI_n) + x^2I_n \\ &= (n - 2x)A_n + x(n - x)I_n \end{aligned}$$

Ainsi, si $x \notin \{0, n\}$, on a

$$A_n \times \frac{1}{x(n - x)} (A_n - (n - 2x)I_n) = I_n.$$

Dans ce cas, $A_n^{-1} = \frac{1}{x(n - x)} (A_n - (n - 2x)I_n)$. On en déduit

$$A_n^+ = \det(A_n)A_n^{-1} = (-1)^{n+1}x^{n-2} (A_n - (n - 2x)I_n) = (-1)^{n+1}x^{n-2} \begin{pmatrix} x+1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1-n \end{pmatrix}.$$

Enfin, comme les coefficients sont, au signe près, des déterminant de sous-matrices de A_n , ce sont des fonctions polynomiales en x . On a trouvé une expression polynomiale pour chacun des coefficients de A_n , valable pour une infinité de valeurs de x , elle est donc valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$A_n^+ = (-1)^{n+1}x^{n-2} \begin{pmatrix} x+1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1-n \end{pmatrix}$$

Problème 1

On admet dans tout le problème que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on munit l'ensemble

$$\Omega_N = \{1, \dots, N\}^2$$

de la probabilité uniforme P_N . On note, pour $d \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{d,N} = \{(a, b) \in \Omega_N \mid d \text{ divise } a \text{ et } d \text{ divise } b\}.$$

1. Calculer $P_N(A_{d,N})$.
2. Exprimer l'événement

$$C_N = \{(a, b) \in \Omega_N \mid a \wedge b = 1\}$$

à l'aide des événements $A_{p,N}$, où p parcourt l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers.

3. Soit F un ensemble fini de nombres premiers. À l'aide de la formule du crible, montrer que

$$P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} \frac{\left\lfloor \frac{N}{\prod_{p \in H} p} \right\rfloor^2}{N^2}.$$

4. (a) Montrer que pour I un ensemble fini et toute $(x_i)_{i \in I}$ de nombres réels,

$$\prod_{i \in I} (1 + x_i) = \sum_{J \subset I} \prod_{j \in J} x_j.$$

- (b) En déduire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \prod_{p \in F} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right).$$

5. Montrer que, pour tout $M \geq 1$,

$$P_N(C_N) \leq P_N \left(\bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right).$$

6. Montrer que

$$P_N(C_N) \geq P_N \left(\bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right) - \sum_{\substack{d > M \\ d \leq N}} P_N(A_{d,N}).$$

7. En déduire que, pour tout $M \geq 1$ et tout $N \geq 1$,

$$0 \leq P_N \left(\bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right) - P_N(C_N) \leq \sum_{d > M} \frac{1}{d^2}.$$

8. Montrer que la suite

$$\left(\prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \right)_{M \geq 1}$$

converge. On note ℓ sa limite.

9. Montrer que la suite $(P_N(C_N))_{N \geq 1}$ converge vers ℓ .

On se propose maintenant de calculer ℓ .

10. (a) Pour tout $M \geq 1$ et tout nombre premier $p \leq M$, montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{2k}}$ converge.

(b) On pose alors $S_M = \prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} \right)$. Montrer que

$$S_M = \sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2},$$

où

$$E_M = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \text{tout facteur premier de } n \text{ est } \leq M\}.$$

11. (a) On pose

$$E_0 = \emptyset, \quad F_M = E_M \setminus E_{M-1} \quad (M \geq 1).$$

Montrer que $(F_M)_{M \geq 1}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^*$.

(b) En déduire que

$$\sum_{M=1}^{+\infty} \left(\sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in E_{M-1}} \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

12. Montrer que

$$S_M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

13. Montrer que, pour tout $M \geq 1$,

$$S_M = \left(\prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \right)^{-1}.$$

14. En déduire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N(C_N) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Problème 1

1. On a

$$A_{d,N} = \{(a, b) \in \Omega_N \mid d \mid a \text{ et } d \mid b\}.$$

Les multiples de d compris entre 1 et N sont exactement les kd tels que $1 \leq kd \leq N$, i.e. $\frac{1}{d} \leq k \leq \frac{N}{d}$.

Comme k est un entier, cela revient à $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor$. Il y en a donc $\left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor$. Ainsi

$$|A_{d,N}| = \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor^2.$$

Comme P_N est la probabilité uniforme sur Ω_N et que $|\Omega_N| = N^2$, on obtient

$$P_N(A_{d,N}) = \frac{\left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor^2}{N^2}.$$

2. Deux entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si aucun nombre premier ne les divise tous les deux. Ainsi

$$(a, b) \in C_N \text{ si et seulement si pour tout } p \in \mathcal{P}, (a, b) \notin A_{p,N}.$$

Donc

$$C_N = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} A_{p,N}^c.$$

3. Soit F un ensemble fini de nombres premiers. Par la formule du crible,

$$P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} P_N \left(\bigcap_{p \in H} A_{p,N} \right).$$

Si $H = \emptyset$, alors $\bigcap_{p \in H} A_{p,N} = \Omega_N$ et on adopte la convention

$$\prod_{p \in \emptyset} p = 1.$$

Si $H \neq \emptyset$, les éléments de H sont des nombres premiers deux à deux distincts. Ainsi

$$\bigcap_{p \in H} A_{p,N} = A_{\prod_{p \in H} p, N}.$$

En effet, un entier est divisible par tous les $p \in H$ si et seulement s'il est divisible par leur produit. D'après la première question et dans tous les cas,

$$P_N \left(\bigcap_{p \in H} A_{p,N} \right) = \frac{\left\lfloor \frac{N}{\prod_{p \in H} p} \right\rfloor^2}{N^2}.$$

On en déduit

$$P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} \frac{\left\lfloor \frac{N}{\prod_{p \in H} p} \right\rfloor^2}{N^2}.$$

4. (a) On démontre l'identité par récurrence sur $|I|$.

Init. Si $I = \emptyset$, alors les deux membres valent 1.

Hér. Supposons l'identité vraie pour toute partie de cardinal donné. Soit I un ensemble fini non vide et soit $i_0 \in I$. On pose $I' = I \setminus \{i_0\}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à I' , on obtient

$$\prod_{i \in I} (1 + x_i) = (1 + x_{i_0}) \sum_{J \subset I'} \prod_{j \in J} x_j.$$

Donc

$$\prod_{i \in I} (1 + x_i) = \sum_{J \subset I'} \prod_{j \in J} x_j + \sum_{J \subset I'} x_{i_0} \prod_{j \in J} x_j = \sum_{J \subset I'} \prod_{j \in J} x_j + \sum_{J \subset I' \cup \{i_0\}} \prod_{j \in J} x_j.$$

Le premier terme correspond aux parties de I ne contenant pas i_0 , et le second aux parties de I contenant i_0 . Ainsi

$$\prod_{i \in I} (1 + x_i) = \sum_{J \subset I} \prod_{j \in J} x_j.$$

- (b) D'après la question précédente, pour F fixé,

$$P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} \frac{\left\lfloor \frac{N}{\prod_{p \in H} p} \right\rfloor^2}{N^2}.$$

Comme F est fini, $\prod_{p \in H} p$ est fini pour tout $H \subset F$. Donc pour tout $H \subset F$,

$$\frac{\left\lfloor \frac{N}{\prod_{p \in H} p} \right\rfloor^2}{N^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\prod_{p \in H} p \right)^2}.$$

Ainsi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} \frac{1}{\left(\prod_{p \in H} p \right)^2}.$$

Or, en appliquant le résultat précédent à la famille des $x_p = -\frac{1}{p^2}$ pour $p \in F$, on obtient

$$\sum_{H \subset F} (-1)^{|H|} \frac{1}{\left(\prod_{p \in H} p \right)^2} = \prod_{p \in F} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right).$$

Donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N \left(\bigcap_{p \in F} A_{p,N}^c \right) = \prod_{p \in F} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right).$$

5. On a $C_N = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} A_{p,N}^c \subset \bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c$. Par croissance de P_N ,

$$P_N(C_N) \leq P_N \left(\bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right).$$

6. On pose $B_{M,N} = \bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c$. On vient de montrer que $C_N \subset B_{M,N}$. Donc

$$P_N(C_N) = P_N(B_{M,N}) - P_N(B_{M,N} \setminus C_N).$$

Étudions maintenant $B_{M,N} \setminus C_N$. Soit $(a, b) \in B_{M,N} \setminus C_N$.

- Comme $a \wedge b \neq 1$, il existe $d > 1$ un diviseur commun à a et b , autrement dit $(a, b) \in A_{d,N}$.
- De plus, puisque $(a, b) \in B_{M,N}$, aucun nombre premier inférieur ou égal à M ne divise simultanément a et b . En particulier, tout diviseur commun de a et b est strictement supérieur à M .

Donc $(a, b) \in \bigcup_{\substack{d > M \\ d \leq N}} A_{d,N}$. Finalement

$$B_{M,N} \setminus C_N \subset \bigcup_{\substack{d > M \\ d \leq N}} A_{d,N}.$$

Par l'inégalité de Boole,

$$P_N(B_{M,N} \setminus C_N) \leq \sum_{\substack{d > M \\ d \leq N}} P_N(A_{d,N}).$$

Ainsi

$$P_N(C_N) \geq P_N \left(\bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right) - \sum_{\substack{d > M \\ d \leq N}} P_N(A_{d,N}).$$

7. D'après les deux questions précédentes,

$$0 \leq P_N \left(\bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right) - P_N(C_N) \leq \sum_{\substack{d > M \\ d \leq N}} P_N(A_{d,N}).$$

Or, pour tout $d \geq 1$, $P_N(A_{d,N}) = \frac{\lfloor \frac{N}{d} \rfloor^2}{N^2} \leq \frac{1}{d^2}$. Donc $\sum_{\substack{d > M \\ d \leq N}} P_N(A_{d,N}) \leq \sum_{d > M} \frac{1}{d^2}$. Finalement,

$$0 \leq P_N \left(\bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c \right) - P_N(C_N) \leq \sum_{d > M} \frac{1}{d^2}.$$

8. On pose

$$u_M = \prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Si M n'est pas premier, alors $u_M = u_{M-1}$. Si M est premier, alors $u_M = u_{M-1} \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)$. Dans tous les cas,

$$0 \leq u_M \leq u_{M-1}.$$

La suite (u_M) est donc décroissante et minorée par 0. Elle converge. On note ℓ sa limite.

9. Pour tout $M \geq 1$, on pose $B_{M,N} = \bigcap_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} A_{p,N}^c$. D'après la question 4 appliquée à $F = \{p \in \mathcal{P} \mid p \leq M\}$, on a

$$P_N(B_{M,N}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} u_M.$$

De plus, d'après la question 7,

$$0 \leq P_N(B_{M,N}) - P_N(C_N) \leq \sum_{d > M} \frac{1}{d^2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme

$$\sum_{d > M} \frac{1}{d^2} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad u_M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \ell,$$

on peut choisir $M \geq 1$ tel que

$$\sum_{d > M} \frac{1}{d^2} \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |u_M - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour ce M fixé, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$|P_N(B_{M,N}) - u_M| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors, pour tout $N \geq N_0$,

$$\begin{aligned} |P_N(C_N) - \ell| &\leq |P_N(C_N) - P_N(B_{M,N})| + |P_N(B_{M,N}) - u_M| + |u_M - \ell| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{P_N(C_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ell.}$$

10. (a) Soit $M \geq 1$ et soit $p \leq M$ un nombre premier. Comme $p \geq 2$, on a $0 < \frac{1}{p^2} < 1$. La série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{2k}}$ est donc une série géométrique de raison $\frac{1}{p^2}$, convergente, de somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}.$$

- (b) Soient $p_1, \dots, p_r$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à M . Si $r = 0$, alors $M = 1$, le produit vide vaut 1 et $E_M = \{1\}$, donc le résultat est immédiat.

On suppose désormais $r \geq 1$. Les séries géométriques précédentes sont à termes positifs et convergent. Par produit fini de familles sommables positives, on a

$$S_M = \sum_{(k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r} \frac{1}{p_1^{2k_1} \cdots p_r^{2k_r}}.$$

On considère l'application $\varphi : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}^*$, $(k_1, \dots, k_r) \mapsto p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, φ est une bijection de $\mathbb{N}^r$ sur E_M . En réindexant la famille sommable positive précédente par cette bijection, on obtient

$$S_M = \sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2}.$$

11. (a) On a $E_0 = \emptyset$ et, pour $M \geq 1$, $F_M = E_M \setminus E_{M-1}$.

- Les ensembles F_M sont deux à deux disjoints.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, alors $n \in E_1$, donc $n \in F_1$. Si $n \geq 2$, l'ensemble des facteurs premiers de n est fini et non vide. On note M son plus grand élément. Alors tous les facteurs premiers de n sont inférieurs ou égaux à M , donc $n \in E_M$, mais $n \notin E_{M-1}$. Ainsi $n \in F_M$.

Donc les ensembles F_M recouvrent $\mathbb{N}^*$ et sont deux à deux disjoints. Ils forment un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^*$.

- (b) La famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable car la série $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ converge. D'après le théorème de sommation par paquets appliqué à la partition $(F_M)_{M \geq 1}$ de $\mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{M=1}^{+\infty} \sum_{n \in F_M} \frac{1}{n^2}.$$

Or $F_M = E_M \setminus E_{M-1}$ et $E_{M-1} \subset E_M$. Comme les sommes portent sur des termes positifs,

$$\sum_{n \in F_M} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in E_{M-1}} \frac{1}{n^2}.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{M=1}^{+\infty} \left(\sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in E_{M-1}} \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

12. D'après la question 10, $S_M = \sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2}$. Ainsi, pour tout $K \geq 1$,

$$\sum_{M=1}^K \left(\sum_{n \in E_M} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in E_{M-1}} \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{M=1}^K (S_M - S_{M-1}),$$

où l'on pose $S_0 = 0$. Cette somme est télescopique et vaut S_K . D'après la question précédente, la série de terme général $S_M - S_{M-1}$ converge et sa somme est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Par conséquent, la suite de ses sommes partielles converge vers cette somme, c'est-à-dire

$$\boxed{S_M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

13. D'après la question 10(a), pour tout nombre premier p ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}}.$$

Ainsi, pour tout $M \geq 1$,

$$S_M = \prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} = \left(\prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \right)^{-1}.$$

Donc

$$\boxed{S_M = \left(\prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \right)^{-1}.$$

14. Par définition de ℓ ,

$$\prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \ell.$$

D'après la question précédente,

$$\prod_{\substack{p \leq M \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{S_M}.$$

Or

$$S_M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Par opérations sur les limites, $\ell = \frac{1}{\pi^2/6} = \frac{6}{\pi^2}$. Comme on a déjà montré que $P_N(C_N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ell$, on obtient

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} P_N(C_N) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Problème 1

Ce problème est subdivisé en cinq parties.

- Dans la partie A, on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et la notion de système orthogonal. On démontre ensuite quelques résultats généraux qui seront utilisés par la suite.
- Dans la partie B, on définit les points de Gauß associés au produit scalaire considéré.
- Dans la partie C, on démontre quelques propriétés générales supplémentaires sur les systèmes orthogonaux. Les trois questions de cette partie sont indépendantes et les résultats démontrés ne sont pas utiles pour les parties suivantes.
- Dans la partie D, on considère un produit scalaire particulier, et on définit les polynômes de Legendre.
- Dans la partie E, on poursuit l'étude des points de Gauß de la partie B dans le cas particulier des polynômes de Legendre. Plus précisément on démontre l'entrelacement des zéros des polynômes de Legendre.

A Polynômes orthogonaux

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall t \in [a, b], w(t) > 0$.

1. Montrer que l'application $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], (P, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)w(t) dt.$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On appelle **système orthogonal** de $\mathbb{R}[X]$ toute famille de polynômes $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

- (i) $\forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l \Rightarrow (P_k, P_l) = 0$.
- (ii) $\forall k \in \mathbb{N}, \deg P_k = k$.

2. Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], (P_n, Q) = 0$.

3. (a) Montrer qu'il existe un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$. *Indication : on voudrait appliquer le théorème d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ et vérifier qu'on obtient bien un système orthogonal. Mais attention, le théorème de cours ne s'applique qu'aux familles finies !*
- (b) Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux systèmes orthogonaux de $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe une suite de réels $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, P_k = \lambda_k Q_k$. On pourra utiliser les questions 2a et 2b pour montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k et Q_k sont colinéaires.

B Points de Gauß

Dans cette partie et la suivante, on considère un système orthogonal $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $(r_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de réels de $]a, b[$ deux à deux distincts, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall t \in [a, b]$, $Q(t) \geq 0$ et

$$P_k(X) = \varepsilon Q(X) \prod_{i=1}^p (X - r_i).$$

On pourra factoriser P_k en faisant apparaître toutes ses racines dans l'intervalle $]a, b[$, et en séparant celles de multiplicité paire de celles de multiplicité impaire.

- (b) Soit $R(X) = \prod_{i=1}^p (X - r_i)$. Montrer que $(P_k, R) \neq 0$. *On pourra utiliser ici la définition du produit scalaire.*
- (c) En déduire que $\deg R = k$, puis que toutes les racines complexes de P_k sont simples, réelles et dans l'intervalle $]a, b[$.
- (d) On désigne désormais par $r_{k,1} < r_{k,2} < \dots < r_{k,k}$ les racines de P_k . On les appelle les points de Gauß du polynôme P_k . Pourquoi cette suite ne dépend-elle que de w et pas du choix du système orthogonal $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$?

C Trois autres propriétés

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe trois réels α_n, β_n et γ_n tels que

$$XP_n = \alpha_n P_{n-1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n+1}.$$

On pourra décomposer XP_n dans la base orthogonale $(P_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, puis, pour en déduire le résultat, démontrer que $\forall A, B, C \in \mathbb{R}[X]$, $(AB, C) = (A, BC)$.

6. Soit φ la forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P) = \int_a^b P(t)w(t) dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note φ_n sa restriction à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Pour tout réel r , on note ψ_r la forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\psi_r(P) = P(r)$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ une famille de réels deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\psi_{x_j})_{1 \leq j \leq n}$ est une base du dual de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. *On pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.*
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille de réels $(\mu_{n,j})_{1 \leq j \leq n}$ tels que

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^n \mu_{n,j} \psi_{r_{n,j}}.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \varphi(P) = \sum_{j=1}^n \mu_{n,j} P(r_{n,j}).$$

On pourra utiliser une division euclidienne.

7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $c_k = (X^k, 1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les déterminants

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} & c_{2n} \end{vmatrix} \quad D_n(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

où $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $\Delta_0 = c_0$ et $D_0(x) = 1$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_n = ((X^{i-1}, X^{j-1}))_{1 \leq i, j \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que A_n est inversible. En déduire $\Delta_n \neq 0$. *On pourra introduire la matrice de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ dans une base orthonormale (attention!), et remarquer que A_n s'exprime comme un produit de deux matrices inversibles.*
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto D_n(x)$ est une application polynomiale dont on précisera le degré. On notera D_n le polynôme associé. *On pourra développer le déterminant par rapport à la dernière ligne.*
- (c) Montrer que si $k < n$, alors $(D_n, X^k) = 0$. En déduire que la famille $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal. *On pourra développer le déterminant par rapport à la dernière ligne.*

D Un exemple : les polynômes de Legendre

On suppose désormais que $a = -1$, $b = 1$ et $\forall x \in [-1, 1]$, $w(x) = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \frac{(X^2 - 1)^n}{2^n n!} \text{ et } L_n = U_n^{(n)}.$$

On note enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, λ_n le coefficient dominant de L_n . Les polynômes $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont appelés polynômes de Legendre.

8. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de L_n , le coefficient dominant λ_n de L_n , et calculer $L_n(1)$. *On pourra appliquer la formule de Leibniz pour calculer $L_n(1)$. On doit trouver $L_n(1) = 1$.*
9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $(U_n, P^{(n)}) = (-1)^n (L_n, P)$. *On pourra montrer par récurrence que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(U_n, P^{(n)}) = (-1)^k (U_n^{(k)}, P^{(n-k)})$.*
- (b) En déduire que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n et de coefficient dominant c . Montrer que $(L_n, P_n) = \frac{c}{\lambda_n} \|L_n\|^2$.
- (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières (L'_{n+1}, L_n) . En déduire une expression de $\|L_n\|$ en fonction de n .
10. (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X^2 - 1)U'_n = 2nXU_n$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1)L'_n + 2XL'_n - n(n+1)L_n = 0.$$

On pourra dériver $n+1$ fois la relation donnée, à l'aide de la formule de Leibniz.

- (b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U'_{n+1} = XU_n$ et $U''_{n+1} = (2n+1)U_n + U_{n-1}$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0.$$

On pourra dériver n fois la première relation et $n-1$ fois la seconde, à l'aide de la formule de Leibniz.

11. Expliciter les polynômes L_0 , L_1 , L_2 et L_3 .

E Entrelacement des zéros des polynômes de Legendre

12. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x - y) \sum_{k=0}^n (2k + 1) L_k(x) L_k(y) = (n + 1) (L_{n+1}(x) L_n(y) - L_n(x) L_{n+1}(y)).$$

(b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n (2k + 1) L_k(x)^2 = (n + 1) (L'_{n+1}(x) L_n(x) - L'_n(x) L_{n+1}(x)).$$

(c) On pose $F_n = \frac{L_n}{L_{n+1}}$. Écrire F_n comme une combinaison linéaire d'éléments simples de première espèce et montrer que tous les résidus sont strictement positifs.

(d) En déduire les inégalités

$$r_{n+1,1} < r_{n,1} < r_{n+1,2} < r_{n,2} < \cdots < r_{n+1,n} < r_{n,n} < r_{n+1,n+1}.$$

Problème 1

1. • Tout d'abord, $(\cdot, \cdot)$ est bien défini, car pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $t \mapsto P(t)Q(t)w(t)$ est continue sur $[a, b]$ en tant que produit d'applications continues.
- Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On a

$$(P, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)w(t) dt = \int_a^b Q(t)P(t)w(t) dt = (Q, P).$$

Donc $(\cdot, \cdot)$ est symétrique.

- Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda P + \mu Q, R) &= \int_a^b (\lambda P(t) + \mu Q(t)) R(t)w(t) dt = \int_a^b (\lambda P(t)R(t)w(t) + \mu Q(t)R(t)w(t)) dt \\ &= \lambda \int_a^b P(t)R(t)w(t) dt + \mu \int_a^b Q(t)R(t)w(t) dt = \lambda(P, R) + \mu(Q, R). \end{aligned}$$

Donc $(\cdot, \cdot)$ est linéaire par rapport à la première variable. De plus, comme il est symétrique, $(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a

$$(P, P) = \int_a^b P(t)^2 w(t) dt.$$

Comme w est à valeurs strictement positives, on a $\forall t \in [a, b], P(t)^2 w(t) \geq 0$. Comme $a < b$ et par positivité de l'intégrale, on en déduit $(P, P) \geq 0$. Donc $(\cdot, \cdot)$ est positif.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(P, P) = 0$. On a alors $\int_a^b P(t)^2 w(t) dt = 0$. Comme l'application $t \mapsto P(t)^2 w(t)$ est continue sur $[a, b]$, positive et d'intégrale nulle, on en déduit qu'elle est nulle sur $[a, b]$. Ainsi, $\forall t \in [a, b], P(t)^2 w(t) = 0$, d'où, comme w est à valeurs strictement positives, $\forall t \in [a, b], P(t) = 0$. Comme l'intervalle $[a, b]$ contient une infinité de valeurs, on en déduit que P est le polynôme nul. Donc $(\cdot, \cdot)$ est défini.

$(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un système orthogonal et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\forall k \in [0, n], \deg P_k = k \leq n$. Donc la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille échelonnée en degré de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une famille libre. De plus, cette famille possède $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc

$(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après la question précédente, $(P_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc il existe $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k.$$

On a alors, par linéarité du produit scalaire,

$$(P_n, Q) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (P_n, P_k) = 0,$$

car $\forall k \in [0, n-1], (P_n, P_k) = 0$, par définition d'un système orthogonal.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], (P_n, Q) = 0.}$$

3. (a) On définit par récurrence la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suivante, et on montre qu'il s'agit d'un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, P_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(X^k, P_i)}{\|P_i\|^2} P_i.$$

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est la famille orthogonalisée de Gram-Schmidt de la base canonique $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est bien définie et est orthogonale. Donc $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie et orthogonale. Il reste à montrer par récurrence forte sur $k \in \mathbb{N}$ que $\deg P_k = k$.

Init. Pour $k = 0$, on a $P_0 = X^0 = 1$. Ainsi $\deg P_0 = 0$.

Hér. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai pour tout $i < k$. D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $i \in [0, k-1]$, $\deg P_i = i$. En particulier, $\forall i \in [0, k-1]$, $\deg P_i \leq k-1$. Donc $\deg \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(X^k, P_i)}{\|P_i\|^2} P_i \right) \leq k-1$. Donc $\deg P_k = k$.

Ainsi, on a vérifié que la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$.

- (b) Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux systèmes orthogonaux, et $k \in \mathbb{N}$. D'après la question 2a, $(Q_i)_{0 \leq i \leq k}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$, on a

$$P_k = \sum_{i=0}^k \frac{(P_k, Q_i)}{\|Q_i\|^2} Q_i.$$

Soit $i \in [0, k-1]$. Comme $\deg Q_i = i < k$, on a, d'après la question 2b, $(P_k, Q_i) = 0$. Ainsi

$$P_k = \frac{(P_k, Q_k)}{\|Q_k\|^2} Q_k = \lambda_k Q_k,$$

avec $\lambda_k = \frac{(P_k, Q_k)}{\|Q_k\|^2}.$

4. (a) Soit $r_1, \dots, r_p$ les racines de P_k dans l'intervalle $]a, b[$ de multiplicités impaires, notées respectivement $2\mu_1 + 1, \dots, 2\mu_p + 1$. Soit $s_1, \dots, s_q$ les racines de P_k dans l'intervalle $]a, b[$ de multiplicités paires, notées respectivement $2\nu_1, \dots, 2\nu_q$. Par théorème de factorisation, il existe alors un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_k(X) = A(X) \prod_{j=1}^q (X - s_j)^{2\nu_j} \prod_{i=1}^p (X - r_i)^{2\mu_i+1}.$$

Comme A n'a pas de racines dans $]a, b[$, il garde un signe constant sur $[a, b]$ (par continuité en a et b). Il existe alors $B \in \mathbb{R}[X]$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que $A(X) = \varepsilon B(X)$ et $\forall t \in [a, b]$, $B(t) \geq 0$. Ainsi

$$P_k(X) = \varepsilon B(X) \underbrace{\left(\prod_{j=1}^q (X - s_j)^{\nu_j} \right)^2 \left(\prod_{i=1}^p (X - r_i)^{\mu_i} \right)^2}_{=Q(X)} \prod_{i=1}^p (X - r_i).$$

Et on a bien $\forall t \in [a, b]$, $Q(t) \geq 0$.

Il existe $p \in \mathbb{N}$, $(r_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de réels de $]a, b[$ deux à deux distincts, $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que $\forall t \in [a, b]$, $Q(t) \geq 0$ et $P_k(X) = \varepsilon Q(X) \prod_{i=1}^p (X - r_i)$.

(b) On a $(P_k, R) = \varepsilon \int_a^b Q(t) R(t)^2 w(t) dt$ et $\forall t \in [a, b]$, $Q(t) R(t)^2 w(t) \geq 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons $(P_k, R) = 0$.

Alors, par positivité de l'intégrale, $\forall t \in [a, b]$, $Q(t) R(t)^2 w(t) = 0$. Comme $\forall t \in [a, b]$, $w(t) \neq 0$, on en déduit $\forall t \in [a, b]$, $Q(t) R(t)^2 = 0$, d'où $QR^2 = 0$ car Q et R sont des polynômes et $[a, b]$ est de cardinal infini.

Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre, $Q = 0$ ou $R = 0$ et donc, dans les deux cas, $P_k = 0$, ce qui est absurde.

$$(P_k, R) \neq 0$$

(c) Supposons $p < k$. Alors $\deg R = p < k$. D'après la question 2b, $(P_k, R) = 0$, ce qui contredit le résultat précédent. Donc $p = k$. Par conséquent, $\deg Q = 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$P_k(X) = \lambda \prod_{i=1}^p (X - r_i).$$

Comme les $(r_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont deux à deux distincts et dans l'intervalle $]a, b[$,

les racines de P_k sont toutes simples, réelles et dans l'intervalle $]a, b[$.

(d) Si $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un autre système orthogonal, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k et Q_k sont colinéaires. Ils ont donc les mêmes racines.

Les points de Gauß ne dépendent pas du système orthogonal choisi.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $XP_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Comme $(P_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, on a

$$XP_n = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(XP_n, P_i)}{\|P_i\|^2} P_i.$$

Remarquons que pour tous $A, B, C \in \mathbb{R}[X]$,

$$(AB, C) = \int_a^b (A(t)B(t)) C(t) w(t) dt = \int_a^b A(t) (B(t)C(t)) w(t) dt = (A, BC).$$

Soit $i \in [0, n-2]$. Comme $\deg(XP_i) = i+1 < n$, on a, d'après la question 2b,

$$(XP_n, P_i) = (P_n, XP_i) = 0.$$

En posant $\alpha_n = \frac{(XP_n, P_{n-1})}{\|P_{n-1}\|^2}$, $\beta_n = \frac{(XP_n, P_n)}{\|P_n\|^2}$ et $\gamma_n = \frac{(XP_n, P_{n+1})}{\|P_{n+1}\|^2}$.

$$XP_n = \alpha_n P_{n-1} = +\beta_n P_n + \gamma_n P_{n+1}.$$

6. (a) Soit $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la famille $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$. Par définition, $\forall i \in [1, n]$, $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et on a :

$$\forall i, j \in [1, n], L_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrons que la famille $(\psi_{x_j})_{1 \leq j \leq n}$ est une famille libre du dual $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$. Soit $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$ des scalaires tels que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \psi_{x_j} = 0.$$

Soit $i \in [1, n]$. On évalue alors cette égalité en L_i , ce qui nous donne

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \psi_{x_j}(L_i) = 0.$$

D'où $\sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{i,j} = 0$ et donc $\lambda_i = 0$. Ainsi la famille $(\psi_{x_j})_{1 \leq j \leq n}$ est libre. Enfin, comme $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$ est de dimension n , et que la famille est de cardinal n , c'est une base.

$$\text{La famille } (\psi_{x_j})_{1 \leq j \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_{n-1}[X]^*.$$

- (b) Les réels $(r_{n,j})_{1 \leq j \leq n}$ sont deux à deux distincts, donc la famille $(\psi_{r_{n,j}})_{1 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$. Comme $\varphi_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^*$,

$$\exists (\mu_{n,j})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n, \varphi_n = \sum_{j=1}^n \mu_{n,j} \psi_{r_{n,j}}.$$

- (c) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On écrit la division euclidienne de P par P_n : il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QP_n + R$ et $\deg R < \deg P_n = n$. De plus, comme $\deg P \leq 2n-1$, on en déduit $\deg Q \leq n-1$. On a alors

$$\varphi(P) = \int_a^b Q(t)P_n(t)w(t) dt + \int_a^b R(t)w(t) dt = (Q, P_n) + \varphi(R).$$

Or

- Comme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(Q, P_n) = 0$.
- Comme $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(R) = \varphi_n(R) = \sum_{i=1}^n \mu_{n,i} \psi_{r_{n,i}}(R)$.
- Enfin, pour tout $j \in [1, n]$, $\psi_{r_{n,j}}(R) = R(r_{n,j})$. Et comme $r_{n,j}$ est une racine de P_n , on a $P(r_{n,j}) = Q(r_{n,j})P_n(r_{n,j}) + R(r_{n,j}) = R(r_{n,j})$.

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \varphi(P) = \sum_{j=1}^n \mu_{n,j} P(r_{n,j}).$$

7. (a) $\left(\frac{P_{i-1}}{\|P_{i-1}\|}\right)_{1 \leq i \leq n+1}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $B_n = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ la matrice de la famille $(X^{j-1})_{1 \leq j \leq n+1}$ dans cette base orthonormée. On a alors

$$\forall i, j \in [1, n+1], b_{i,j} = \frac{(X^{j-1}, P_{i-1})}{\|P_{i-1}\|}.$$

L'expression du produit scalaire dans une base orthonormée donne alors, pour tout $i, j \in [1, n+1]$,

$$(X^{i-1}, X^{j-1}) = \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,i} b_{k,j}.$$

On reconnaît alors la formule d'un produit matriciel : $A_n = B_n^\top B_n$. Comme la famille $(X^{j-1})_{1 \leq j \leq n+1}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice B_n est inversible, et donc $\boxed{A_n \text{ est inversible}}$. Enfin, on remarque que

$$\forall i, j \in [1, n+1], (X^{i-1}, X^{j-1}) = (X^{i+j-2}, 1) = c_{i+j-2}.$$

Ainsi, $\Delta_n = \text{Det}(A_n) \boxed{\neq 0}$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $M_n(x)$ la matrice

$$M_n(x) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \end{pmatrix}.$$

On développe le déterminant $D_n(x) = \text{Det}(M_n(x))$ par rapport à la dernière ligne. Notons $D_{n,j}$ le déterminant de la sous-matrice de $M_n(x)$ obtenue en supprimant la dernière ligne et la j -ème colonne. On a alors :

$$D_n(x) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j} D_{n,j} x^{j-1}.$$

Comme $D_{n,j}$ ne dépend pas de x , on en déduit que D_n est une fonction polynomiale de degré au plus n . De plus, comme $D_{n,n+1} = \Delta_{n-1} \neq 0$, $\boxed{D_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n}$.

- (c) Soit $k < n$. En reprenant les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned} (D_n, X^k) &= \left(\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j} D_{n,j} X^{j-1}, X^k \right) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j} D_{n,j} (X^{j-1}, X^k) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j} D_{n,j} (X^{j+k-1}, 1) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j} D_{n,j} c_{j+k-1} \end{aligned}$$

On reconnaît une formule de développement du déterminant par rapport à la dernière ligne. Ainsi :

$$(D_n, X^k) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ c_k & c_{k+1} & \dots & c_{k+n-1} & c_{k+n} \end{vmatrix} = 0,$$

car la dernière ligne de ce déterminant est égale à la $k + 1$ -ème.

$$\boxed{\forall k \in [0, n-1], (D_n, X^k) = 0}$$

Montrons la famille $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal.

- On a déjà $\forall n \in \mathbb{N}, \deg D_n = n$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité et d'après ce qui précède, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], (D_n, P) = 0$. En particulier, pour tout $m < n$, on a $\deg D_m = m < n$, d'où $(D_n, D_m) = 0$. Donc la famille $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

$$\boxed{\text{La famille } (D_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est un système orthogonal.}}$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $U_n(X) = U_n(-X)$. Par récurrence, on montre

$$\forall k \in \mathbb{N}, U_n^{(k)}(X) = (-1)^k U_n^{(k)}(-X).$$

En particulier, pour $k = n$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, L_n(-X) = (-1)^n L_n(X)}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $\deg U_n = 2n$. Ainsi, $\deg L_n = \deg U_n - n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. De plus, le coefficient dominant de U_n est $\frac{1}{2^n n!}$. Il existe donc $V_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $U_n = \frac{X^{2n}}{2^n n!} + V_n$. Ainsi comme $\forall k \in [0, 2n], (X^{2n})^{(k)} = \frac{(2n)!}{(2n-k)!} X^{2n-k}$, on obtient

$$L_n = \frac{(X^{2n})^{(n)}}{2^n n!} + V_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} X^n + V_n^{(n)}.$$

Comme $\deg V_n^{(n)} \leq n-1$, $\lambda_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$. Pour calculer $L_n(1)$, on applique la formule de Leibniz à U_n . On a

$$U_n = \frac{(X-1)^n (X+1)^n}{2^n n!}.$$

Ainsi

$$L_n = U_n^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n n!} ((X-1)^n)^{(k)} ((X+1)^n)^{(n-k)}.$$

Or, comme 1 est une racine de multiplicité n de $(X-1)^n$, on a $\forall k \in [0, n-1], ((X-1)^n)^{(k)}(1) = 0$. Donc, lorsqu'on évalue en 1 l'égalité précédente, il ne reste que le terme pour $k = n$. Enfin, comme $((X-1)^n)^{(n)} = n!$, on obtient

$$L_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \times n! \times 2^n = \boxed{1}.$$

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. On montre par récurrence que

$$\forall k \in [0, n], (U_n, P^{(k)}) = (-1)^k (U_n^{(k)}, P^{(n-k)}).$$

Init. La propriété est vérifiée pour $k = 0$.

Hér. Soit $k \in [0, n-1]$. On suppose que $(U_n, P^{(n)}) = (-1)^k (U_n^{(k)}, P^{(n-k)})$. On effectue une intégration par parties.

$$\begin{aligned} (U_n^{(k)}, P^{(n-k)}) &= \int_{-1}^1 U_n^{(k)}(t) P^{(n-k)}(t) dt \\ &= \left[U_n^{(k)}(t) P^{(n-(k+1))}(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 U_n^{(k+1)}(t) P^{(n-(k+1))}(t) dt \end{aligned}$$

Comme $k \in [0, n-1]$ et 1 et -1 sont des racines de U_n de multiplicité n , $U_n^{(k)}(1) = 0 = U_n^{(k)}(-1)$. Ainsi :

$$(U_n^{(k)}, P^{(n-k)}) = - \int_{-1}^1 U_n^{(k+1)}(t) P^{(n-(k+1))}(t) dt = -(U_n^{(k+1)}, P^{(n-(k+1))}).$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $(U_n, P_n^{(n)}) = (-1)^{k+1} (U_n^{(k+1)}, P^{(n-(k+1))})$.

D'après la principe de récurrence, la propriété est vérifiée pour tout $k \in [0, n]$. En particulier pour $k = n$,

$$(U_n, P^{(n)}) = (-1)^k (L_n, P).$$

- (b) On sait déjà que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg L_n = n$. Montrons que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale. Pour cela, montrons que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$, $(L_m, L_n) = 0$. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$. D'après la question précédente, on a

$$(L_n, L_m) = (-1)^n (U_n, L_m^{(n)}).$$

Or, comme $\deg L_m = m < n$, $L_m^{(n)} = 0$. Ainsi, $(L_n, L_m) = 0$.

La famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n et de coefficient dominant c . Comme $\deg L_n = n$, on a $\deg \left(P - \frac{c}{\lambda_n} L_n \right) \leq n$. Et comme le coefficient dominant de L_n est λ_n , le coefficient de degré n de $P - \frac{c}{\lambda_n} L_n$ est nul. Ainsi $\deg \left(P - \frac{c}{\lambda_n} L_n \right) \leq n-1$. Et puisque $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal, on a $(L_n, P - \frac{c}{\lambda_n} L_n) = 0$, d'après la question 2b. Finalement

$$(L_n, P) - \frac{c}{\lambda_n} (L_n, L_n) = 0$$

$$(L_n, P) = \frac{c}{\lambda_n} \|L_n\|^2$$

- (d) • D'une part, on a $\deg(L'_{n+1}) = n$, et L'_{n+1} a pour coefficient dominant $(n+1)\lambda_{n+1}$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} (L'_{n+1}, L_n) &= \frac{(n+1)\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \|L_n\|^2 \\ &= (n+1) \times \frac{((2n+2)!)}{2^{n+1}((n+1)!)^2} \times \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} \|L_n\|^2 \\ &= (2n+1) \|L_n\|^2. \end{aligned}$$

- D'autre part, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
(L'_{n+1}, L_n) &= \int_{-1}^1 L'_{n+1}(t) L_n(t) dt \\
&= [L_{n+1}(t) L_n(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 L_{n+1}(t) L'_n(t) dt \\
&= L_{n+1}(1) L_n(1) - L_{n+1}(-1) L_n(-1) - (L_{n+1}, L'_n).
\end{aligned}$$

Or $L_n(1) = L_{n+1}(1) = 1$, $L_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$, $L_n(-1) = (-1)^n$ et $(L_{n+1}, L'_n) = 0$ car $\deg(L'_n) < \deg(L_{n+1})$ et la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal. On a donc

$$(L'_{n+1}, L_n) = 1 - (-1)^{2n+1} = 2.$$

Donc $\|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
(X^2 - 1)U'_n &= (X^2 - 1) \frac{2nX(X^2 - 1)^{n-1}}{2^n n!} = 2nX \frac{(X^2 - 1)^n}{2^n n!} \\
\boxed{(X^2 - 1)U'_n &= 2nXU_n}.
\end{aligned}$$

En dérivant $n+1$ fois cette égalité, on obtient, d'après la formule de Leibniz,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (X^2 - 1)^{(k)} U_n^{(n+2-k)} = 2n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (X)^{(k)} U_n^{(n+1-k)}.$$

Comme $(X^2 - 1)^{(k)} = 0$ si $k > 2$ et $(X)^{(k)} = 0$ si $k > 1$, cela donne (et on vérifie que cette égalité est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$)

$$\begin{aligned}
(X^2 - 1)U_n^{(n+2)} + 2(n+1)XU_n^{(n+1)} + (n+1)nU_n^{(n)} &= 2nXU_n^{(n+1)} + 2n(n+1)U_n^{(n)} \\
\boxed{(X^2 - 1)U_n'' + 2XL'_n - n(n+1)U_n} &= 0.
\end{aligned}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
U'_{n+1} &= 2(n+1)X \frac{(X^2 - 1)^n}{2^{n+1}(n+1)!} = X \frac{(X^2 - 1)^n}{2^n n!} \\
\boxed{U'_{n+1} &= XU_n}.
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède et comme $(X^2 - 1)U_{n-1} = 2nU_n$, on a :

$$\begin{aligned}
U''_{n+1} &= U_n + XU'_n = U_n + X^2U_{n-1} = U_n + (X^2 - 1)U_{n-1} + U_{n-1} \\
&= U_n + 2nU_n + U_{n-1} \\
\boxed{U''_{n+1} &= (2n+1)U_n + U_{n-1}}.
\end{aligned}$$

En dérivant n fois la première égalité et $(n-1)$ fois la seconde, on obtient, d'après la formule de Leibniz (de la même manière qu'à la question précédente), les deux égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
L_{n+1} &= XL_n + nU_n^{(n-1)}, \\
L_{n+1} &= (2n+1)U_n^{(n-1)} + L_{n-1}.
\end{aligned}$$

En multipliant la première par $2n + 1$ et la seconde par n et en faisant la différence, on obtient

$$(n + 1)L_{n+1} - (2n + 1)XL_n + nL_{n-1} = 0$$

11. On a $L_0 = 1$ et $L_1 = X$. En utilisant la relation précédente, on obtient

$$L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1) \text{ et } L_3 = \frac{1}{2}(5X^3 - 3X).$$

12. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. D'après la question 10b, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(2k + 1)xL_k(x) = (k + 1)L_{k+1}(x) + kL_{k-1}(x)$. Cette égalité est vérifiée pour $k = 0$, en posant $L_{-1} = 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned} (x - y) \sum_{k=0}^n (2k + 1)L_k(x)L_k(y) &= \sum_{k=0}^n ((k + 1)L_{k+1}(x) + kL_{k-1}(x)) L_k(y) \\ &\quad - \sum_{k=0}^n ((k + 1)L_{k+1}(y) + kL_{k-1}(y)) L_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n [(k + 1)(L_{k+1}(x)L_k(y) - L_k(x)L_{k+1}(y)) - k(L_k(x)L_{k-1}(y) - L_{k-1}(x)L_k(y))]. \end{aligned}$$

On reconnaît alors une somme télescopique.

$$(x - y) \sum_{k=0}^n (2k + 1)L_k(x)L_k(y) = (n + 1)(L_{n+1}(x)L_n(y) - L_n(x)L_{n+1}(y)).$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq y$. D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=0}^n (2k + 1)L_k(x)L_k(y) = (n + 1) \left(\frac{L_{n+1}(x) - L_{n+1}(y)}{x - y} L_n(y) - \frac{L_n(x) - L_n(y)}{x - y} L_{n+1}(y) \right).$$

En faisant tendre y vers x , on obtient le résultat voulu.

$$\sum_{k=0}^n (2k + 1)L_k(x)^2 = (n + 1)(L'_{n+1}(x)L_n(x) - L'_n(x)L_{n+1}(x)).$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 4, on a $L_{n+1} = \lambda_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} (X - r_{n+1,i})$. Comme $\deg \frac{L_n}{L_{n+1}} = -1 < 0$,

$F_n = \frac{L_n}{L_{n+1}}$ admet une décomposition en élément simples de la forme

$$F_n = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{X - r_{n+1,i}}.$$

Avec $(a_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Par théorème de cours, $a_i = (F_n(X)(X - r_{n+1,i}))|_{X=r_{n+1,i}}$. Or d'après la question précédente, on a l'égalité entre polynômes suivante, puisque les fonctions polynomiales associées sont égales sur $\mathbb{R}$, qui est de cardinal infini.

$$\sum_{k=0}^n (2k + 1)L_k^2 = (n + 1)(L'_{n+1}L_n - L'_nL_{n+1})$$

On divise cette égalité par $L_{n+1}L'_{n+1}$ et on isole F_n .

$$F_n = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)L_{n+1}L'_{n+1}} \sum_{k=0}^n (2k+1)L_k^2 + \frac{L'_n}{L'_{n+1}}$$

Soit $i \in [1, n+1]$. On a :

$$F_n(X)(X - r_{n+1,i}) = \underbrace{\frac{X - r_{n+1,i}}{(n+1)L_{n+1}L'_{n+1}}}_{=G_1(X)} \underbrace{\sum_{k=0}^n (2k+1)L_k^2}_{=G_2(X)} + \underbrace{\frac{L'_n}{L'_{n+1}}(X - r_{n+1,i})}_{=G_3(X)}.$$

- Tout d'abord, G_2 est un polynôme, et on a clairement $G_2(r_{n+1,i}) > 0$.
- Ensuite, $r_{n+1,i}$ est une racine simple de L_{n+1} , donc n'est pas racine de L'_{n+1} . On en déduit que $r_{n+1,i}$ est racine de $G_3 : G_3(r_{n+1,i}) = 0$.

- Enfin, on a $L'_{n+1}(X) = \lambda_n \sum_{k=1}^{n+1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} (X - r_{n+1,j}) \right)$. Donc

$$L'_{n+1}(r_{n+1,i}) = \lambda_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (r_{n+1,i} - r_{n+1,j}) = \left(\frac{L_{n+1}(X)}{X - r_{n+1,i}} \right)_{|X=r_{n+1,i}}.$$

$$\text{Ainsi, } G_1(r_{n+1,i}) = \frac{1}{(n+1)(L'_{n+1}(r_{n+1,i}))^2} > 0. \text{ Finalement}$$

$$a_i = (F_n(X)(X - r_{n+1,i}))_{|X=r_{n+1,i}} > 0.$$

On a $F_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{X - r_{n+1,i}}$, avec $\forall i \in [1, n+1], a_i > 0$.

(d) Soit $i \in [1, n+1]$. En reprenant la factorisation de L_{n+1} , on a

$$a_i = \left(\frac{L_n(X)(X - r_{n+1,i})}{L_{n+1}(X)} \right)_{|X=r_{n+1,i}} = \frac{L_n(r_{n+1,i})}{\lambda_{n+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (r_{n+1,i} - r_{n+1,j})}$$

Or

- $a_i > 0, \lambda_{n+1} > 0$.
- Pour tout $j \in [1, n+1], (r_{n+1,i} - r_{n+1,j})$ est strictement positif ssi $j < i$.

Donc $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (r_{n+1,i} - r_{n+1,j})$ est du signe de $(-1)^{n-i+1}$.

On en déduit que pour tout $i \in [1, n+1], L_n(r_{n+1,i})$ est non nul et du signe de $(-1)^{n-i+1}$. Par conséquent, pour tout $i \in [1, n], L_n$ change de signe sur l'intervalle $[r_{n+1,i}, r_{n+1,i+1}]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, L_n admet donc au moins une racine dans chacun de ces intervalles. Comme L_n admet exactement n racines, il admet exactement une racine dans chacun de ces intervalles. On en déduit le résultat.

$$r_{n+1,1} < r_{n,1} < r_{n+1,2} < r_{n,2} < \dots < r_{n+1,n} < r_{n,n} < r_{n+1,n+1}.$$

Problème 1

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$. On pose également $f(x) = x - x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$.

1. (a) Étudier f sur $[0, 1]$ en précisant sa monotonie et son maximum.
- (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- (c) Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$.
2. (a) Pour tout $n \geq 0$, simplifier $S_n = \sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{u_{k+1}}{u_k} \right)$.
- (b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ puis celle de $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.
3. Pour tout n , on pose $w_n = nu_n$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $w_{n+1} - w_n = u_n(1 - (n+1)u_n)$.
 - (b) Étudier la monotonie de la suite (w_n) puis montrer que cette suite converge vers une limite finie que l'on notera ℓ .
 - (c) Si l'on suppose que $\ell \neq 1$, donner un équivalent de u_n en fonction de ℓ .
 - (d) En considérant la série $\sum_{n \geq 0} (w_{n+1} - w_n)$, conclure que $\ell = 1$.

Problème 2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E . On rappelle qu'un sous-espace vectoriel V de E est dit **stable** par f lorsque $\forall x \in V, f(x) \in V$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \text{Im}(f^n)$ et $G_n = \text{Ker}(f^n)$.

1. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n et G_n sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$ et $G_n \subset G_{n+1}$.
Par une récurrence qu'on ne détaillera pas, on peut alors démontrer que pour tous $k \leq n$ entiers, $F_n \subset F_k$ et $G_k \subset G_n$, ce dont on pourra se servir dans la suite du problème.
2. On appelle **cœur** de l'endomorphisme f l'ensemble $\mathcal{C}$ défini par : $\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. On rappelle que cela signifie que $x \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, x \in F_n$.
 On appelle **nilespace** de l'endomorphisme f l'ensemble $\mathcal{N}$ défini par : $\mathcal{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$. On rappelle que cela signifie que $x \in \mathcal{N}$ si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}, x \in G_n$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{N}$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
 - (b) Démontrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ sont stables par f .
 - (c) Démontrer que f est injective si et seulement si $\mathcal{N} = \{0\}$.
 - (d) Démontrer que f est surjective si et seulement si $\mathcal{C} = E$.

- (e) Déterminer $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ lorsque f est un automorphisme de E .
3. Dans toute cette question, on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = F_{n+1}$.
- Établir que : $\forall p \in \mathbb{N}, F_{n+p} = F_n$.
 - Justifier l'existence d'un plus petit entier n tel que $F_n = F_{n+1}$. Ce plus petit entier est noté dans la suite r .
 - Démontrer que $\mathcal{C} = F_r$.
 - Démontrer que $E = \mathcal{C} + G_r$.
4. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier n tel que $G_n = G_{n+1}$.
- Établir que : $\forall p \in \mathbb{N}, G_{n+p} = G_n$.
 - Justifier l'existence d'un plus petit entier n tel que $G_n = G_{n+1}$. Ce plus petit entier est noté dans la suite s .
 - Démontrer que $\mathcal{N} = G_s$.
 - Démontrer que $F_s \cap \mathcal{N} = \{0\}$.
5. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n = F_{n+1}$ et $G_{n+1} = G_{n+2}$. Montrer que $G_n = G_{n+1}$.
6. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_n = G_{n+1}$ et $F_{n+1} = F_{n+2}$. Montrer que $F_n = F_{n+1}$.
7. On suppose les conditions des questions 3 et 4 réalisées, c'est-à-dire qu'il existe un plus petit entier naturel, noté toujours r , tel que $F_r = F_{r+1}$ et qu'il existe un plus petit entier naturel, noté toujours s , tel que $G_s = G_{s+1}$. On suppose de plus que r et s sont tous les deux non nuls.
- Montrer que $r = s$.
 - Établir que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$ sont supplémentaires dans E .
 - Montrer que $f|_{\mathcal{C}} \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$ est bien définie et qu'elle est bijective.
 - Montrer que $f|_{\mathcal{N}} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$ est bien définie et qu'elle est nilpotente, c'est-à-dire qu'une de ses puissances est l'application nulle.
8. Dans cette question $E = \mathbb{R}[X]$.
- Trouver un endomorphisme de E tel que r existe mais s n'existe pas.
 - Trouver un endomorphisme de E tel que s existe mais r n'existe pas.
 - Trouver un endomorphisme de E tel que r et s n'existent pas.

Problème 3

Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$. Ainsi la matrice $M(1, 0, 0)$ est la matrice identité, notée I_3 et on note $J = M(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices de cette forme : $E = \{M(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

A Calcul matriciel

- Calculer J^2 et J^3 .
 - En déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Montrer que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E . Ce produit est-il commutatif ?
 (b) En déduire que pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$M(x, y, z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x + y + z) ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) I_3.$$

- (c) Déterminer une condition suffisante (portant sur x, y et z) pour que $M(x, y, z)$ soit inversible et donner sa matrice inverse.
 (d) Montrer que cette condition est également nécessaire.
3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer les produits $M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer toutes les solutions $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ du système $M(x, y, y) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (x + 2y) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ et montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en fait partie.

(c) On définit les matrices $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D(x, y) = \begin{pmatrix} x + 2y & 0 & 0 \\ 0 & x - y & 0 \\ 0 & 0 & x - y \end{pmatrix}$. Vérifier à

l'aide de ce qui précède que $M(x, y, y)Q = QD(x, y)$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(x, y, y)^n = QD(x, y)^n Q^{-1}$.

(e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M(x, y, y)^n = \frac{1}{3}(x + 2y)^n M(1, 1, 1) + \frac{1}{3}(x - y)^n M(2, -1, -1).$$

B Marche aléatoire sur trois points

Kvicha, Ousmane et Bradley s'entraînent au foot avec Luis. Ils se passent un ballon suivant la règle suivante. À l'instant initial ($t = 0$), Kvicha a le ballon. Celui qui a le ballon à un instant donné ($t = n \in \mathbb{N}$) l'envoie à l'entraîneur Luis qui le renvoie (à l'instant $n + 1$) à l'un des trois joueurs :

- il le renvoie au même joueur avec probabilité $1 - 2p$,
- sinon il le revoie à un des deux autres joueurs de manière équiprobable.

Par exemple avec $p = \frac{1}{4}$, Kvicha a le ballon au départ. À l'instant $t = 1$, Kvicha l'aura avec la probabilité $\frac{1}{2}$, et Ousmane ou Bradley l'aura, chacun avec la probabilité $\frac{1}{4}$. On suppose que cette expérience est bien modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. On définit les événements suivants pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- K_n : « Kvicha a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $k_n = P(K_n)$ sa probabilité ;
- O_n : « Ousmane a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $o_n = P(O_n)$ sa probabilité ;
- B_n : « Bradley a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $b_n = P(B_n)$ sa probabilité.

4. Déterminer, en fonction de p , les probabilités conditionnelles $P_{K_n}(K_{n+1})$, $P_{K_n}(O_{n+1})$, $P_{K_n}(B_{n+1})$, $P_{O_n}(K_{n+1})$, $P_{O_n}(O_{n+1})$, $P_{O_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(K_{n+1})$, $P_{B_n}(O_{n+1})$ et $P_{B_n}(B_{n+1})$.
5. Exprimer les probabilités k_{n+1} , o_{n+1} et b_{n+1} en fonction de k_n , o_n et b_n et en déduire une matrice M telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} k_{n+1} \\ o_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} k_n \\ o_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
6. En déduire les probabilités k_n , o_n et b_n (en fonction de n et p) et leur limite quand n tend vers $+\infty$.

Problème 4

La première partie de ce problème a déjà été traitée en grande partie, mais un petit rappel ne fait pas de mal.

Wallis, le retour

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_{n+1} \leq I_n$.
3. En utilisant par exemple un changement de variable, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
4. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

5. Montrer que $I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.
6. Montrer que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})$ est constante et déterminer cette valeur.
7. En déduire un équivalent simple de I_n .
8. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer I_{2k} et I_{2k+1} à l'aide de factorielles.
9. Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(2k+1)I_{2k+1}}{2kI_{2k}}$ et en déduire que $\pi = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{4k}(k!)^4}{k((2k)!)^2}$.

Un encadrement

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f' soit strictement décroissante. Soit g la fonction définie sur $[a, b]$ par $g : t \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$.

10. Soit $d = f - g$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que d soit croissante sur $[a, c]$ et décroissante sur $[c, b]$.
On pourra dériver d et penser aux accroissements finis.
11. Démontrer que $\int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt$.
12. Calculer $\int_a^b g(t) dt$.

13. Justifier l'existence du nombre $M_2 = \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|$.

14. Le but de cette question est de montrer que

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) - g(t) \leq M_2 \frac{(t-a)(b-t)}{2}. \quad (\clubsuit)$$

(a) Vérifier l'inégalité $(\clubsuit)$ pour $t = a$ et $t = b$.

(b) Soit $t \in]a, b[$. On pose h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - g(x) - K(x-a)(b-x)$ où K est une constante telle que $h(t) = 0$. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^2$ et donner l'expression de h'' .

(c) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h''(c) = 0$.

(d) En déduire que $|K| \leq \frac{M_2}{2}$ puis démontrer l'inégalité $(\clubsuit)$ souhaitée.

15. Montrer, à partir de l'inégalité $(\clubsuit)$ précédente, que

$$\int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12}.$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ définie sur $[n, n+1]$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et en déduire l'encadrement

$$0 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}.$$

Formule de Stirling

Étant donné $n > 1$ un nombre entier, on pose

$$u_n = \ln \left(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \right) - \ln(n!) \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}.$$

17. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

18. En calculant de deux manières différentes $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2u_n - u_{2n}$, démontrer que $\ell = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)$.

19. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Problème 1

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$. On pose également $f(x) = x - x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$.

1. (a) f est un trinôme de racines 0 et 1, de coefficient dominant $-1 < 0$, donc sur $[0, 1]$, f est croissante puis décroissante et admet un maximum en $\frac{1}{2}$, égal à $\frac{1}{4}$.
- (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par récurrence :

Init. $0 < u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Si $n = 0$, $0 < u_1 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$.

Si $n \geq 1$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. On peut alors appliquer f , croissante sur cet intervalle.

Alors $0 < u_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Or $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2}$.

Et $\frac{n}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)^2} < 0$. Donc $\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}$.

Finalement, $0 < u_{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$, cqfd.

Par encadrement, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$.

- (c) La série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ est une série télescopique car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$. Comme (u_n) converge, $\boxed{\text{cette série est convergente également}}$.

2. (a) Pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^n \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$.

Donc $\boxed{S_n = \ln(u_{n+1}) + \ln(2)}$.

- (b) Comme $u_n \rightarrow 0$, $\ln(u_{n+1}) \rightarrow -\infty$ donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n \in \mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ diverge}}$.

On a pour tout n : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n$ avec $u_n \rightarrow 0$.

Donc $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(1 - u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -u_n$.

Par comparaison, comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge, $\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ diverge également}}$.

3. Pour tout n , on pose $w_n = nu_n$.

(a) Soit $n \geq 0$. $w_{n+1} - w_n = (n+1)(u_n - u_n^2) - nu_n = u_n - (n+1)u_n^2 = \boxed{u_n(1 - (n+1)u_n)}$.

(b) Comme $u_n \leq \frac{1}{n+1}$, $1 - (n+1)u_n \leq 0$. De plus $u_n \geq 0$, donc $w_{n+1} - w_n \geq 0$ et donc

$\boxed{(w_n) \text{ est croissante}}$.

De plus $u_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc $w_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$. Donc (w_n) est majorée.

Finalement $\boxed{(w_n) \text{ converge}}$. Notons ℓ sa limite.

(c) Supposons que $\ell \neq 1$.

On a $\frac{nu_n}{\ell} \rightarrow 1$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{\ell}{n}}$.

(d) Dans ce cas $w_{n+1} - w_n = u_n(1 - nu_n - u_n) \sim (1 - \ell)u_n$ car $\ell \neq 1$.

Or $\sum (1 - \ell)u_n$ diverge (car $(1 - \ell)u_n \sim \frac{(1 - \ell)\ell}{n}$, terme général d'une série de Riemann divergente).

Mais comme série télescopique, $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge car $w_n \rightarrow \ell$.

Ceci constitue une contradiction. Finalement l'hypothèse $\ell \neq 0$ est fausse.

Donc $\boxed{\ell = 1}$.

Problème 2

1. (a) Une composée d'endomorphismes est un endomorphisme, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathcal{L}(E)$. Le noyau et l'image d'un endomorphisme de E sont des sous-espaces vectoriels de E .

$\boxed{F_n \text{ et } G_n \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } E}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $x \in F_{n+1}$, il existe $a \in E$ tel que $x = f^{n+1}(a) = f^n(f(a))$ ceci montre que $x \in F_n$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n}$.

Soit $x \in G_n$, on a $f^n(x) = 0$ donc $f(f^n(x)) = f^{n+1}(x) = 0$ et par suite $x \in G_{n+1}$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, G_n \subset G_{n+1}}$.

2. (a) Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel donc $\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un sous-espace vectoriel puisque d'après la question 1b pour tout n entier naturel F_n est un sous-espace vectoriel.

$\boxed{\mathcal{C} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

Vérifions que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de E .

- $\mathcal{N} \subset E$ car $\forall n \in \mathbb{N}, G_n \subset E$.
- $0 \in \mathcal{N}$ car $0 \in G_0$.
- Soit $(x, y) \in \mathcal{N}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, démontrons que $\lambda x + y \in \mathcal{N}$. On a

$$x \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, x \in G_k \text{ et } y \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}, y \in G_p.$$

Supposons que $k \leq p$, en utilisant la question 1b, on a $G_k \subset G_p$. On a ainsi $(x, y) \in G_p^2$, comme G_p est un sous-espace vectoriel de E , on a $\lambda x + y \in G_p \subset \mathcal{N}$. Même chose si on a $p < k$.

$\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de E .

- (b) Soit $x \in \mathcal{N}$, montrons que $f(x) \in \mathcal{N}$. On a $x \in \mathcal{N}$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in G_k$, c'est-à-dire $f^k(x) = 0$. On a alors $f(f^k(x)) = f^k(f(x)) = 0$ ce qui implique que $f(x) \in G_k$ donc $f(x) \in \mathcal{N}$.

$\mathcal{N}$ est stable par f .

Soit $x \in \mathcal{C}$, montrons que $f(x) \in \mathcal{C}$. On a : $x \in \mathcal{C}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in F_n$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(y_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x = f^n(y_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(f^n(y_n)) = f^n(f(y_n))$ donc $f(x) \in F_n$ et finalement $f(x) \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ est stable par f .

- (c) $\Rightarrow$ On suppose que f est injective, démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\mathcal{H}_n : G_n = \{0\}$$

Ainsi, on a aura : $\mathcal{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = \{0\}$

Init. Pour $n = 0$, on a $G_0 = \text{Ker}(Id) = \{0\}$, ce qui démontre que $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Init. D'une part $\mathcal{N}$ contient $\{0\}$ car c'est un sev de E .

D'autre part, soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $G_n = \{0\}$. Soit $x \in G_{n+1}$, on a $f^{n+1}(x) = 0$ donc $f^n(f(x)) = 0$, c'est-à-dire $f(x) \in G_n$ donc $f(x) = 0$. L'application f étant injective cela implique que $x = 0$, d'où $G_{n+1} = \{0\}$.

Ceci achève la récurrence et démontre que $\mathcal{N} = \{0\}$.

- $\Leftarrow$ Réciproquement supposons que $\mathcal{N} = \{0\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $G_n = \{0\}$ en particulier $G_1 = \text{Ker} f = \{0\}$ donc f est injective.

f est injective si et seulement si $\mathcal{N} = \{0\}$.

- (d) $\Rightarrow$ Supposons que f est surjective et démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\mathcal{H}_n : F_n = E$$

Ainsi, on aura $\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = E$.

Init. Pour $n = 0$, on a $F_0 = \text{Im}(Id) = E$, ce qui démontre que $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $F_n = E$. Soit $y \in E$, $\exists x \in E$, $y = f^n(x)$, or l'application f est, par hypothèse, surjective : $\exists a \in E$, $f(a) = x$. Ainsi $y = f^n(f(a)) = f^{n+1}(a)$ et $y \in \text{Im}(f^{n+1}) = F_{n+1}$. Ce qui démontre que $F_{n+1} = E$ et qui implique que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Cela achève la récurrence.

- $\Leftarrow$ Réciproquement si $\mathcal{C} = E$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = E$. En particulier $F_1 = \text{Im} f = E$, ce qui montre la surjectivité de f .

f est surjective si et seulement si $\mathcal{C} = E$.

- (e) Si f est un automorphisme de E alors f est bijective donc surjective et injective. D'après les deux questions précédentes, on a

$$\boxed{\mathcal{N} = \{0\} \text{ et } \mathcal{C} = E}.$$

3. (a) Démontrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{H}_p : F_{n+p} = F_n$.

Init. Pour $p = 0$, la propriété est évidente.

Hér. Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $F_{n+p} = F_n$, démontrons que $F_{n+p+1} = F_n$.

D'après la question 1b, on a $F_{n+p+1} \subset F_n$.

Réciproquement, soit $y \in F_n$. Alors $y \in F_{n+p}$ donc il existe $x \in E$ tel que $f^{n+p}(x) = y$, c'est-à-dire $f^p(f^n(x)) = y$. On a $f^n(x) \in F_n$ donc d'après l'hypothèse de la question $F_n = F_{n+1}$, on a $a \in E$ tel que $f^n(x) = f^{n+1}(a)$ donc $y = f^{n+p+1}(a)$, c'est-à-dire $y \in F_{n+p+1}$. D'où $F_n = F_{n+p+1}$, ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, F_{n+p} = F_n}.$$

- (b) On considère $\{n \in \mathbb{N}, F_n = F_{n+1}\}$, d'après l'hypothèse de la question cet ensemble est non vide. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum, d'où l'existence de r .

- (c) Pour tout $k \leq r$, on a $F_r \subset F_k$ d'après la question 1b donc $\bigcap_{k=0}^r F_k = F_r$.

D'autre part, d'après la question 3a, pour tout $k \geq r$, $F_k = F_r$. Finalement : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = F_r$.

$$\boxed{\mathcal{C} = F_r}.$$

- (d) D'après la question précédente, il s'agit de démontrer que $E = F_r + G_r$. Soit $x \in E$. On procède par analyse-synthèse pour se donner des idées. À noter qu'on ne demande pas l'unicité d'une décomposition (et d'ailleurs on n'y aboutira pas dans l'analyse).

Ana. Soit $y \in F_r$ et $z \in G_r$ tels que $x = y + z$.

L'application f^r étant linéaire et z appartenant à $\text{Ker}(f^r)$, on a $f^r(x) = f^r(y)$. D'après la question 3a, on a $F_r = F_{2r}$, comme $f^r(x) \in F_r$, on a $f^r(x) \in F_{2r}$ donc il existe $a \in E$ tel que $f^r(x) = f^{2r}(a)$. On observe alors que $f^r(x - f^r(a)) = 0_E$.

On est alors tenté de poser $y = f^r(a)$ et on obtient la décomposition $x = f^r(a) + x - f^r(a)$.

Syn. Cette décomposition convient car $f^r(a) \in F_r$ et $x - f^r(a) \in G_r$ car $f^r(x - f^r(a)) = f^r(x) - f^{2r}(a) = 0$.

Ceci montre que $E \subset \mathcal{C} + G_r$, la réciproque étant immédiate pour une somme de sev de E . Donc

$$\boxed{E = \mathcal{C} + G_r}.$$

4. (a) Démontrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{H}_p : G_{n+p} = G_n$.

Init. Pour $p = 0$ la propriété est évidente.

Hér. Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $G_{n+p} = G_n$, démontrons que $G_{n+p+1} = G_n$.

D'une part, d'après la question 1b, on a toujours $G_n \subset G_{n+p+1}$.

Réciproquement, soit $x \in G_{n+p+1}$. On a $f^{n+p+1}(x) = 0$ donc $f^{n+1}(f^p(x)) = 0$, c'est-à-dire que $f^p(x) \in G_{n+1} = G_n$ d'où $f^n(f^p(x)) = 0$ et donc $x \in G_{n+p} = G_n$. Finalement $G_{n+p+1} = G_n$ ce qui démontre $\mathcal{H}_{p+1}$.

On a montré que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, G_{n+p} = G_n}.$$

- (b) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, G_{n+1} = G_n\}$ est non vide par hypothèse de la question. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum, d'où l'existence de s .
- (c) D'après la question 1b, pour tout $k \leq s$, on a $G_k \subset G_s$ et d'après la question précédente pour tout $k \geq s$, on a $G_k = G_s$. D'où

$$\boxed{\mathcal{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k = G_s}.$$

- (d) D'après la question précédente, il s'agit de démontrer que $F_s \cap G_s = \{0\}$. Soit $x \in F_s \cap G_s$, on a

$$\begin{cases} \exists a \in E, f^s(a) = x \\ f^s(x) = 0 \end{cases}$$

On a ainsi $f^{2s}(a) = f^s(x) = 0$, donc $a \in G_{2s}$. Or $G_{2s} = G_s$ d'après la question 4a, ceci montre que $a \in G_s$ et par suite $x = f^s(a) = 0$.

$$\boxed{F_s \cap \mathcal{N} = \{0\}}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'inclusion $G_n \subset G_{n+1}$ est toujours vraie.
Réciproquement, soit $x \in G_{n+1}$. On a $f^{n+1}(x) = 0$. On a $f^n(x) \in F_n = F_{n+1}$, donc il existe $a \in E$ tel que $f^n(x) = f^{n+1}(a)$. On a

$$f^{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow f^{n+2}(a) = 0 \Leftrightarrow a \in G_{n+2} \Leftrightarrow a \in G_{n+1} \Leftrightarrow f^{n+1}(a) = f^n(x) = 0$$

donc $x \in G_n$, ce qui démontre que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_n = F_{n+1} \text{ et } G_{n+1} = G_{n+2} \Rightarrow G_n = G_{n+1}}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'inclusion $F_{n+1} \subset F_n$ est toujours vraie.
Réciproquement, soit $y \in F_n$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^n(x)$. Ainsi $f(y) = f^{n+1}(x) \in F_{n+1} = F_{n+2}$. Donc il existe $a \in E$ tel que $f(y) = f^{n+1}(x) = f^{n+2}(a)$. On a

$$f^{n+1}(x) = f^{n+2}(a) \Leftrightarrow f^{n+1}(x) - f^{n+2}(a) = 0 \Leftrightarrow f^{n+1}(x - f(a)) = 0 \Leftrightarrow x - f(a) \in G_{n+1} = G_n,$$

donc $f^n(x - f(a)) = 0$, c'est-à-dire $f^n(x) = f^{n+1}(a)$ d'où $y = f^{n+1}(a)$ et donc $y \in F_{n+1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, G_n = G_{n+1} \text{ et } F_{n+1} = F_{n+2} \Rightarrow F_n = F_{n+1}}.$$

7. (a) • Supposons dans un premier temps que $r > s$. On a $\forall k \geq s$, $G_k = G_{k+1}$, en particulier $G_{r-1} = G_r$ (puisque $r - 1 \geq s$) et $F_{r+1} = F_{r+2}$. D'après la question 6, ces deux égalités impliquent que $F_{r-1} = F_r$ ce qui est contradictoire avec la minimalité de r .
- Supposons que $s > r$. On a $\forall k \geq r$, on a $F_k = F_{k+1}$, en particulier $F_{s-1} = F_s$ (puisque $s - 1 \geq r$) et $G_s = G_{s+1}$. D'après la question 5, ces deux égalités impliquent que $G_{s-1} = G_s$ ce qui est contradictoire avec la minimalité de s .

Finalement, $\boxed{r = s}$.

- (b) D'après les questions 3c et 4c, on a $\mathcal{C} = F_r$ et $\mathcal{N} = G_s$. Comme $r = s$ et d'après les questions 3d et 4d, on a $E = \mathcal{C} + \mathcal{N}$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{N} = \{0\}$ d'où :

$$\boxed{E = \mathcal{C} \oplus \mathcal{N}}.$$

(c) L'application $f|_{\mathcal{C}}$ est bien à valeurs dans $\mathcal{C}$ puisque, d'après la question 2b, $\mathcal{C}$ est stable par f . La restriction d'une application linéaire est linéaire, donc $f|_{\mathcal{C}}$ est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

- Pour l'injectivité, prenons $x \in \text{Ker}(f|_{\mathcal{C}})$. On a $x \in \mathcal{C} = F_r$ donc il existe $a \in E$ tel que $f^r(a) = x$ ainsi $f^{r+1}(a) = f(x) = 0$ donc $a \in G_{r+1} = G_r$ (car $r = s$). Ce qui démontre que $x = f^r(a) = 0$ et par suite $\text{Ker}(f|_{\mathcal{C}}) = \{0\}$, d'où l'injectivité de $f|_{\mathcal{C}}$.
- Pour la surjectivité, prenons $y \in \mathcal{C} = F_r$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^r(x)$. Or $F_r = F_{r+1}$, il existe $u \in E$ tel que $y = f^r(x) = f^{r+1}(u)$ donc $y = f(f^r(u))$ et on a bien $f^r(u) \in \mathcal{C}$ qui est un antécédent de y par $f|_{\mathcal{C}}$.

$$\boxed{f|_{\mathcal{C}} \text{ est surjective}}.$$

(d) Par le même raisonnement qu'à la question précédente, comme $\mathcal{N}$ est stable par f , on a $f|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ qui est linéaire, donc $f|_{\mathcal{N}}$ est un endomorphisme de $\mathcal{N}$. Pour tout $x \in \mathcal{N} = G_r$, on a $f^r(x) = 0$, c'est-à-dire que $(f|_{\mathcal{N}})^r = 0$, ceci toujours en utilisant le fait que $r = s$.

$$\boxed{f|_{\mathcal{N}} \text{ est nilpotente}}.$$

8. (a) On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$.
 $P \mapsto P'$

L'application Δ est linéaire et par une récurrence élémentaire, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^n : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P^{(n)}$$

On a, pour tout entier naturel n , $F_n = \mathbb{R}[X]$. En effet pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il suffit de primitiver n fois P pour obtenir un antécédent de P par Δ^n (qui sera bien un polynôme). En particulier, on a $F_0 = F_1$ et donc $r = 0$.

Par contre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \text{Ker}(\Delta^n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (que l'on peut aisément obtenir par récurrence par exemple) et $G_0 = \text{Ker}(\text{Id}) = \{0\}$. Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n \neq G_{n+1}$ donc s n'existe pas.

(b) On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Gamma : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$.
 $P \mapsto XP$

L'application Γ est linéaire et une récurrence élémentaire donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma^n : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto X^n P .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n = \{0\}$ donc $s = 0$.

Par contre pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \text{Im}(\Gamma^n) = \{Q \in \mathbb{R}[X], X^n | Q\}$, ainsi $F_n \neq F_{n+1}$ et donc r n'est pas défini.

(c) Ce contre-exemple est bien plus difficile à trouver. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ noté ζ et défini par

$$\begin{cases} \zeta(X^n) = X^{n+1} \text{ si } n \text{ n'est pas une puissance de } 2 \\ \zeta(X^n) = 0 \text{ si } n \text{ est une puissance de } 2 \end{cases}$$

La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une base de $\mathbb{R}[X]$, connaître les images par ζ de ces vecteurs suffit à connaître ζ .

- Soit k un entier naturel. On a

$$\begin{aligned}\zeta^{2^k-1}(X^{2^k+1}) &= X^{2^k+1+2^k-1} = X^{2^{k+1}} \\ \zeta^{2^k}(X^{2^k+1}) &= 0\end{aligned}$$

Ainsi $X^{2^k+1} \in \text{Ker}(\zeta^{2^k})$ mais $X^{2^k+1} \notin \text{Ker}(\zeta^{2^k-1})$. La suite des noyaux (G_n) , n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang, ce qui démontre que s n'existe pas.

- Soit k un entier naturel. On a $X^{2^k+1} \in F_{2^k-1}$ puisque : $\zeta^{2^k-1}(X^{2^k+1}) = X^{2^k+1}$. Par contre $X^{2^k+1} \notin F_{2^k}$, pour le démontrer supposons par l'absurde que $\zeta^{2^k}(X^\ell) = X^{2^k+1}$. Il y a deux cas à considérer :

Si $\ell \geq 2^{k+1} + 1$, alors $\zeta^{2^k}(X^\ell)$ est nul ou bien de degré supérieur ou égal à $2^k + 2^{k+1} + 1 > 2^{k+1}$.

Si $\ell \leq 2^{k+1}$, alors $\zeta^{2^k}(X^\ell) = 0$ car entre ℓ et $2^k + \ell - 1$, il y a une puissance de 2.

Dans les deux cas c'est absurde. Ce qui démontre que F_{2^k} est strictement inclus dans F_{2^k-1} et la suite (F_n) n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang. L'indice r n'existe pas.

Problème 3

Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$. Ainsi la matrice $M(1, 0, 0)$ est la

matrice identité, notée I_3 et on note $J = M(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices de cette forme : $E = \{M(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

A Calcul matriciel

1. (a) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = I_3$.

(b) On montre par récurrence (le faire !) que $J^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k \\ J & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k + 1 \\ J^2 & \text{si } \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k + 2 \end{cases}$.

2. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$.

On écrit $M(x, y, z) = xI_3 + yJ + zJ^2$ et $M(x', y', z') = x'I_3 + y'J + z'J^2$.

$$\begin{aligned}\text{Alors } M(x, y, z) \times M(x', y', z') &= (xI_3 + yJ + zJ^2)(x'I_3 + y'J + z'J^2) \\ &= xx'I_3 + (xy' + x'y)J + (xz' + x'z)J^2 + yy'J^2 \\ &\quad + (yz' + y'z)J^3 + zz'J^4.\end{aligned}$$

Avec les formules précédentes :

$$M(x, y, z) \times M(x', y', z') = (xx' + yz' + y'z)I_3 + (xy' + x'y + zz')J + (xz' + x'z + yy')J^2.$$

Ainsi $M(x, y, z) \times M(x', y', z') = M(xx' + yz' + y'z, xy' + x'y + zz', xz' + x'z + yy')$ $\in E$.

Les rôles de x, y, z et x', y', z' sont symétriques dans cette formule (par exemple : $xx' + yz' + y'z = x'x + y'z + yz'$ et de même pour les deux autres) donc le produit matriciel sur E est commutatif.

- (b) Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. On applique la formule précédente avec $x' = x^2 - yz$, $y' = z^2 - xy$ et $z' = y^2 - zx$. Tout d'abord $xy' + x'y + zz' = xz^2 - x^2y + x^2y - y^2z + zy^2 - z^2x = 0$. On vérifie de même que $xz' + x'z + yy' = 0$.

Enfin, $xx' + yz' + y'z = x^3 - xyz + y^3 - xyz + z^3 - xyz$.

Ainsi $M(x, y, z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)I_3$.

On vérifie que $\frac{1}{2}(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, ce qui donne

$$M(x, y, z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) I_3.$$

- (c) Si $x + y + z \neq 0$ et que x, y et z ne sont pas égaux, alors $(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) \neq 0$ et on a :

$$M(x, y, z) \times \frac{1}{\frac{1}{2}(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)} M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = I_3.$$

Le produit d'éléments de E est commutatif. Ainsi $M(x, y, z)$ est inversible et

$$M(x, y, z)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)} M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx).$$

- (d) On va procéder par contraposée.

Supposons la condition fautive, c'est-à-dire que $x + y + z = 0$ ou $x = y = z$. On a alors $M(x, y, z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = 0_3$.

Et si $M(x, y, z)$ était inversible, alors on aurait $M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = 0_3$, soit $\begin{cases} x^2 - yz = 0 \\ z^2 - xy = 0 \\ y^2 - zx = 0 \end{cases}$.

Dans ce cas, $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 3(x^2 + y^2 + z^2) \neq 0$ car x, y et z ne sont pas tous les trois nuls.

D'après notre hypothèse, cela signifie que $x = y = z$ mais dans ce cas $M(x, y, z)$ est non inversible car de rang 1.

On a donc montré par contraposée que

$$\text{si } M(x, y, z) \text{ est inversible, alors } x + y + z = 0 \text{ ou } x = y = z.$$

3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) $M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 0 \\ y - x \end{pmatrix}.$

(b) On résout le système homogène $M(x, y, y) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - (x + 2y) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} -2y & y & y \\ y & -2y & y \\ y & y & -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sous forme échelonnée et si $y \neq 0$, on obtient $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Cela donne le système équivalent $\begin{cases} -2u + v + w \\ v = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = w \\ v = w \end{cases}.$

D'où les solutions : $\left\{ \begin{pmatrix} w \\ w \\ w \end{pmatrix}, w \in \mathbb{R} \right\}.$

Enfin si $y = 0$, on constate que les $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ sont solutions pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}$.

Dans les deux cas, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en fait bien partie.

(c) On définit les matrices $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D(x, y) = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-y \end{pmatrix}.$

On a montré le résultat colonne par colonne.

$$M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (x+2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x+2y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M(x, y, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Donc $M(x, y, y)Q = QD(x, y).$

(d) On a ainsi $M(x, y, y) = QD(x, y)Q^{-1}$. Ceci permet de montrer par récurrence (le faire !) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(x, y, y)^n = QD(x, y)^n Q^{-1}$.

L'hérédité repose sur le fait que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$M(x, y, y)^n \times M(x, y, y) = QD(x, y)^n Q^{-1} QD(x, y) Q^{-1} = QD(x, y)^{n+1} Q^{-1} = QD(x, y)^{n+1} Q^{-1}.$$

(e) On calcule d'une part $Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

D'autre part, $D(x, y)$ étant diagonale, on a (ou on le montre par récurrence) :

$$D(x, y)^n = \begin{pmatrix} (x+2y)^n & 0 & 0 \\ 0 & (x-y)^n & 0 \\ 0 & 0 & (x-y)^n \end{pmatrix}.$$

Le calcul de $QD(x, y)^n Q^{-1}$ donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M(x, y, y)^n = \frac{1}{3}(x+2y)^n M(1, 1, 1) + \frac{1}{3}(x-y)^n M(2, -1, -1).$$

B Marche aléatoire sur trois points

Kylian, Ousmane et Bradley s'entraînent au foot avec Luis. Ils se passent un ballon suivant la règle suivante. À l'instant initial ($t = 0$), Kvicha a le ballon. Celui qui a le ballon à un instant donné ($t = n \in \mathbb{N}$) l'envoie à l'entraîneur Luis qui le renvoie (à l'instant $n + 1$) à l'un des trois joueurs :

- il le renvoie au même joueur avec probabilité $1 - 2p$,
- sinon il le renvoie à un des deux autres joueurs de manière équiprobable.

Par exemple avec $p = \frac{1}{4}$, Kvicha a le ballon au départ. À l'instant $t = 1$, Kvicha l'aura avec la probabilité $\frac{1}{2}$, et Ousmane ou Bradley l'aura, chacun avec la probabilité $\frac{1}{4}$. On suppose que cette expérience est bien modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qu'on ne cherchera pas à expliciter. On définit les événements suivants pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- K_n : « Kvicha a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $k_n = P(K_n)$ sa probabilité ;
- O_n : « Ousmane a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $o_n = P(O_n)$ sa probabilité ;
- B_n : « Bradley a le ballon à l'instant $t = n$. » et on note $b_n = P(B_n)$ sa probabilité.

4. La balle revient au même joueur avec la probabilité $1 - 2p$, donc

$$\boxed{P_{K_n}(K_{n+1}) = P_{O_n}(O_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - 2p}.$$

Comme K_{n+1}, O_{n+1} et B_{n+1} forment un système complet d'événements, on a $P_{K_n}(K_{n+1}) + P_{K_n}(O_{n+1}) + P_{K_n}(B_{n+1}) = 1$ et, par hypothèse, $P_{K_n}(O_{n+1}) = P_{K_n}(B_{n+1})$. Donc $\boxed{P_{K_n}(O_{n+1}) = P_{K_n}(B_{n+1}) = p}$.

De même, $\boxed{P_{O_n}(O_{n+1}) = P_{O_n}(B_{n+1}) = p}$ et $\boxed{P_{B_n}(O_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) = p}$.

5. D'après la formule des probabilités totales (toujours avec le même système complet d'événements), $k_{n+1} = k_n P_{K_n}(K_{n+1}) + o_n P_{O_n}(K_{n+1}) + b_n P_{B_n}(K_{n+1})$. Donc $\boxed{k_{n+1} = (1 - 2p)k_n + po_n + pb_n}$.

De même, $\boxed{o_{n+1} = pk_n + (1 - 2p)o_n + pb_n}$ et $\boxed{b_{n+1} = pk_n + po_n + (1 - 2p)b_n}$.

Matriciellement, cela donne $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} k_{n+1} \\ o_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M(1 - 2p, p, p) \begin{pmatrix} k_n \\ o_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

6. Par analogie avec les suites géométriques, on montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} k_n \\ o_n \\ b_n \end{pmatrix} = M(1 - 2p, p, p)^n \begin{pmatrix} k_0 \\ o_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{pmatrix} k_0 \\ o_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les résultats de la partie précédente donnent $M(1 - 2p, p, p)^n = \frac{1}{3}M(1, 1, 1) + \frac{1}{3}(1 - 3p)^n M(2, -1, -1)$.

Comme $p \leq \frac{1}{2}$, on a $-1 < 1 - 3p < 1$ (en supposant $p = 0$, sinon les suites sont constantes). Donc

$$(1 - 3p)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ On a alors } \boxed{k_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}}, \boxed{o_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}} \text{ et } \boxed{b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}}.$$

Problème 4

Le but de ce problème est de trouver un équivalent de $n!$ quand $n \rightarrow +\infty$. Il se compose de trois parties. Les deux premières sont indépendantes et la troisième utilise les deux résultats finaux des parties précédentes. Ceux-ci pourront être admis pour poursuivre le problème.

Intégrales de Wallis

1. $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{I_1 = 1}$. Pour I_2 , linéariser : $\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. On a alors $\boxed{I_2 = \frac{\pi}{4}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin x \leq 1$ donc $0 \leq \sin^{n+1} x \leq \sin^n x$. Puis par croissance de l'intégrale, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. On a même $0 < I_{n+1}$ car $\sin^{n+1}$ est continue, positive et non identiquement nulle.

3. On effectue le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ et on utilise que $\sin(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ pour tout t . Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$.

4. On pose $\begin{cases} u(t) = \sin^{n+1}(t) \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases}$. Alors $\begin{cases} u'(t) = (n+1) \cos(t) \sin^n(t) \\ v(t) = -\cos(t) \end{cases}$.

Par intégration par parties, $I_{n+2} = [-\cos(t) \sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^n(t)$.

Or $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$. Donc $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. Finalement, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

5. Pour tout n , $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, donc $\frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$. Et $I_n \neq 0$, donc $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Par théorème d'encadrement, $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $I_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.

6. Pour tout n , $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}I_n$, donc $[(n+1)I_nI_{n+1}]$ est constante, égale à sa valeur pour $n = 1$: $I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$.

7. Pour tout n , $\frac{\pi}{2} = (n+1)I_nI_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1)I_n^2 \sim nI_n^2$, donc $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

8. On conjecture à l'aide de la relation de la question 4, puis on montre par récurrence : pour $k \in \mathbb{N}$,

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2k+1} = \frac{2^{2k}k!^2}{(2k+1)!}.$$

On peut aussi mettre en place un produit télescopique.

9. Comme $I_{2k+1} \sim I_{2k}$, $\frac{(2k+1)I_{2k+1}}{2kI_{2k}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$. Or $\frac{(2k+1)I_{2k+1}}{2kI_{2k}} = \frac{2^{4k}k!^4}{2k(2k)!^2} \frac{2}{\pi}$.

Finalement, $\pi = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2^{4k}(k!)^4}{k((2k)!)^2}$.

Un encadrement

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave de classe $\mathcal{C}^2$. Soit g la fonction affine définie sur $[a, b]$ par $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.

10. $g(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$.

11. f étant concave, sa courbe est au dessus de chacune de ses cordes. Notamment, entre a et b , $f(t) \geq g(t)$.

Puis par croissance de l'intégrale, $\int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt$.

12. $\int_a^b g(t) dt = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b - a)^2}{2} + f(a)(b - a)$.

13. f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc f'' , et donc $|f''|$, est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, donc elle atteint son maximum $\boxed{M_2 = \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|}$.

14. Le but de cette question est de montrer que

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) - g(t) \leq M_2 \frac{(t-a)(b-t)}{2}. \quad (\clubsuit)$$

(a) Pour $t = a$ et $t = b$, l'inégalité $(\clubsuit)$ revient à $0 \leq 0$, vrai.

(b) Soit $t \in]a, b[$. On pose h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - g(x) - K(x-a)(b-x)$ où K est une constante telle que $h(t) = 0$.

h est de classe $\mathcal{C}^2$ car f (et g) le sont et $\boxed{h'' : t \mapsto f''(t) + 2K}$.

(c) D'après le théorème de Rolle (vérifier soigneusement les hypothèses), il existe $c_1 \in]a, t[$ et $c_2 \in]t, b[$ tels que $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$. À l'aide du théorème de Rolle à nouveau, cette fois appliqué à h' , $\boxed{\exists c \in]a, b[, h''(c) = 0}$.

(d) Alors $f''(c) + 2K = 0$, d'où $K = -\frac{f''(c)}{2}$. Donc $\boxed{|K| \leq \frac{M_2}{2}}$ puis comme $h(t) = 0$, on a l'inégalité $(\clubsuit)$ souhaitée.

15. À partir de l'inégalité $(\clubsuit)$ précédente, par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt \leq -\frac{M_2}{2} \int_a^b (t^2 - (a+b)t + ab) dt. \text{ Or } \int_a^b (t^2 - (a+b)t + ab) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{a+b}{2}t^2 + abt \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{a+b}{2}(b^2 - a^2) + ab(b-a) = \frac{b-a}{6}((2b^2 + 2ab + 2a^2) - 3(a+b)^2 + 6ab) = -\frac{(b-a)^3}{6}.$$

$$\text{Finalement } \boxed{\int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12}}.$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est bien $\mathcal{C}^2$ sur $[n, n+1]$.

On a pour tout $t \in [n, n+1]$, $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$ qui est négative donc f est concave. De plus $|f''(t)| \leq \frac{1}{n^2}$.

La corde correspondante a pour équation $g : t \mapsto (\ln(n+1) - \ln(n))(t-n) + \ln(n)$ et son intégrale vaut

$$\int_n^{n+1} g(t) dt = \frac{1}{2}(\ln(n+1) - \ln(n)) + \ln(n) = \frac{1}{2}(\ln(n+1) + \ln(n)).$$

Et à l'aide d'une IPP, $\int_n^{n+1} \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_n^{n+1} = (n+1) \ln(n+1) - n \ln(n) - 1$.

$$\text{Finalement, } \boxed{0 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leq \frac{1}{12n^2}}.$$

Formule de Stirling

Étant donné $n > 1$ un nombre entier, on pose

$$u_n = \ln \left(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \right) - \ln(n!) \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}.$$

17. Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) (\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \geq 0$ d'après ce qui précède et $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{12n(n-1)} \leq \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n(n-1)} \leq 0$, d'après l'encadrement précédent à nouveau. De plus

$v_n - u_n = \frac{1}{12(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$. On note ℓ leur limite commune.

18. D'une part $2u_n - u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\ell - \ell = \ell$.

D'autre part, $2u_n - u_{2n} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n(2n)!^2}{2^{4n+1}n!^4} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2\pi} \right)$ d'après 10.

Par unicité de la limite, $\boxed{\ell = -\frac{1}{2} \ln(2\pi)}$.

19. On a donc : $-u_n = \ln \left(\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(2\pi)$. D'où la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n}.$$

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'objet de ce problème est de calculer de plusieurs manières la somme

$$S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}.$$

1. Première approche

(a) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

(b) En déduire la valeur de S .

2. Deuxième approche : pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

(a) Donner une expression simple de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) On admet que la fonction f ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f'(x)$ de deux manières différentes.

(c) En déduire la valeur de S .

3. Deuxième approche, bis : on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto (1 + e^x)^n$, que l'on suppose dérivable.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une expression développée de $g(x)$.

(b) En déduire deux expressions différentes de la dérivée de g .

(c) En déduire la valeur de S .

4. Troisième approche

(a) Établir pour tout $1 \leq k \leq n+1$ la formule :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

(b) En déduire par récurrence que $S = n2^{n-1}$.

5. Quatrième approche

(a) Après avoir justifié que $S = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$, appliquer le changement d'indice $j = n - k$ pour obtenir une équation vérifiée par S .

(b) En déduire la valeur de S .

6. En imitant une des méthodes précédentes, montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Problème 2

Dans ce problème, pour tout nombre réel x , on note $|x|$ la **valeur absolue** de x , définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$ et tous réels $x_1, \dots, x_n$,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Le but de cette partie est de montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\text{Pour tous nombres réels } a_1, \dots, a_n \text{ et } b_1, \dots, b_n, \text{ on a } \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

3. Démontrer $\mathcal{P}(1)$.
4. Soit $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ des nombres réels.
 - (a) Montrer que $\alpha_2^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_2^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \geq 0$.
 - (b) En déduire $\mathcal{P}(2)$.
5. Soit $n \geq 2$ un nombre entier. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Soit maintenant $a_1, \dots, a_{n+1}$ et $b_1, \dots, b_{n+1}$ des nombres réels.

- (a) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} + |a_{n+1}| |b_{n+1}|.$$

- (b) En utilisant judicieusement la propriété $\mathcal{P}(2)$, en déduire que

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right).$$

- (c) Montrer que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et conclure.

Problème 3

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On rappelle les formules suivantes.

➤ Formules de linéarisation :

$$\begin{aligned} \bullet \cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)), & \bullet \sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)). \\ \bullet \sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)), \end{aligned}$$

➤ Formules de factorisation : soit $p, q \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \bullet \cos a + \cos b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), & \bullet \sin a + \sin b &= 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \\ \bullet \cos a - \cos b &= -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right), & \bullet \sin a - \sin b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right). \end{aligned}$$

1. Soit $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ et $x \in]0, 2\pi[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \sum_{k=1}^n \cos(kx + \varphi) \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx + \psi).$$

- (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right)$.
 (b) En déduire une expression analogue pour B_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in]0, 2\pi[$:

$$(E) : \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \sum_{k=1}^n \sin(kx).$$

2. (a) Déterminer des réels A et δ tels que $\forall X \in \mathbb{R}, \cos X - \sin X = A \cos(X + \delta)$.
 (b) Montrer que (E) est équivalente à l'équation

$$(F) : \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0.$$

3. (a) Résoudre l'équation (F) sur $\mathbb{R}$.
 (b) En déduire les solutions de (E) sur $]0, 2\pi[$.
 4. Montrer que si n n'est pas un multiple de 4, alors (E) a exactement $2n$ solutions sur $]0, 2\pi[$.

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Première approche

(a) Pour tout $1 \leq k \leq n$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. Voir TD (formule du Chef).

(b) Donc $S = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = \boxed{n2^{n-1}}$.

2. Deuxième approche : pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \boxed{(1+x)^n}$ (formule du binôme).

(b) On admet que la fonction f ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'une part

$$\boxed{f'(x) = n(1+x)^{n-1}}. \text{ D'autre part en dérivant la somme terme à terme, } \boxed{f'(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} kx^{k-1}}$$

(attention : le terme pour $k=0$ est constant en x et donc s'annule en dérivant).

(c) On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} kx^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$. En évaluant en $x=1$, on obtient

$$\boxed{S = n2^{n-1}}.$$

3. Deuxième approche, bis : on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto (1+e^x)^n$, que l'on suppose dérivable.

(a) Par la formule du binôme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^x)^k}$.

(b) En dérivant la somme, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{g'(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} e^x k (e^x)^{k-1}}$. Par ailleurs, en

dérivant l'expression initiale, on obtient $\boxed{g'(x) = e^x n(1+e^x)^{n-1}}$.

(c) On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} e^x k (e^x)^{k-1} = e^x n(1+e^x)^{n-1}$. En évaluant en $x=0$, cela

$$\text{donne } \boxed{S = n2^{n-1}}.$$

4. Troisième approche

(a) La formule de Pascal donne : $\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}$. On peut aussi en adapter la démonstration et refaire le calcul.

(b) **Init.** D'une part, $\sum_{k=1}^1 k \binom{1}{k} = \binom{1}{1} = 1$. D'autre part, $1 \times 2^{1-1} = 1$. Donc la formule est vraie au rang 1.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{nul pour } k=n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n}{k-1}}_{\text{décalage}} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}}_{\text{H.R.}} + \underbrace{\sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k}}_{\text{développement}} \\
&= n2^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}}_{\text{développement}} + \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}}_{\text{binôme}} \\
&= n2^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}}_{\text{H.R.}} + 2^n \\
&= n2^{n-1} + n2^{n-1} + 2^n \\
&= (n+1)2^n.
\end{aligned}$$

Ceci achève l'hérédité.

On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}}$.

5. Quatrième approche

(a) Comme $0 \binom{n}{0} = 0$, on a aussi $S = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$. Le changement d'indice $j = n - k$ donne :

$$S = \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n}{j} = n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} - \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j}. \text{ Ainsi, } \boxed{S = n2^n - S}.$$

(b) Ainsi $2S = n2^n$, d'où $\boxed{S = n2^{n-1}}$.

6. Soit $n \geq 2$. Reprenons la deuxième approche et la fonction f dont on a calculé la dérivée :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$. En dérivant une seconde fois, on obtient pour

tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f''(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$.

Cela donne (en ajoutant le terme pour $k=1$ qui est nul puis en séparant la somme) :

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} x^{k-2} - \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-2}.$$

D'où, en évaluant en $x=1$: $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} - \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

Donc $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}(2+n-1)$.

Cela donne
$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Problème 2

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord, $x \leq |x|$. En effet, soit $x = |x|$ (si $x \geq 0$), soit $x = -|x| \leq 0 \leq |x|$.
- La même distinction donne aussi $-x \leq |x|$ ainsi que $y \leq |y|$ et $-y \leq |y|$.
- Comme $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$, $x + y \leq |x| + |y|$.
Comme $-x \leq |x|$ et $-y \leq |y|$, $-(x + y) \leq |x| + |y|$.
- Finalement $|x + y| = x + y$ ou $-(x + y)$. Dans les deux cas, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2. **Init.** Dans le cas $n = 2$, c'est la question B.

Hér. Soit $n \geq 2$ un entier. On suppose que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Soit maintenant $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Alors $\left| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right| = \left| \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + x_{n+1} \right|$.

En utilisant le cas $n = 2$ avec $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$ et x_{n+1} , on a $\left| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| + |x_{n+1}|$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\left| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right) + |x_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|$, soit l'inégalité recherchée.

Le but de cette partie est de montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$:

Pour tous nombres réels $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$, on a $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$.

3. Pour tous $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, on a $(a_1 b_1)^2 = a_1^2 b_1^2$ donc *a fortiori* $(a_1 b_1)^2 \leq a_1^2 b_1^2$.

4. Soit $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ des nombres réels.

(a) $\alpha_2^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_2^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 = (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2)^2$ donc $\alpha_2^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_2^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \geq 0$.

(b) Soit $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

$\left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i \beta_i \right)^2 = (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)^2 = \alpha_1^2 \beta_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 \leq \alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_2^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2$ d'après la question précédente.

Or on constate que $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) = \alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_2^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2$, ce qui montre $\mathcal{P}(2)$.

5. Soit $n \geq 2$ un nombre entier. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Soit maintenant $a_1, \dots, a_{n+1}$ et $b_1, \dots, b_{n+1}$ des nombres réels.

(a) L'hypothèse de récurrence, appliquée aux nombres $|a_i|$ et $|b_i|$, donne :

$\left(\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right)$ ou encore, toutes les quantités étant positives :

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}.$$

Alors $\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i| = \left(\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \right) + |a_{n+1}| |b_{n+1}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} + |a_{n+1}| |b_{n+1}|$, ce qui montre l'inégalité souhaitée.

(b) En élevant au carré le résultat précédent, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i| \right)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} + |a_{n+1}| |b_{n+1}| \right)^2.$$

En utilisant la propriété de la question 4b avec $\alpha_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}$, $\beta_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}$, $\alpha_2 = |a_{n+1}|$ et $\beta_2 = |b_{n+1}|$, on obtient :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i| \right)^2 \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right) + |a_{n+1}|^2 \right] \times \left[\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right) + |b_{n+1}|^2 \right],$$

soit enfin :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n+1} |b_i|^2 \right)}.$$

(c) Par l'inégalité triangulaire montrée en début de problème, on a : $\left| \sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i|$, soit encore :

$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n+1} |b_i|^2 \right)$. Or bien sûr $|a_i|^2 = a_i^2$ et $|b_i|^2 = b_i^2$ pour tout i .

Finalement, $\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2 \right)}.$

Ceci achève la démonstration de $\mathcal{P}(n+1)$.

$\mathcal{P}(n)$ étant vraie pour $n = 1$ (question 3) et (on l'a achevé à l'instant par récurrence) pour tout $n \geq 2$, $\boxed{\text{elle est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

Problème 3

1. (a) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $x \in]0, 2\pi[$. On montre par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n : A_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right).$$

On remarque au passage que $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ car $\frac{x}{2} \in]0, \pi[$.

Init. Pour $n = 1$, on a $A_n = \cos(x + \varphi)$ et :

$$\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos(x + \varphi) = \cos(x + \varphi).$$

Donc P_1 est vraie.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose P_n vraie. On a alors, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + \cos((n+1)x + \varphi) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos((n+1)x + \varphi)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

D'après les formules de linéarisation, on obtient :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{[\sin((n + \frac{1}{2})x + \varphi) - \sin(\frac{x}{2} + \varphi)] + [\sin((n + \frac{3}{2})x + \varphi) - \sin((n + \frac{1}{2})x + \varphi)]}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{-\sin(\frac{x}{2} + \varphi) + \sin((n + \frac{3}{2})x + \varphi)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Finalement, d'après les formules de factorisation :

$$A_{n+1} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+2)x}{2} + \varphi\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

D'où le résultat, d'après le principe de récurrence.

- (b) Soit $\psi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$. Comme $\forall y \in \mathbb{R} \sin y = \cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$, on a :

$$B_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx + \psi) = \sum_{k=1}^n \cos\left(kx + \psi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi, en appliquant le résultat précédent avec $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$B_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$B_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2} + \psi\right).$$

2. (a) Soit $X \in \mathbb{R}$. On a $\cos X - \sin X = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos X - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin X \right) = \boxed{\sqrt{2} \cos \left(X + \frac{\pi}{4} \right)}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$. D'après les questions précédentes, avec $\varphi = \psi = 0$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \sum_{k=1}^n \sin(kx) \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Enfin, comme $\forall X \in \mathbb{R} \cos X - \sin X = \sqrt{2} \cos \left(X + \frac{\pi}{4} \right)$, on en déduit

$$\boxed{(E) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0}.$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ ou } \frac{nx}{2} \equiv 0 [\pi] \end{aligned}$$

$$\boxed{(F) \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2(n+1)} \left[\frac{2\pi}{n+1} \right] \text{ ou } x \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n} \right]}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{\mathcal{S}_F = \left\{ \frac{(4k+1)\pi}{2(n+1)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\ell\pi}{n} \mid \ell \in \mathbb{Z} \right\}}.$$

- (b) Pour déterminer les solutions de (E) sur $]0, 2\pi[$, on résout les équations suivantes d'inconnues $k, \ell \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{(4k+1)\pi}{2(n+1)} < 2\pi &\Leftrightarrow 0 < 4k+1 < 4(n+1) \\ &\Leftrightarrow \frac{-1}{4} < k < n + \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq k \leq n \\ 0 < \frac{2\ell\pi}{n} < 2\pi &\Leftrightarrow 0 < \ell < n \\ &\Leftrightarrow 1 \leq \ell \leq n-1 \end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, 2\pi[$:

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{ \frac{(4k+1)\pi}{2(n+1)} \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\} \cup \left\{ \frac{2\ell\pi}{n} \mid \ell \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}}$$

4. Supposons n non multiple de 4. Dans la réunion précédente, le premier ensemble contient exactement $n + 1$ éléments et le second $n - 1$. Si ces deux ensembles sont disjoints, alors la réunion $\mathcal{S}_E$ contiendra exactement $2n$ éléments. Raisonnons par l'absurde et supposons que ces deux ensembles ne soient pas disjoints. Il existe alors $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ tels que $\frac{(4k + 1)\pi}{2(n + 1)} = \frac{2\ell\pi}{n}$. On en déduit alors $(4k + 1)n = 4(n + 1)\ell$, d'où $n = 4((n + 1)\ell - kn)$. Comme $(n + 1)\ell - kn$ est entier, n est un multiple de 4, ce qui contredit notre hypothèse. D'où le résultat.

Exercice 3

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

- Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vrai ou faux ? (Justifier)
 - Si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.
 - Si f est impaire et g est impaire, alors $g \circ f$ est paire.
 - Si $g \circ f$ est impaire, alors f ou g est impaire.
- Soit $f : x \mapsto \frac{3x^2 - 11x - 5}{x - 4}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
 - Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f .
 - Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Préciser les asymptotes à $\mathcal{C}_f$.
 - Donner une allure de la courbe représentative de f .
- Soit $g : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$.
 - Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité de g .
 - Déterminer les variations de g . En déduire un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que la restriction de g à cet intervalle soit bijective.
 - Déterminer alors une expression de sa bijection réciproque (en précisant son ensemble de définition).

Problème 1

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto xe^x \end{aligned}$$

et on admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Calculer la limite de f en $+\infty$. On admet que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.
- Exprimer la dérivée de f puis dresser le tableau de variations de f où l'on fera apparaître notamment $f(-1)$.
- Tracer une allure du graphe de f .
- Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Dans toute la suite, on note W la bijection réciproque de $f|_{[-1, +\infty[}$.

Étude plus complète de la fonction W

- Montrer que $W(e) = 1$. Déterminer également $W(0)$ et $W(-1/e)$.
- À partir des variations de f , dresser le tableau de variations de W sur son domaine de définition et préciser sa limite en $+\infty$.
- En déduire le signe de $W(x)$ en fonction de x .

8. (a) Montrer que W est dérivable sur $\left]-\frac{1}{e}, +\infty\right[$ et exprimer W' .
 (b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{e}, +\infty\right[\setminus \{0\}$, on a $W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$.
 9. Dédire de ce qui précède que $\forall x \in [e, +\infty[, W(x) \leq \ln(x)$.

Problème 2

Prérequis

1. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z| - |z'| \leq |z + z'|$.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Montrer que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, si $p < q$, alors $|z^p| < |z^q|$.

Le problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels positifs tels que $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $a_n \neq 0$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$.

Le but du problème est de montrer que les solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$ sont toutes de module inférieur ou égal à 1.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose aussi $A(z) = -a_0 + \sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k) z^k$.

4. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |A(z)| \leq \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) |z|^k + a_0.$$

5. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > 1$, alors $|A(z)| \leq a_n |z|^n$.

6. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |(z-1)P(z)| \geq a_n |z|^{n+1} - |A(z)|.$$

7. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > 1$, alors $|(z-1)P(z)| \geq a_n |z|^n (|z| - 1)$.

8. Conclure.

Problème 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le cosinus de z par

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

et on appelle $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction cosinus complexe définie par $\Phi(z) = \cos z$.

Le but de ce problème est de définir une fonction arccosinus complexe qui serait au cosinus complexe ce que la fonction arccosinus usuelle est au cosinus réel.

A Préliminaire

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

B Parties adaptées, exemples

Étant donnés deux ensembles non vides E et F , une fonction $f : E \rightarrow F$ et A une partie non vide de E , on appelle f_A la fonction

$$f_A : A \rightarrow f(A) \\ x \mapsto f(x)$$

On dit que A est une **partie adaptée** à f lorsque f_A est bijective.

On va maintenant étudier Φ sur différents sous-ensembles de $\mathbb{C}$ afin de déterminer un ensemble optimal où définir une réciproque.

2. Soit $A_1 = [0, \pi]$.

Déterminer $\Phi(A_1)$, montrer que A_1 est adaptée à Φ et déterminer $\Phi_{A_1}^{-1}$.

3. Soit $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0\}$.

Déterminer $\Phi(A_2)$, montrer que A_2 est adaptée à Φ et déterminer $\Phi_{A_2}^{-1}$.

4. Soit $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \pi \text{ et } \operatorname{Im} z < 0\}$.

Déterminer $\Phi(A_3)$, montrer que A_3 est adaptée à Φ et déterminer $\Phi_{A_3}^{-1}$.

5. Soit $A_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

On admet que A_4 est adaptée à Φ (les courageux pourront se demander comment démontrer que l'union de parties adaptées dont les images sont deux à deux disjointes est encore une partie adaptée...ce n'est pas demandé ici car un peu technique et pas fondamental, cependant il est important pour la suite du problème de bien comprendre ce résultat admis)

Déterminer $\Phi(A_4)$ et déterminer $\Phi_{A_4}^{-1}$.

C Résolution de l'équation $\cos z = a$

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\cos z = a$ si et seulement si e^{iz} est solution d'une équation du second degré que l'on notera (E) .
7. Montrer que (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes u_1 et u_2 . Déterminer $u_1 u_2$ et $u_1 + u_2$ et montrer que ces solutions ne sont pas réelles.
8. En déduire qu'il existe un unique couple $(\rho_a, \theta_a) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[$ tel que $\rho_a e^{i\theta_a}$ soit solution de (E) .
9. Montrer que $\rho_a \neq 1$.
10. Soit $A_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in]0, \pi[\text{ et } \operatorname{Im} z \neq 0\}$.
Montrer qu'il existe un unique $z \in A_5$ tel que $\cos z = a$ et l'exprimer en fonction de ρ_a et θ_a .
Cet élément de A_5 sera désormais noté $\zeta(a)$.
11. Calculer $\zeta(i)$.
12. Exprimer $\zeta(-a)$ en fonction de $\zeta(a)$.

D Il est temps de conclure

13. Représenter sur un même dessin les ensembles E_1 , E_2 , E_3 et E_5 de points du plan dont les affixes sont dans A_1 , A_2 , A_3 et A_5 respectivement.
14. Déterminer $\Phi(A_5)$.
15. Soit $A_6 = A_4 \cup A_5$. Comme pour A_4 , on admet que A_6 est une partie adaptée à Φ .
Déterminer $\Phi(A_6)$.

16. On définit la fonction arccosinus complexe par

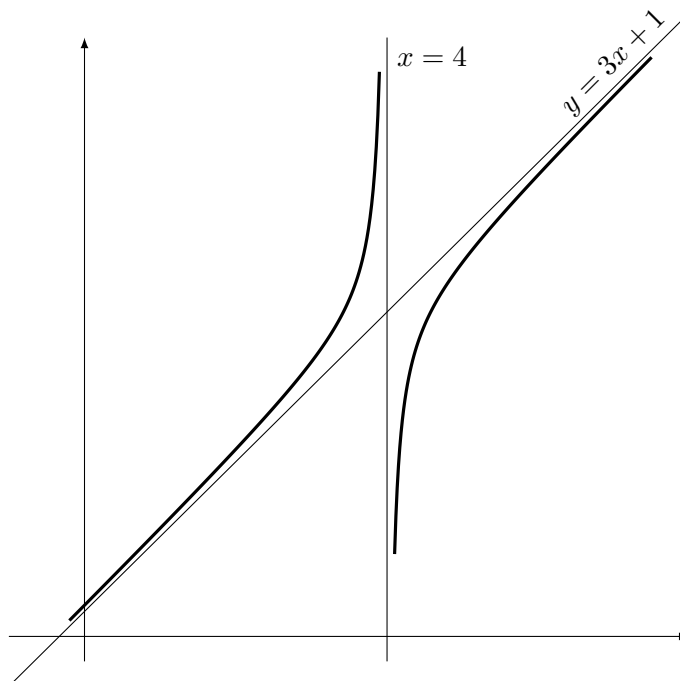
$$\begin{array}{ccc} \Gamma : \mathbb{C} & \rightarrow & A_6 \\ a & \mapsto & \Phi_{A_6}^{-1}(a) \end{array} .$$

Déterminer $\Gamma(a)$ en fonction de a (en discutant selon les valeurs de a).

17. Montrer que $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \pi$.

Exercice 4

1. Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vrai ou faux ? (Justifier)
 - (a) VRAI. D'une part $g \circ f$ est définie sur $[-1, 1]$, centré en 0.
D'autre part, $\forall x \in [-1, 1]$, $(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Donc $g \circ f$ est paire.
 - (b) FAUX. Par exemple avec $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x$ impaires, $g \circ f : x \mapsto x$ n'est pas paire.
 - (c) FAUX. Il suffit de choisir n'importe quelle fonction $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ bijective qui n'est pas impaire. Alors avec $g = f^{-1}$, on a $g \circ f : x \mapsto x$ qui est impaire, alors ni f ni g ne l'est. Par exemple $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{2} - 1$.
2. Soit $f : x \mapsto \frac{3x^2 - 11x - 5}{x - 4}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
 - (a) L'ensemble de définition et de dérivabilité de f est $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ (invoker le quotient).
 - (b) Par propriété des fractions rationnelles, on étudie les limites en $\pm\infty$ de $\frac{3x^2}{x} = 3x$.
Ainsi, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.
Par quotient (remarquer que $3 \times 4^2 - 11 \times 4 - 5 < 0$), $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 4^+} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 4^-} +\infty$.
 - (c) D'une part, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale en $x = 4$.
D'autre part, elle admet $y = 3x + 1$ pour asymptote oblique en $\pm\infty$.
 - (d) Voici une allure de $\mathcal{C}_f$ (attention, repère non orthonormé : les ordonnées sont 3 fois plus condensées que les abscisses).



3. Soit $g : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$.

(a) $\ln$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto x^2 - 1$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x^2 - 1 > 0$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Par composition, g est définie et dérivable sur $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

(b) Pour tout $x \in D$, $g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$, négatif pour $x < -1$, positif pour $x > 1$.

Ainsi, g est strictement décroissante sur $] -\infty, -1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

g étant continue sur ces deux intervalles, on peut par exemple choisir $g|_{]1, +\infty[}$, bijective.

(c) Comme $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\infty$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tous $x \in]1, +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}$, $y = g(x) \Leftrightarrow y = \ln(x^2 - 1)$.

Ainsi $y = g(x) \Leftrightarrow e^y = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = e^y + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{e^y + 1}$ car x est pris dans $]1, +\infty[$.

D'où l'expression de la bijection réciproque : $x \mapsto \sqrt{e^x + 1}$.

Remarque. On aurait pu faire le choix de la bijection décroissante $g|_{]-\infty, -1[}$, qui aurait alors induit le choix de la racine négative dans l'expression de x en fonction de y .

Problème 1

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions qui le sont.

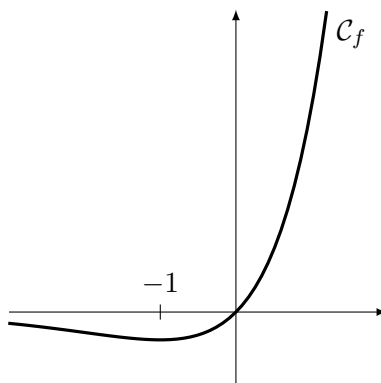
$$x \mapsto xe^x$$

1. Par produit, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et par croissances comparées, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$. Comme e^x est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $1+x$. D'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

3.



4. f est continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. De plus $f(-1) = -\frac{1}{e}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc elle réalise une bijection de $I = [-1, +\infty[$, à valeurs dans $J = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

On note W la bijection réciproque de $f|_I$.

Étude plus complète de la fonction W

5. $f(1) = e$, $f(0) = 0$ et $f(-1) = -\frac{1}{e}$. Donc $W(e) = 1$, $W(0) = 0$ et $W(-1/e) = -1$.
6. $f|_I$ est strictement croissante donc W l'est sur J . De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = +\infty$.
Finalement :

x	$-\frac{1}{e}$	0	e	$+\infty$
$W(x)$	-1	0	1	$+\infty$

7. Ainsi, $W(x)$ est positif si $x > 0$, négatif si $x < 0$ et nul si $x = 0$.

8. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc W n'est pas dérivable en $f(-1) = -\frac{1}{e}$, mais l'est partout ailleurs. Ainsi

W est dérivable sur $]-\frac{1}{e}, +\infty[$ et pour tout $x \in]-\frac{1}{e}, +\infty[$,

$$W'(x) = \frac{1}{f'(W(x))} = \frac{1}{W(x)e^{W(x)} + e^{W(x)}} = \frac{1}{e^{W(x)}(1 + W(x))}.$$

Or $f(W(x)) = W(x)e^{W(x)} = x$. Donc $\frac{1}{e^{W(x)}} = \frac{W(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. Et cela donne $W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}$.

9. On pose $h : x \mapsto W(x) - \ln(x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) = W'(x) - \frac{1}{x} = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{W(x)}{1 + W(x)} - 1 \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{-1}{1 + W(x)} \right).$$

D'après ce qui précède, $h'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc h est décroissante sur cet intervalle. Or $h(e) = 0$. Donc $\forall x \geq e, W(x) \leq \ln(x)$.

*La fonction W dite **de Lambert** est très intéressante pour ses propriétés mathématiques, utilisée pour résoudre des équations mettant en jeu des puissances, mais trouve aussi de nombreuses applications en physique, comme en électronique (circuits diode/résistance) ou en physique des particules. Elle valait donc bien qu'on s'y attarde ! Sans compter que Lambert est un des pionniers de l'étude de la trigonométrie hyperbolique !*

Problème 2

Prérequis

- Voir cours.
- Partie gauche, voir cours également. Appliquer l'inégalité triangulaire à $|z| = |(z + z') - z'|$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$. Alors $|z^p| = |z|^p < |z|^q = |z^q|$, d'où $|z^p| < |z^q|$.

Le problème

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par inégalité triangulaire, $|A(z)| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - a_{k-1}| |z|^k + |a_0|$.

Or $a_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall 1 \leq k \leq n$, $a_k \geq a_{k-1}$. Donc

$$|A(z)| \leq \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) |z|^k + a_0.$$

5. Si de plus $|z| > 1$, alors $\forall 1 \leq k \leq n$, $1 \leq |z|^k \leq |z|^n$.

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) |z|^k + a_0 \leq |z|^n \left(\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) + a_0 \right).$$

Après télescopage, $|A(z)| \leq a_n |z|^n$.

6.

$$\begin{aligned} (z-1)P(z) &= \sum_{k=0}^n a_k z^{k+1} - \sum_{k=0}^n a_k z^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} z^k - \sum_{k=0}^n a_k z^k \\ &= a_n z^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k) z^k}_{A(z)} - a_0. \end{aligned}$$

Finalement, à l'aide de la question 2,

$$|(z-1)P(z)| \geq a_n |z|^{n+1} - |A(z)|.$$

7. D'après l'inégalité de la question 5, si $|z| > 1$, alors $|(z-1)P(z)| \geq a_n |z|^{n+1} - a_n |z|^n$.

$$\text{Donc } |(z-1)P(z)| \geq a_n |z|^n (|z| - 1).$$

8. Si z est de module supérieur à 1 et racine de P , alors d'après ce qui précède, $0 \geq a_n |z|^n (|z| - 1)$. Comme $a_n |z|^n \geq 0$, on a $|z| - 1 \leq 0$, ce qui est contradictoire.

Ainsi, toutes les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1.

Problème 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le cosinus de z par

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

et on appelle $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction cosinus complexe définie par $\Phi(z) = \cos z$.

A Préliminaire

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x + iy) = \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}).$$

$$\text{D'où } \operatorname{Re}(\cos(x + iy)) = \frac{1}{2}(e^{-y} \cos x + e^y \cos x) = \cos x \operatorname{ch} y$$

$$\text{et } \operatorname{Im}(\cos(x + iy)) = \frac{1}{2}(e^{-y} \sin x - e^y \sin x) = \sin x \operatorname{sh} y.$$

$$\text{Donc } \boxed{\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y}.$$

B Parties adaptées, exemples

On note dans la suite argch la réciproque de $\operatorname{ch}|_{\mathbb{R}_+}$.

2. Soit $A_1 = [0, \pi]$. $\forall x \in [0, \pi]$, $\Phi(x) = \cos x$ (cosinus usuel sur $\mathbb{R}$) et $\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

$$\text{Donc } \boxed{A_1 \text{ est adaptée et } \Phi_{A_1}^{-1} = \operatorname{Arccos}}.$$

3. Soit $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0\}$.

$\forall z \in A_2$, on écrit $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\Phi(z) = \Phi(iy) = \operatorname{ch}(y) \in \mathbb{R}_+^*$.

Et $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$, $u = \Phi(z) \Leftrightarrow y = \operatorname{argch}(u) \Leftrightarrow z = i \operatorname{argch}(u)$.

$$\text{Donc } \boxed{A_2 \text{ est adaptée et } \Phi_{A_2}^{-1} : u \mapsto i \operatorname{argch}(u)}.$$

4. Soit $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \pi \text{ et } \operatorname{Im} z < 0\}$.

$\forall z \in A_3$, on écrit $z = \pi + iy$ avec $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\Phi(z) = \Phi(\pi + iy) = -\operatorname{ch}(y) \in \mathbb{R}_-^*$.

Et $\forall u \in \mathbb{R}_-^*$, $u = \Phi(z) \Leftrightarrow -u = \operatorname{ch}(-y) \Leftrightarrow y = -\operatorname{argch}(-u) \Leftrightarrow z = \pi - i \operatorname{argch}(-u)$.

$$\text{Donc } \boxed{A_3 \text{ est adaptée et } \Phi_{A_3}^{-1} : u \mapsto \pi - i \operatorname{argch}(-u)}.$$

5. Soit $A_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. On admet que A_4 est adaptée à Φ .

$\Phi(A_1), \Phi(A_2)$ et $\Phi(A_3)$ sont deux à deux disjointes. $\Phi(A_4) = [-1, 1] \cup]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[= \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Phi_{A_4}^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ a &\mapsto \begin{cases} \operatorname{Arccos}(a) & \text{si } a \in [-1, 1] \\ i \operatorname{argch}(a) & \text{si } a \in [1, +\infty[\\ \pi - i \operatorname{argch}(-a) & \text{si } a \in]-\infty, -1] \end{cases} \end{aligned}$$

C Résolution de l'équation $\cos z = a$

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

6. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \cos z = a &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = a \\ &\Leftrightarrow e^{2iz} + 1 = 2ae^{iz} \\ &\Leftrightarrow e^{iz} \text{ est solution de } \boxed{(E) : u^2 - 2au + 1 = 0} \end{aligned}$$

7. Le discriminant de (E) est $\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1)$.

Comme $a \notin \mathbb{R}$, $\Delta \neq 0$ et (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes u_1 et u_2 .

De plus, $u_1 u_2 = 1$ et $u_1 + u_2 = 2a$. Si l'une des deux solutions était réelle, l'autre le serait aussi d'après leur produit. Mais alors leur somme serait réelle également, ce qui est impossible car $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

On a donc montré par l'absurde que les solutions ne sont pas réelles.

8. **Existence** Soit $u_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ avec $\rho_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_1 \in]-\pi, 0]$ ou $]0, \pi[$ (modulo 2π) car $y_1 \notin \mathbb{R}$.

- si $\theta_1 \in]0, \pi[$, alors $\rho_a = \rho_1$ et $\theta_a = \theta_1$ conviennent.
- si $\theta_1 \in]-\pi, 0[$, alors $u_2 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}$. Alors $\rho_a = \frac{1}{\rho_1}$ et $\theta_a = -\theta_1$ conviennent.

Unicité Soit $\rho_a e^{i\theta_a}$ et $\rho'_a e^{i\theta'_a}$ deux solutions de (E) avec (ρ_a, θ_a) et (ρ'_a, θ'_a) dans $]0, +\infty[\times]0, \pi[$. Alors ces deux solutions sont soit égales soit u_1 et u_2 inverses l'une de l'autre.

- Si elles sont égales, alors $\rho_a = \rho'_a$ et $\theta_a = \theta'_a \bmod 2\pi$.
Or $\theta - \theta' \in]-\pi, \pi[$ donc $\theta_a - \theta'_a = 0$, soit $\theta_a = \theta'_a$.
- Sinon, $\rho_a e^{i\theta_a} = \frac{1}{\rho'_a e^{i\theta'_a}} = \frac{1}{\rho'_a} e^{-i\theta'_a}$.
Donc $\theta_a = -\theta'_a \bmod 2\pi$, d'où $\theta_a + \theta'_a = 0 \bmod 2\pi$. Or $\theta_a + \theta'_a \in]0, 2\pi[$, ce qui est impossible.

Donc il existe un unique couple $(\rho_a, \theta_a) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[$ tel que $\rho_a e^{i\theta_a}$ soit solution de (E) .

9. Supposons que $\rho_a \neq 1$. Alors les deux solutions sont $e^{i\theta_a}$ et $\frac{1}{e^{i\theta_a}}$. Donc leur somme est $2\cos(\theta_a)$, qui est réelle, ce qui est impossible car $a \notin \mathbb{R}$.

On a donc montré par l'absurde que $\rho_a \neq 1$.

10. Soit $A_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in]0, \pi[\text{ et } \operatorname{Im} z \neq 0\}$.

$$\cos z = a \Leftrightarrow e^{iz} \text{ est solution de } (E) \Leftrightarrow e^{iz} = \rho_a e^{i\theta_a} \text{ ou } e^{iz} = \frac{1}{\rho_a} e^{-i\theta_a}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, étant donnés } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}, e^{iz} = \rho e^{i\theta} &\Leftrightarrow e^{-y} e^{ix} = \rho e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow e^{-y} = \rho \text{ et } x = \theta \bmod 2\pi \\ &\Leftrightarrow y = -\ln \rho \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, x = \theta + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = \theta + 2k\pi - i \ln \rho \end{aligned}$$

Donc ici, $\cos z = a \Leftrightarrow z = \theta_a + 2k\pi - i \ln \rho_a$ ou $z = -\theta_a + 2k\pi + i \ln \rho_a$.

Or pour $\theta_a \in]0, \pi[$ et $k \in \mathbb{Z}$, $-\theta + 2k\pi \notin]0, \pi[$ et $\theta + 2k\pi \in]0, \pi[\Leftrightarrow k = 0$.

$\cos z = a$ a donc pour unique solution dans A_5 : $\zeta(a) = \theta_a - i \ln(\rho_a)$

11. Pour $a = i$, l'équation (E) est $u^2 - 2iu + 1 = 0$ qui a pour discriminant $-8 = (2\sqrt{2}i)^2$.

Donc $u_1 = i + i\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})i = (1 + \sqrt{2})e^{i\pi/2}$ et $u_2 = (1 - \sqrt{2})i$.

Donc $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ et $\rho_i = 1 + \sqrt{2}$. D'où $\zeta(i) = \frac{\pi}{2} - i \ln(1 + \sqrt{2})$.

12. Soit $(E') : u^2 + 2au + 1 = 0$ dont les solutions sont notées u'_1 et u'_2 .

Or x est solution de (E') si et seulement si $(-x)^2 - 2a(-x) + 1 = 0$
si et seulement si $-x$ est solution de (E) .

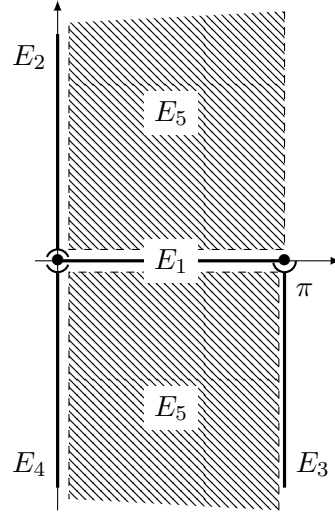
Donc les solutions de (E') sont $\left\{ -\rho_a e^{i\theta_a}, -\frac{1}{\rho_a} e^{-i\theta_a} \right\}$, soit $\left\{ \rho_a e^{i(\pi+\theta_a)}, \frac{1}{\rho_a} e^{i(\pi-\theta_a)} \right\}$.

Comme $\pi + \theta_a \notin]0, \pi[$ et $\pi - \theta_a \in]0, \pi[$, on retient $u'_1 = \frac{1}{\rho_a} e^{i(\pi-\theta_a)}$ avec $\rho_{-a} = \frac{1}{\rho_a}$ et $\theta_{-a} = \pi - \theta_a$.

D'où $\zeta(-a) = \pi - \theta_a - i \ln\left(\frac{1}{\rho_a}\right) = \pi - \theta_a + i \ln \rho_a$. Finalement, $\zeta(-a) = \pi - \zeta(a)$.

D Il est temps de conclure

13.



14. Soit $z \in A_5$ sous forme algébrique : $z = x + iy$ avec $x \in]0, \pi[$ et $y \neq 0$.

$\Phi(z)$ a pour partie imaginaire $-\sin x \operatorname{sh} y \neq 0$ (car $x \neq 0$ et $y \neq 0$).

Donc $\Phi(z) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors d'après la partie précédente, il existe (un unique) $z \in A_5$ tel que $\Phi(z) = a$. Donc $a \in \Phi(A_5)$.

On a donc montré que $\boxed{\Phi(A_5) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$.

15. $\Phi(A_6) = \Phi(A_4) \cup \Phi(A_5)$. Donc $\boxed{\Phi(A_6) = \mathbb{C}}$.

16. D'après les deux parties précédentes, on définit la fonction arccosinus complexe par

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{C} &\rightarrow A_6 \\ a &\mapsto \begin{cases} \operatorname{Arccos}(a) & \text{si } a \in [-1, 1] \\ i \operatorname{argch}(a) & \text{si } a \in [1, +\infty[\\ \pi - i \operatorname{argch}(-a) & \text{si } a \in]-\infty, -1] \\ \zeta(a) & \text{si } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

17. **1^{er} cas :** $a \in [-1, 1]$. Alors $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \operatorname{Arccos}(a) + \operatorname{Arccos}(-a)$.

Or $\pi - \operatorname{Arccos}(a) \in [0, \pi]$ et $\cos(\pi - \operatorname{Arccos}(a)) = -a$. Donc $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \pi$.

2^e cas : $a \in]1, \infty[$. Alors $-a \in]-\infty, -1[$.

Donc $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = i \operatorname{argch}(a) + \pi - i \operatorname{argch}(a) = \pi$.

3^e cas : $a \in]-\infty, -1[$. Alors de même $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \pi - i \operatorname{argch}(-a) + i \operatorname{argch}(-a) = \pi$.

4^e cas : $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors $\Gamma(a) + \Gamma(-a) = \zeta(a) + \zeta(-a) = \pi$.

Conclusion : $\boxed{\forall a \in \mathbb{C}, \Gamma(a) + \Gamma(-a) = \pi}$.

Problème 1

On définit la suite (f_n) par $\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$. On ne cherchera pas à déterminer son expression générale.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 1$.
2. (a) Montrer que la suite (f_n) est croissante.
(b) En déduire que (f_n) diverge vers $+\infty$.
3. Pour tout $n > 0$, on pose $t_n = f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1}$.
(a) Montrer que pour tout $n > 0$, $t_{n+1} = -t_n$.
(b) En déduire que pour tout $n > 0$, $t_n = (-1)^n$.
4. On définit la suite (u_n) par : $\forall n > 0$, $u_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}$. On définit (x_n) et (y_n) deux suites extraites de (u_n) par : $\forall n > 0$, $x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.
(a) Montrer que pour tout $n > 0$, $u_{n+2} - u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{f_{n+1}f_{n-1}}$.
(b) Démontrer que (x_n) et (y_n) puis (u_n) convergent vers la même limite ℓ .
(c) Montrer pour tout $n > 0$ que $\frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} \leq \ell \leq \frac{f_{2n}}{f_{2n-1}}$ puis que $0 \leq \ell - \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} \leq \frac{1}{f_{2n-1}f_{2n}}$.
5. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $H_p = \sum_{k=0}^p f_k^2$.
(a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $H_p = f_p f_{p+1}$.
(b) Pour tout $n > 0$, on note $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{H_p}$. Montrer alors que $S_n = \frac{1}{u_{n+1}} - 1$.
(c) En déduire que (S_n) converge et donner sa limite.

Problème 2

Soit (u_n) une suite définie par u_0 et u_1 réels positifs et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1$.
(a) Montrer que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
(b) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer une relation vérifiée par sa limite.
(c) Conclure.
3. (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_N > 1$.
(b) Montrer alors que $u_{N+1} > 1$ puis que $u_{N+2} > \sqrt{2}$.
(c) Montrer que pour tout $n \geq N + 2$, $u_n > \sqrt{2}$.
4. Pour simplifier, quitte à n'étudier la suite (u_n) qu'à partir d'un certain rang, on considérera dans toute la suite que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{2}$. Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = |u_n - 2|$.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} \leq \frac{v_{n+1} + v_n}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2}.$$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} \leq \frac{v_{n+1} + v_n}{3}$.

5. Soit (x_n) la suite définie par
$$\begin{cases} x_0 = v_0, x_1 = v_1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{3} \end{cases}.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n peut s'exprimer sous la forme $x_n = aq^n + br^n$, avec q et r à déterminer (et a et b que l'on ne cherchera pas à exprimer).

(b) En déduire la limite de (x_n) .

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq x_n$.

(d) En déduire le comportement de la suite (u_n) .

Problème 3

Pour tout ensemble E , on rappelle que $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E .

Définition 1

Soit E un ensemble. On dit qu'un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de E est un **filtre** sur E lorsque

$F_1)$ $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

$F_2)$ $\mathcal{F}$ est stable par intersection, i.e. $\forall X, Y \in \mathcal{F}, X \cap Y \in \mathcal{F}$.

$F_3)$ $\forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \in \mathcal{P}(E), (X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F})$.

$F_4)$ $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

On notera Φ_E l'ensemble des filtres sur E .

I Un exemple

Dans cette partie seulement, on considère $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments.

1. Expliciter $\mathcal{P}(E)$.
2. Les parties suivantes de $\mathcal{P}(E)$ sont-elles un filtre ?
 - (a) $\mathcal{F}_1 = \emptyset$.
 - (b) $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(E)$.
 - (c) $\mathcal{F}_3 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$.
 - (d) $\mathcal{F}_4 = \{\{a\}, \{a, c\}\}$.
 - (e) $\mathcal{F}_5 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.
3. Énumérer, en expliquant votre raisonnement, les parties de $\mathcal{P}(E)$ qui sont des filtres.

II Généralités

Soit maintenant E un ensemble quelconque.

4. Montrer que si E est non vide, alors $\mathcal{A} = \{E\}$ est un filtre sur E .
5. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E .

- (a) Montrer que $E \in \mathcal{F}$.
- (b) Déterminer quelles assertions sont vraies parmi les suivantes (justifications attendues.)
 - i) $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(E)$.
 - ii) $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$.
 - iii) $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
 - iv) $\mathcal{F} \subset \Phi_E$.
 - v) $E \neq \emptyset \Leftrightarrow \{E\} \in \Phi_E$.
 - vi) $\Phi_E \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
 - vii) $\Phi_E \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
 - viii) $\Phi_E \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$.
- 6. À quelle condition nécessaire et suffisante $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
- 7. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtres sur E . Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un filtre sur E .

III Filtres principaux

Soit E un ensemble. Pour toute partie non vide A de E , on pose

$$\mathcal{H}_A = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset X\}.$$

- 8. Dans l'exemple de la partie I, déterminer $\mathcal{H}_{\{a\}}$, $\mathcal{H}_{\{a,b\}}$ et $\mathcal{H}_{\{a,b,c\}}$
- 9. Soit A une partie non vide de E . Montrer que $\mathcal{H}_A$ est un filtre sur E .
 *$\mathcal{H}_A$ est appelé le **filtre principal engendré par A** .*
- 10. Soient A une partie non vide de E et $\mathcal{F}$ un filtre sur E . Montrer que $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}$.
- 11. Soient A et B deux parties non vides de E .
 - (a) Montrer que $A \subset B \Rightarrow \mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_A$.
 - (b) Montrer que $\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A \cup B}$.
- 12. Soient A et B deux parties non disjointes de E .
 - (a) Montrer que $\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_{A \cap B}$.
 - (b) Montrer que $\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A \cap B} \Leftrightarrow A \subset B$ ou $B \subset A$.
- 13. On note $\mathcal{P}(E)^*$ l'ensemble des parties non vides de E et on pose

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} : \mathcal{P}(E)^* & \longrightarrow & \Phi_E \\ A & \longmapsto & \mathcal{H}_A \end{array}.$$

Montrer que $\mathcal{H}$ est injective.

IV Un exemple de filtre non principal

Dans cette partie, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$. On définit de plus

$$\mathcal{I} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, k \in X\}.$$

- 14. Montrer que $\mathcal{I}$ est un filtre sur $\mathbb{N}$.
- 15. Montrer que

$$\mathcal{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{I_n}.$$

- 16. (a) Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{I}$ n'est pas inclus dans $\mathcal{H}_A$.
- (b) En déduire que l'application $\mathcal{H}$ de la question 13 n'est pas surjective lorsque $E = \mathbb{N}$.

V Ultrafiltres

On considère la définition suivante.

Définition 2

Soit E un ensemble. On dit qu'un filtre $\mathcal{U}$ sur E est un **ultrafiltre** lorsque

$$\forall \mathcal{F} \in \Phi_E, (\mathcal{U} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{F}).$$

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E , $\bar{A}$ désignera le complémentaire de A dans E .

17. (a) Soit $a \in E$. On pose $A = \{a\}$. Montrer que $\mathcal{H}_A$ est un ultrafiltre sur E .
- (b) Soit A une partie de E contenant au moins deux éléments. Montrer que $\mathcal{H}_A$ n'est pas un ultrafiltre.

Définition 3

Deux filtres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sur E sont dits **compatibles** lorsque

$$\forall X_1 \in \mathcal{F}_1, \forall X_2 \in \mathcal{F}_2, X_1 \cap X_2 \neq \emptyset.$$

On pose alors

$$\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 = \{X_1 \cap X_2 \mid X_1 \in \mathcal{F}_1, X_2 \in \mathcal{F}_2\}.$$

18. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux filtres sur E compatibles.

- (a) Montrer que $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ est un filtre sur E .
- (b) Soit $\mathcal{G} \in \Phi_E$. Montrer que

$$(\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}) \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}.$$

19. Soient $\mathcal{F}$ un filtre sur E et A une partie non vide de E . Montrer que si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}_A$ ne sont pas compatibles, alors $\bar{A} \in \mathcal{F}$.
20. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E . Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), (A \in \mathcal{F} \text{ ou } \bar{A} \in \mathcal{F}).$$

21. En déduire que $\mathcal{I}$ n'est pas un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$.

Problème 1

On définit la suite (f_n) par $\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$.

1. Procédons par récurrence double.

Init. $f_0 = 1 \geq 1$ et $f_1 = 1 \geq 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f_n \geq 1$ et $f_{n+1} \geq 1$.

Alors $f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \geq 2 \geq 1$. La propriété est donc héréditaire.

2. (a) $\forall n \geq 1, f_{n+1} - f_n = f_{n-1} \geq 1$ d'après ce qui précède, donc $f_{n+1} - f_n \geq 0$.

La suite est donc croissante à partir du rang 1. De plus $f_0 \leq f_1$. Donc La suite (f_n) est croissante.

(b) Par conséquent, soit elle est majorée et converge donc, soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons-la majorée, alors elle converge ; soit ℓ sa limite.

Alors on a aussi $f_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ et $f_{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. La relation $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ donne, par unicité de la limite, $\ell = 2\ell$. Donc $\ell = 0$, ce qui est impossible car $f_n \geq 1$ pour tout n . On a donc montré que (f_n) diverge vers $+\infty$.

3. Pour tout $n > 0$, on pose $t_n = f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1}$.

(a) Pour tout $n > 0, t_{n+1} = f_{n+1}^2 - f_{n+2}f_n = f_{n+1}^2 - (f_n + f_{n+1})f_n = f_{n+1}^2 - f_n^2 - f_{n+1}f_n$.
D'où $t_{n+1} = -f_n^2 - f_{n+1}(f_n - f_{n+1}) = -f_n^2 + f_{n+1}f_{n-1} = \boxed{-t_n}$.

(b) On en déduit que (t_n) est géométrique de raison (-1) . Donc $\forall n > 0, t_n = t_1 \times (-1)^{n-1}$.
Or $t_1 = -1$. Finalement, $\forall n > 0, t_n = (-1)^n$.

4. On définit (u_n) par : $\forall n > 0, u_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}$ et (x_n) et (y_n) par : $\forall n > 0, x_n = u_{2n}$ et $y_n = u_{2n+1}$.

(a) Pour tout $n > 0, u_{n+2} - u_n = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} - \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_{n+2}f_{n-1} - f_nf_{n+1}}{f_{n+1}f_{n-1}}$.

Or $f_{n+2}f_{n-1} - f_nf_{n+1} = (f_{n+1} + f_n)f_{n-1} - f_n(f_n + f_{n-1}) = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = -t_n = (-1)^{n+1}$.

Donc $\forall n > 0, u_{n+2} - u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{f_{n+1}f_{n-1}}$.

(b) • $\forall n > 0, x_{n+1} - x_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{f_{2n+1}f_{2n-1}} < 0$.

Donc (x_n) est décroissante.

• $\forall n > 0, y_{n+1} - y_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{f_{2n+2}f_{2n}} > 0$.

Donc (y_n) est décroissante.

• $\forall n > 0, y_n - x_n = u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} - \frac{f_{2n}}{f_{2n-1}} = \frac{f_{2n+1}f_{2n-1} - f_{2n}^2}{f_{2n}f_{2n-1}}$.

Or $f_{2n+1}f_{2n-1} - f_{2n}^2 = -t_{2n} = (-1)^{2n+1}$. Donc $y_n - x_n = \frac{-1}{f_{2n}f_{2n-1}}$. Comme $f_{2n}f_{2n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty, y_n - x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

On a donc montré que (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

(c) Ceci implique que (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite. Comme elles constituent deux suites extraites de (u_n) qui en recouvrent tous les termes (à partir du rang 1), ça montre que (u_n) est convergente.

(d) On appelle ℓ la limite de (u_n) qui est donc aussi celle de (x_n) et (y_n) . Comme (x_n) est décroissante et (y_n) croissante, on a $\ell = \inf\{x_n, n > 0\} = \sup\{y_n, n > 0\}$. Donc pour tout $n > 0$, $y_n \leq \ell \leq x_n$.

Ainsi, pour tout $n > 0$, $\frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} \leq \ell \leq \frac{f_{2n}}{f_{2n-1}}$.

En retranchant y_n , on obtient $0 \leq \ell - \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} \leq x_n - y_n$. Or on a montré précédemment que $x_n -$

$y_n = \frac{1}{f_{2n}f_{2n-1}}$. Finalement, pour tout $n > 0$, $0 \leq \ell - \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} \leq \frac{1}{f_{2n-1}f_{2n}}$.

5. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $H_p = \sum_{k=0}^p f_k^2$.

(a) Procédons par récurrence.

Init. $H_0 = f_0^2 = 1$ et $f_0f_1 = 1$.

Hér. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $H_p = f_p f_{p+1}$.

Alors $H_{p+1} = H_p + f_{p+1}^2 = f_p f_{p+1} + f_{p+1}^2 = f_{p+1}(f_p + f_{p+1}) = f_{p+1}f_{p+2}$. La propriété est donc héréditaire.

On a donc montré que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $H_p = f_p f_{p+1}$.

(b) Pour tout $n > 0$, on note $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{H_p}$.

$$S_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{H_p} = \sum_{p=1}^n \frac{f_p^2 - f_{p+1}f_{p-1}}{f_p f_{p+1}} = \sum_{p=1}^n \frac{f_p}{f_{p+1}} - \frac{f_{p-1}}{f_p} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p}.$$

On conclut à l'aide d'une somme télescopique que : $S_n = \frac{1}{u_{n+1}} - 1$.

(c) Comme $\ell \neq 0$, (S_n) converge vers $\frac{1}{\ell} - 1$.

Problème 2

Soit (u_n) une suite définie par u_0 et u_1 réels positifs et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

1. On procède par récurrence double.

Init. u_0 et u_1 sont bien définis et strictement positifs par hypothèse.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n et u_{n+1} sont bien définis et positifs.

Alors $u_{n+1} + u_n > 0$, donc $\sqrt{u_{n+1} + u_n}$ est bien défini et strictement positif.

2. Dans cette question, on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} + u_n} - u_{n+1} = \frac{(\sqrt{u_{n+1} + u_n} - u_{n+1})(\sqrt{u_{n+1} + u_n} + u_{n+1})}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + u_{n+1}}$
(quantité conjuguée).

D'où $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + u_n - u_{n+1}^2}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + u_{n+1}}$.

Or $u_{n+1} + u_n - u_{n+1}^2 = u_{n+1}(1 - u_{n+1}) + u_n \geq 0$ sous l'hypothèse que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 1$.

Donc (u_n) est croissante à partir du rang 1.

- (b) De plus (u_n) est majorée par 1, donc (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite. Par continuité de la fonction racine carrée, elle vérifie $\boxed{\ell = \sqrt{2\ell}}$.
- (c) $\ell = \sqrt{2\ell} \Leftrightarrow \sqrt{\ell}(\sqrt{\ell} - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 2$.
Or (u_n) est bornée par 0 et 1 et strictement croissante, donc sa limite est dans $]0, 1]$, ce qui est impossible.
3. (a) La question 2 montre que l'hypothèse « $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 1$ » est fausse.
Donc $\boxed{\text{il existe } N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } u_N > 1}$.
- (b) On a alors : $u_{N+1} = \sqrt{u_N + u_{N-1}}$. Or $u_{N-1} > 0$ donc $u_{N+1} > \sqrt{u_N} \boxed{> 1}$.
Puis $u_{N+2} = \sqrt{u_N + u_{N+1}} \boxed{> \sqrt{2}}$.
- (c) On procède par récurrence double.
Comme précédemment, $u_{N+3} = \sqrt{u_{N+2} + u_{N+1}} > \sqrt{\sqrt{2} + 1} \boxed{> \sqrt{2}}$ car $\sqrt{2} > 1$, ce qui achève l'initialisation (pour $N + 2$, c'est la question précédente).
Soit $n \geq N + 2$. Supposons que $u_n > \sqrt{2}$ et $u_{n+1} > \sqrt{2}$.
Alors $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n} > \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ car $\sqrt{2} > 1$.
4. Pour simplifier, quitte à n'étudier la suite (u_n) qu'à partir d'un certain rang, on considérera dans toute la suite que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \sqrt{2}$. Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = |u_n - 2|$.
- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+2} = |u_{n+2} - 2| = |\sqrt{u_{n+1} + u_n} - 2|$. On multiplie par la quantité conjuguée :
$$v_{n+2} = \left| \frac{u_{n+1} + u_n - 4}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2} \right| = \frac{|u_{n+1} - 2 + u_n - 2|}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2} \leq \frac{|u_{n+1} - 2| + |u_n - 2|}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2}$$
 par inégalité triangulaire. Finalement $\boxed{v_{n+2} \leq \frac{v_{n+1} + v_n}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2}}$.
- (b) Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \sqrt{2}$, $\sqrt{u_{n+1} + u_n} > \sqrt{2\sqrt{2}} > 1$ donc $\frac{v_{n+1} + v_n}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2} \leq \frac{v_{n+1} + v_n}{1 + 2}$.
Finalement, $\boxed{v_{n+2} \leq \frac{v_{n+1} + v_n}{3}}$.
5. Soit (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_0 = v_0, x_1 = v_1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{3} \end{cases}$.
- (a) (x_n) vérifie une relation de récurrence à deux termes, dont l'équation caractéristique est $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$. Elle a deux racines : $q = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$ et $r = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = aq^n + br^n$, avec a et b deux réels.
- (b) Comme $\sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$, on a $|q| < 1$ et $|r| < 1$. Ainsi, $q^n \rightarrow 0$ et $r^n \rightarrow 0$ et par conséquent $\boxed{(x_n) \text{ tend vers } 0}$.
- (c) On montre par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq x_n$.
L'initialisation vient de la définition de (x_n) avec $x_0 = v_0$ et $x_1 = v_1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n \leq x_n$ et $v_{n+1} \leq x_{n+1}$.
Alors $v_{n+2} \leq \frac{v_{n+1} + v_n}{3} \leq \frac{x_{n+1} + x_n}{3} = x_{n+2}$.
- (d) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq v_n \leq x_n$. D'après le théorème des gendarmes, (v_n) tend vers 0 et donc $\boxed{u_n \rightarrow 2}$.

Problème 3

I Un exemple

Dans cette partie seulement, on considère $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à trois éléments.

1. On a

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

2. (a) $\mathcal{F}_1 = \emptyset$ n'est pas un filtre car la condition (F_1) n'est pas satisfaite.
 (b) $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(E)$ n'est pas un filtre car $\emptyset \in \mathcal{F}_2$ ce qui contredit la condition (F_4) .
 (c) $\mathcal{F}_3 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ n'est pas un filtre car

$$\{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset \notin \mathcal{F}_3,$$

ce qui contredit (F_2) .

- (d) $\mathcal{F}_4 = \{\{a\}, \{a, c\}\}$ n'est pas un filtre : on a $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ mais $\{a, b, c\} \notin \mathcal{F}_4$, ce qui contredit (F_3) .
 (e) $\mathcal{F}_5 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ est un filtre : (F_1) et (F_4) sont claires, l'intersection de deux éléments appartient encore à $\mathcal{F}_5$, et toute partie contenant un élément de $\mathcal{F}_5$ appartient aussi à $\mathcal{F}_5$. Ainsi, les quatre conditions sont vérifiées donc $\mathcal{F}_5$ est un filtre.
 3. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ un filtre. Puisque $\emptyset \notin \mathcal{F}$, plusieurs cas sont à distinguer.

- Si $\{a\} \in \mathcal{F}$, alors par (F_3) , $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\} \in \mathcal{F}$. En revanche, $\{b\}, \{c\}, \{b, c\} \notin \mathcal{F}$ car leur intersection avec $\{a\}$ vaut $\emptyset$. Donc

$$\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

- De même si $\{b\} \in \mathcal{F}$, on obtient

$$\mathcal{F} = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

- Si $\{c\} \in \mathcal{F}$, on obtient

$$\mathcal{F} = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

- Si $\{a\}, \{b\}, \{c\} \notin \mathcal{F}$ mais $\{a, b\} \in \mathcal{F}$, alors par (F_3) , $\{a, b, c\} \in \mathcal{F}$ tandis que $\{a, c\}, \{b, c\} \notin \mathcal{F}$. Donc

$$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}.$$

- De même si $\{a, c\} \in \mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} = \{\{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

- De même si $\{b, c\} \in \mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} = \{\{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

- Enfin, si aucun des ensembles précédents n'est dans $\mathcal{F}$, il reste uniquement

$$\mathcal{F} = \{\{a, b, c\}\}.$$

Pour résumer, les filtres sur E sont exactement

$$\boxed{\begin{aligned} &\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}, \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}, \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}, \\ &\{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \{\{a, c\}, \{a, b, c\}\}, \{\{b, c\}, \{a, b, c\}\}, \{\{a, b, c\}\} \end{aligned}}.$$

II Généralités

Soit maintenant E un ensemble quelconque.

4. On suppose E non vide. Montrons que $\mathcal{A} = \{E\}$ est un filtre sur E .

- Comme $E \in \mathcal{A}$, on a $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Ainsi $\mathcal{A}$ vérifie bien (F_1) .
- Soit $X, Y \in \mathcal{A}$. On a nécessairement $X = Y = E$ donc $X \cap Y = E$, ainsi $X \cap Y \in \mathcal{A}$. On vérifie ainsi (F_2) .
- Soit $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$. On a $X = E$, puis $E \subset Y$ et $Y \subset E$ car Y est une partie de E . Donc $Y = E$ et $Y \in \mathcal{A}$. Ainsi (F_3) est vérifiée.
- Comme $E \neq \emptyset$, on a $\emptyset \notin \mathcal{A}$. Ainsi (F_4) est satisfaite.

$$\boxed{\mathcal{A} = \{E\} \text{ est un filtre sur } E}.$$

5. (a) D'après (F_1) , $\mathcal{F} \neq \emptyset$. On peut donc choisir $A \in \mathcal{F}$. Comme $A \subset E$ et $E \in \mathcal{P}(E)$, on déduit de (F_3) que $\boxed{E \in \mathcal{F}}$.

- (b)
- Par définition, $\mathcal{F}$ est un ensemble de parties de E , *i.e.* $\forall X \in \mathcal{F}, X \in \mathcal{P}(E)$, donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$.
 - Comme $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$, on a alors $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
 - D'après la question précédente, si E est non vide, alors $\{E\}$ est un filtre sur E , *i.e.*

$$E \neq \emptyset \Rightarrow \{E\} \in \Phi_E.$$

Réciproquement, si $\{E\}$ est un filtre, (F_4) implique $E \neq \emptyset$.

- Puisque tout filtre appartient à $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, on a $\Phi_E \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
- Enfin, puisque Φ_E est lui-même un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, on a $\Phi_E \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$.

$$\boxed{\text{Les assertions } ii), iii), v), vii) \text{ et } viii) \text{ sont vraies}}.$$

6. On pose $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. On distingue trois cas.

- Si $E = \emptyset$, alors $\mathcal{B} = \emptyset$. Donc $\mathcal{B}$ ne vérifie pas (F_1) .
- Si E ne possède qu'un élément, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E\}$, donc $\mathcal{B} = \{E\}$ qui est un filtre d'après la question 1.
- Si E possède deux éléments distincts a et b , alors $\{a\} \in \mathcal{B}$ et $\{b\} \in \mathcal{B}$. Comme $a \neq b$, on a $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$ qui n'appartient pas à $\mathcal{B}$. Ainsi (F_2) n'est pas vérifiée.

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est un filtre sur } E \text{ ssi } E \text{ possède un unique élément}}.$$

7. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux filtres sur E .

- Comme $E \in \mathcal{F}$ et $E \in \mathcal{G}$, on a $E \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Ainsi $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
- Soit $X, Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. On a $X, Y \in \mathcal{F}$ et $X, Y \in \mathcal{G}$. Comme ce sont des filtres, $X \cap Y \in \mathcal{F}$ et $X \cap Y \in \mathcal{G}$ donc $X \cap Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
- Soit $X \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$. Comme $X \in \mathcal{F}$ et $X \in \mathcal{G}$, on déduit de (F_3) que $Y \in \mathcal{F}$ et $Y \in \mathcal{G}$, donc $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
- Enfin, comme $\emptyset \notin \mathcal{F}$, on a nécessairement $\emptyset \notin \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

$$\boxed{\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \text{ est un filtre sur } E}.$$

III Filtres principaux

Soit E un ensemble. Pour toute partie non vide A de E , on pose

$$\mathcal{H}_A = \{X \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset X\}.$$

8.

$$\mathcal{H}_{\{a\}} = \{X \subset E \mid \{a\} \subset X\} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

$$\boxed{\mathcal{H}_{\{a\}} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}}$$

De même,

$$\mathcal{H}_{\{a, b\}} = \{X \subset E \mid \{a, b\} \subset X\} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\},$$

$$\boxed{\mathcal{H}_{\{a, b\}} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}}$$

et enfin

$$\mathcal{H}_{\{a, b, c\}} = \{X \subset E \mid \{a, b, c\} \subset X\} = \{\{a, b, c\}\},$$

$$\boxed{\mathcal{H}_{\{a, b, c\}} = \{\{a, b, c\}\}}$$

9. Soit A une partie non vide de E . Montrons que $\mathcal{H}_A$ est un filtre sur E .

- Par définition de $\mathcal{H}_A$, on a $A \in \mathcal{H}_A$. En particulier $\mathcal{H}_A \neq \emptyset$.
- Soit $X, Y \in \mathcal{H}_A$. On a $A \subset X$ et $A \subset Y$, donc $A \subset X \cap Y$, *i.e.* $X \cap Y \in \mathcal{H}_A$.
- Soit $X \in \mathcal{H}_A$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$. Comme $A \subset X$ et $X \subset Y$, on a $A \subset Y$, *i.e.* $Y \in \mathcal{H}_A$.
- Comme $A \neq \emptyset$, on a $A \not\subset \emptyset$. Donc $\emptyset \notin \mathcal{H}_A$.

$$\boxed{\mathcal{H}_A \text{ est un filtre sur } E}.$$

10. Soit A une partie non vide de E et $\mathcal{F}$ un filtre sur E .

$\Rightarrow$ Supposons $A \in \mathcal{F}$. Soit $X \in \mathcal{H}_A$. Par définition $A \subset X$. D'après (F_3) , $X \in \mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}$.

$\Leftarrow$ Supposons $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}$. Comme $A \in \mathcal{H}_A$ par définition, on a $A \in \mathcal{F}$.

$$\boxed{A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}}.$$

11. (a) Supposons $A \subset B$. Alors $B \in \mathcal{H}_A$. Comme $\mathcal{H}_A$ est un filtre, on déduit de la question précédente que $\mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_A$.

$$\boxed{A \subset B \Rightarrow \mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_A}.$$

(b) Montrons l'égalité par double inclusion.

$\sqsubset$ Soit $X \in \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B$. On a $A \subset X$ et $B \subset X$, donc $A \cup B \subset X$, *i.e.* $X \in \mathcal{H}_{A \cup B}$. Ainsi

$$\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_{A \cup B}.$$

$\supset$ On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc $A \cup B \in \mathcal{H}_A$ et $A \cup B \in \mathcal{H}_B$. Par la question précédente, $\mathcal{H}_{A \cup B} \subset \mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_{A \cup B} \subset \mathcal{H}_B$. Ainsi

$$\mathcal{H}_{A \cup B} \subset \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B.$$

$$\boxed{\mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A \cup B}}.$$

12. (a) On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc $A \in \mathcal{H}_{A \cap B}$ et $B \in \mathcal{H}_{A \cap B}$. D'après la question précédente, $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}_{A \cap B}$ et $\mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_{A \cap B}$.

$$\boxed{\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_{A \cap B}}.$$

- (b) $\Rightarrow$ Supposons $\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A \cap B}$. Comme $A \cap B \in \mathcal{H}_{A \cap B}$, on a $A \cap B \in \mathcal{H}_A$ ou $A \cap B \in \mathcal{H}_B$.

- Si $A \cap B \in \mathcal{H}_A$, alors $A \subset A \cap B$, d'où $A \subset B$.
- Si $A \cap B \in \mathcal{H}_B$, alors $B \subset A \cap B$, d'où $B \subset A$.

- $\Leftarrow$ Supposons $A \subset B$ ou $B \subset A$.

- Si $A \subset B$, alors $\mathcal{H}_B \subset \mathcal{H}_A$ d'après la question précédente, donc

$$\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_{A \cap B}.$$

- Si $B \subset A$, alors $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}_B$ et

$$\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A \cap B}.$$

Dans les deux cas l'égalité est vérifiée.

$$\boxed{\mathcal{H}_A \cup \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{A \cap B} \Leftrightarrow A \subset B \text{ ou } B \subset A}.$$

13. Montrons que l'application $A \mapsto \mathcal{H}_A$ est injective. Soit A, B des parties non vides de E telles que $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B$.

- Comme $A \in \mathcal{H}_A$, on a $A \in \mathcal{H}_B$, i.e. $B \subset A$.
- Comme $B \in \mathcal{H}_B$, on a $B \in \mathcal{H}_A$, i.e. $A \subset B$.

Ainsi $A = B$.

$$\boxed{\text{L'application } A \mapsto \mathcal{H}_A \text{ est injective}}.$$

IV Un exemple de filtre non principal

Dans cette partie, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$. On définit de plus

$$\mathcal{I} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, k \in X\}.$$

14. Montrons que $\mathcal{I}$ est un filtre sur $\mathbb{N}$.

- La propriété $\exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, k \in \mathbb{N}$ est vraie car $n = 0$ convient. Ainsi $\mathbb{N} \in \mathcal{I}$, donc $\mathcal{I} \neq \emptyset$.
- Soit $X_1, X_2 \in \mathcal{I}$. Il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall k \geq n_1, k \in X_1 \quad \text{et} \quad \forall k \geq n_2, k \in X_2.$$

Posons $N = \max\{n_1, n_2\}$. Pour $k \geq N$, on a $k \in X_1$ et $k \in X_2$. Ainsi

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, k \in X_1 \cap X_2,$$

donc $X_1 \cap X_2 \in \mathcal{I}$.

- Soit $X \in \mathcal{I}$ et $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tels que $X \subset Y$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall k \geq n, k \in X$. Comme $X \subset Y$, on a $\forall k \geq n, k \in Y$, donc $Y \in \mathcal{I}$.
- La propriété $\exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, k \in \emptyset$ est fausse, donc $\emptyset \notin \mathcal{I}$.

$$\boxed{\mathcal{I} \text{ est un filtre sur } \mathbb{N}}.$$

15. Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Par définition de $\mathcal{I}$, on a les équivalences

$$X \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, k \in X \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, I_n \subset X \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, X \in \mathcal{H}_{I_n} \Leftrightarrow X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{I_n}.$$

$$\boxed{\mathcal{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{I_n}}.$$

16. (a) Soit $A \subset \mathbb{N}$ non vide et $a \in A$. Posons $n = a + 1$. Comme $a < n$, on a $a \notin I_n$, donc $A \not\subset I_n$. Ainsi $I_n \notin \mathcal{H}_A$, alors que $I_n \in \mathcal{I}$. On a donc trouvé un élément de $\mathcal{I}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{H}_A$.

$$\boxed{\mathcal{I} \not\subset \mathcal{H}_A}.$$

(b) D'après la question précédente,

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^*, \quad \mathcal{I} \neq \mathcal{H}_A.$$

Ainsi $\mathcal{I}$ n'est l'image d'aucune partie non vide par $A \mapsto \mathcal{H}_A$.

$$\boxed{\text{Si } E = \mathbb{N}, \text{ l'application } A \mapsto \mathcal{H}_A \text{ n'est pas surjective}}.$$

17. (a) Soit $a \in E$ et $A = \{a\}$. Soit $\mathcal{F}$ un filtre tel que $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}$. Soit $X \in \mathcal{F}$. Comme $A \in \mathcal{H}_A$, on a $A \in \mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F}$ est un filtre, $X \cap A \in \mathcal{F}$, et comme $A = \{a\}$, on a nécessairement $X \cap A = \{a\}$. On en déduit $a \in X$, donc $A \subset X$, i.e. $X \in \mathcal{H}_A$. Ainsi $\mathcal{F} = \mathcal{H}_A$.

$$\boxed{\text{Si } A = \{a\}, \mathcal{H}_A \text{ est un ultrafiltre sur } E}.$$

- (b) Supposons A contenant au moins deux éléments distincts a_1, a_2 . Posons $B = \{a_1\}$. Comme $B \subset A$, on a $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H}_B$. De plus, $A \not\subset B$, donc $B \notin \mathcal{H}_A$ tandis que $B \in \mathcal{H}_B$. Ainsi $\mathcal{H}_A \neq \mathcal{H}_B$, donc $\mathcal{H}_A$ n'est pas maximal.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ contient au moins deux éléments, } \mathcal{H}_A \text{ n'est pas un ultrafiltre}}.$$

18. (a) Montrons que $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ est un filtre sur E .

- Comme $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des filtres, on a $E \in \mathcal{F}_1$ et $E \in \mathcal{F}_2$, donc $E \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$.
- Soit $X, X' \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$. Il existe $X_1, X'_1 \in \mathcal{F}_1$ et $X_2, X'_2 \in \mathcal{F}_2$ tels que

$$X = X_1 \cap X_2, \quad X' = X'_1 \cap X'_2.$$

Ainsi

$$X \cap X' = (X_1 \cap X'_1) \cap (X_2 \cap X'_2) \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2.$$

- Soit $X \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ et $Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$. Il existe $X_1 \in \mathcal{F}_1$ et $X_2 \in \mathcal{F}_2$ tels que $X = X_1 \cap X_2$. Posons $Y_1 = Y \cup X_1$ et $Y_2 = Y \cup X_2$. Alors

$$Y_1 \in \mathcal{F}_1, \quad Y_2 \in \mathcal{F}_2, \quad Y_1 \cap Y_2 = Y.$$

Ainsi $Y \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$.

- Comme $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont compatibles, tout élément de $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ est non vide, donc $\emptyset \notin \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$.

$$\boxed{\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \text{ est un filtre sur } E}.$$

(b) Soit $\mathcal{G}$ un filtre sur E .

- $\Rightarrow$ Supposons $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{G}$ et $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$. Pour $X \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$, il existe $X_1 \in \mathcal{F}_1$ et $X_2 \in \mathcal{F}_2$ tels que $X = X_1 \cap X_2$. Comme $\mathcal{G}$ est un filtre, $X \in \mathcal{G}$, donc $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$.
- $\Leftarrow$ Supposons $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$. Pour $X_1 \in \mathcal{F}_1$, comme $E \in \mathcal{F}_2$ on a $X_1 = X_1 \cap E \in \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$. Donc $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{G}$. De même $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$.

$$\boxed{\forall \mathcal{G} \in \Phi_E, (\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}) \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}}.$$

19. Supposons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}_A$ ne sont pas compatibles. Il existe $X \in \mathcal{F}$ et $Y \in \mathcal{H}_A$ tels que $X \cap Y = \emptyset$. Comme $A \subset Y$, on obtient $X \cap A = \emptyset$, donc $X \subset \bar{A}$. Comme $\bar{A} \supset X$ et $\mathcal{F}$ est un filtre, $\bar{A} \in \mathcal{F}$.

$$\boxed{\text{Si } \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{H}_A \text{ ne sont pas compatibles, alors } \bar{A} \in \mathcal{F}}.$$

20. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E .

$\Rightarrow$ Supposons $\mathcal{F}$ ultrafiltre. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on distingue trois cas.

- Si $A = \emptyset$, alors $\bar{A} = E \in \mathcal{F}$.
- Si $A \neq \emptyset$ et $\mathcal{F}$ n'est pas compatible avec $\mathcal{H}_A$, alors $\bar{A} \in \mathcal{F}$ d'après la question précédente.
- Si $A \neq \emptyset$ et $\mathcal{F}$ est compatible avec $\mathcal{H}_A$, posons $\mathcal{G} = \mathcal{F} \vee \mathcal{H}_A$. D'après la question 14, $\mathcal{G}$ est un filtre contenant $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}$ est maximal, on a $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, donc $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{F}$ et en particulier $A \in \mathcal{F}$.

Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \in \mathcal{F}$ ou $\bar{A} \in \mathcal{F}$.

$\Leftarrow$ Supposons $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \in \mathcal{F} \text{ ou } \bar{A} \in \mathcal{F}$. Soit $\mathcal{G}$ un filtre tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Pour $A \in \mathcal{G}$, si $\bar{A} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, alors $\emptyset = A \cap \bar{A} \in \mathcal{G}$, contradiction. Donc $A \in \mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, donc $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est un ultrafiltre ssi } \forall A \in \mathcal{P}(E), A \in \mathcal{F} \text{ ou } \bar{A} \in \mathcal{F}}.$$

21. Posons A l'ensemble des entiers pairs. Alors $\bar{A}$ est l'ensemble des entiers impairs. Par définition de $\mathcal{I}$, ni A ni $\bar{A}$ n'appartient à $\mathcal{I}$. D'après la caractérisation précédente, $\mathcal{I}$ n'est donc pas un ultrafiltre.

$$\boxed{\mathcal{I} \text{ n'est pas un ultrafiltre sur } \mathbb{N}}.$$

V Ultrafiltres

On considère la définition suivante.

Définition 1

Soit E un ensemble. On dit qu'un filtre $\mathcal{U}$ sur E est un **ultrafiltre** lorsque

$$\forall \mathcal{F} \in \Phi_E, (\mathcal{U} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{F}).$$

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E , $\bar{A}$ désignera le complémentaire de A dans E .

22. (a) Soit $a \in E$. On pose $A = \{a\}$. Montrer que $\mathcal{H}_A$ est un ultrafiltre sur E .
(b) Soit A une partie de E contenant au moins deux éléments. Montrer que $\mathcal{H}_A$ n'est pas un ultrafiltre.

Problème 1

Notation. Dans la seconde partie du problème, étant donnée une fonction réelle u , définie sur un domaine D , à valeurs dans une partie majorée de $\mathbb{R}$, on note

$$\sup_{x \in D} u(x) = \sup(\{u(x) \mid x \in D\}) = \sup(u(D)).$$

I Égalité de Taylor-Lagrange

Dans cette partie, on considère deux réels a et b tels que $a < b$, $n \in \mathbb{N}$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose de plus que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$ et on note $f^{(n+1)}$ sa dérivée sur cet intervalle.

L'objectif de cette partie est de démontrer l'existence d'un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Ce résultat est l'égalité de Taylor-Lagrange.

1. À quel théorème correspond l'égalité de Taylor-Lagrange lorsque $n = 0$?

On revient au cas général. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère $g_\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [a, b], g_\lambda(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k + \frac{\lambda}{(n+1)!} (b-x)^{n+1}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que g_λ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculer $g'_\lambda(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.
3. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $c \in]a, b[$ tels que $g_\mu(a) = 0$ et $g'_\mu(c) = 0$.
4. Conclure.

II Inégalité de Kolmogorov

Dans cette partie, on considère $a \in \mathbb{R}$ et une fonction $f :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $]a, +\infty[$ et on pose

$$M_0 = \sup_{x \in]a, +\infty[} |f(x)| \text{ et } M_2 = \sup_{x \in]a, +\infty[} |f''(x)|.$$

L'objectif de cette partie est de démontrer que f' est bornée sur $]a, +\infty[$ et de montrer une inégalité de Kolmogorov

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}, \text{ avec } M_1 = \sup_{x \in]a, +\infty[} |f'(x)|.$$

5. Soit $x_0 \in]a, +\infty[$ et $h > 0$. On pose $x = x_0 + h$.

(a) Montrer qu'il existe $c \in]x_0, x[$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(c)\frac{h^2}{2}.$$

(b) En déduire que

$$|f'(x_0)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

6. En déduire que f' est bornée sur $]a, +\infty[$. On pose alors $M_1 = \sup_{x \in]a, +\infty[} |f'(x)|$.

7. Soit $A, B > 0$. Étudier les variations de la fonction $\varphi : h \mapsto \frac{2A}{h} + \frac{hB}{2}$ sur $]0, +\infty[$.

8. Conclure.

Problème 2

La chocolaterie *Diophantaisie* fabrique des tablettes constituées de carreaux, des petits carrés de chocolat identiques, assemblés pour former de grandes plaques carrées. Elle souhaite proposer deux formats de plaques, un format raisonnable et un format plus gourmand, contenant *trois fois plus de carreaux* que le plus petit.

Un ingénieur de la firme montre que cette exigence est mathématiquement irréalisable : si les deux formats de plaques sont constitués de petits carreaux identiques, le rapport de leurs côtés doit être $\sqrt{3}$, ce qui est impossible puisque $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Il observe toutefois qu'en introduisant une petite tolérance (un carreau de plus ou de moins, ce qui est sans impact perceptible pour le consommateur), le problème devient soluble. Les dirigeants acceptent alors de produire des plaques contenant respectivement n^2 et m^2 carreaux, vérifiant

$$n^2 = 3m^2 \pm 1.$$

I Friandise

1. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. (on pourra éventuellement admettre ce résultat pour la suite)
2. En considérant les congruences modulo 4, montrer que l'équation $n^2 = 3m^2 - 1$ n'a aucune solution entière.

II Gourmandise

On considère l'ensemble noté $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, défini par

$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\sqrt{3}\}.$$

3. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est un anneau, muni des lois $+$ et $\times$ (addition et multiplication) usuelles.
4. Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{3}$.
5. Soit $x = a + b\sqrt{3}$, avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. L'unicité du couple (a, b) nous permet de définir $\bar{x} = a - b\sqrt{3}$ et $N(x) = x\bar{x}$.
 - (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}], N(x) \in \mathbb{Z}$.
 - (b) Montrer que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}], \overline{x_1 \times x_2} = \bar{x}_1 \times \bar{x}_2$.
 - (c) En déduire que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}], N(x_1 x_2) = N(x_1) N(x_2)$.

On note $G = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]^\times$ le groupe des éléments de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, inversibles pour la loi $\times$.

6. (a) Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Montrer que $x \in G$ si et seulement si $N(x) = 1$.
Indication. Pour l'implication directe, on pourra commencer par montrer que si $x \in G$, alors $N(x) = \pm 1$.
 (b) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est-il un corps ?

On pose $x_0 = 2 + \sqrt{3}$ et $H = G \cap]1, +\infty[$.

7. (a) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On pose $x = a + b\sqrt{3}$. Montrer que si $x \in H$, alors $a \geq 2$ et $b \geq 1$.
Indication. On pourra montrer tout d'abord $0 < \bar{x} < 1 < x$, puis $b \geq 1$ et enfin $a \geq 2$.
 (b) Montrer que x_0 est le plus petit élément de H .
 (c) Soit $x \in H$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_0^p \leq x < x_0^{p+1}$.
Indication. On pourra considérer l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid x_0^k \leq x\}$.
 (d) Montrer que $H = \{x_0^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$.
Indication. Pour l'inclusion directe, on pourra considérer un élément $x \in H$, poser $y = x \times x_0^{-p}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ défini par la question précédente et montrez qu'on a nécessairement $y = 1$.
 8. Montrer que

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times &\longrightarrow G \\ (p, \varepsilon) &\longmapsto \varepsilon x_0^p \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

III Dessert

On cherche les solutions $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ de l'équation

$$(E) : n^2 - 3m^2 = 1.$$

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$.

9. Montrer que (n, m) est solution de (E) si et seulement si $n + m\sqrt{3} \in H$.
 10. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note a_p et b_p les éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que

$$x_0^p = a_p + b_p\sqrt{3}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_{p+1} et b_{p+1} en fonction de a_p et b_p .

11. Déterminer toutes les solutions de (E) vérifiant $10 \leq m \leq 100$. En déduire le nombre de petits carrés dans les grandes plaques.

Problème 1

- Pour $n = 0$, l'égalité de Taylor-Lagrange montre que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$. C'est l'égalité des accroissements finis.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, donc pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)}$ est continue sur $[a, b]$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$, la fonction $x \mapsto (b - x)^k$ est continue. Donc g_λ est continue sur $[a, b]$ en tant que somme et produit de fonctions continues.
 - D'autre part, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, donc pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $f^{(k)}$ est dérivable sur $[a, b]$. De plus, par hypothèse, $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$. Enfin, pour tout $k \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$, la fonction $x \mapsto (b - x)^k$ est dérivable. Donc g_λ est dérivable sur $]a, b[$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables.

$$\boxed{g_\lambda \text{ est continue sur } [a, b] \text{ et dérivable sur }]a, b[.}$$

Soit $x \in]a, b[$. On a (en sortant le premier terme de la somme)

$$g'_\lambda(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b - x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b - x)^{k-1} \right) - \frac{\lambda}{n!} (b - x)^n.$$

On reconnaît une somme télescopique. Ainsi

$$g'_\lambda(x) = -f'(x) - \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b - x)^n - f'(x) \right) - \frac{\lambda}{n!} (b - x)^n$$

$$\boxed{g'_\lambda(x) = -\frac{\lambda + f^{(n+1)}(x)}{n!} (b - x)^n.}$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $g_\lambda(a) = A + \lambda B$, avec $A, B \in \mathbb{R}$ qui ne dépendent pas de λ . Plus explicitement,

$$A = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \quad \text{et} \quad B = \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

Comme $a < b$, $B \neq 0$ et donc $g_\lambda(a) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{A}{B}$. Autrement dit, l'équation $g_\lambda(a) = 0$ d'inconnue λ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Il existe } \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } g_\mu(a) = 0.}$$

D'après ce qui précède, $g_\mu(a) = 0$. Or on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g_\lambda(b) = 0$. En particulier $g_\mu(b) = 0$. Comme g_μ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'_\mu(c) = 0$, d'après le théorème de Rolle.

$$\boxed{\text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } g'_\mu(c) = 0.}$$

4. D'après les questions précédentes, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et $c \in]a, b[$ tels que $g_\mu(a) = 0$ et $g'_\mu(c) = 0$. D'après l'expression de g'_μ , on en déduit

$$0 = g'_\mu(c) = -\frac{\mu + f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n.$$

Comme $b - c \neq 0$, on en déduit $\mu = -f^{(n+1)}(c)$ et donc

$$0 = g_\mu(a) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$.

5. (a) Soit $x_0 \in]a, +\infty[$ et $h > 0$. On pose $x = x_0 + h$. Par hypothèse, f est $\mathcal{C}^2$ sur $]a, +\infty[$. Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[x_0, x]$ et f' est dérivable sur $]x_0, x[$. D'après l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe alors $c \in]x_0, x[$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

Il existe $c \in]x_0, x[$ tel que $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(c)\frac{h^2}{2}$.

- (b) D'après ce qui précède,

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(c)h}{2}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|f'(x_0)| \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{h} + \frac{|f''(c)|h}{2} \leq \frac{|f(x)| + |f(x_0)|}{h} + \frac{|f''(c)|h}{2}.$$

Par définition de M_0 et M_2 , on a $|f(x)| \leq M_0$, $|f(x_0)| \leq M_0$ et $|f''(c)| \leq M_2$.

$|f'(x_0)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$

6. On a montré

$$\forall x_0 \in]a, +\infty[, \forall h > 0, |f'(x_0)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

En particulier, pour $h = 1$,

$$\forall x_0 \in]a, +\infty[, |f'(x_0)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}.$$

f' est bornée sur $]a, +\infty[$.

7. Tout d'abord, φ est une fraction rationnelle, donc φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall h > 0, \varphi'(h) = -\frac{2A}{h^2} + \frac{B}{2} = \frac{Bh^2 - 4A}{2h^2}.$$

Comme $B > 0$ et $A > 0$,

$$\forall h > 0, \varphi'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 2\sqrt{\frac{A}{B}}.$$

On a alors le tableau de variations suivant.

h	0	$2\sqrt{\frac{A}{B}}$	$+\infty$
$\varphi'(h)$		- 0 +	
$\varphi(h)$	$+\infty$	$2\sqrt{AB}$	$+\infty$

8. Soit $h > 0$. On a montré

$$\forall x_0 \in]a, +\infty[, |f'(x_0)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

On en déduit que $\frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ est un majorant de $\{|f'(x)| \mid x \in]a, +\infty[\}$. Donc

$$\forall h > 0, M_1 \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

On distingue plusieurs cas.

- Si $M_0 = 0$, alors f est nulle et $M_1 = 0$.
- Si $M_2 = 0$, alors $\forall h > 0, M_1 \leq \frac{2M_0}{h}$, d'où $M_1 = 0$.
- Si $M_0 > 0$ et $M_2 > 0$, pour $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, on obtient $M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}.$$

Problème 2

1. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\sqrt{3}$ est rationnel. Il existe alors $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ et $a \wedge b = 1$. On en déduit $a^2 = 3b^2$. Ainsi $3 \mid a^2$, et donc $3 \mid a$ car 3 est un nombre premier. Il existe alors $a' \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = 3a'$, ce qui implique $3a'^2 = b^2$. De la même manière, on en déduit $3 \mid b^2$ puis $3 \mid b$. On a alors $3 \mid a$ et $3 \mid b$, ce qui contredit le fait que a et b sont premiers entre eux. Donc

$$\sqrt{3} \text{ est irrationnel.}$$

2. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et r le reste de la division euclidienne de a par 4. On a alors $a \equiv r \pmod{4}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. On en déduit $a^2 \equiv r^2 \pmod{4}$. Et comme $0^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod{4}$ et $1^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \pmod{4}$, a^2 est congru à 0 ou à 1 modulo 4.

$$\text{Tout carré de nombre entier est congru à 0 ou à 1 modulo 4.}$$

Supposons que $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ vérifie $n^2 = 3m^2 - 1$.

- Si $m^2 \equiv 0 \pmod{4}$, alors $n^2 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$.
- Si $m^2 \equiv 1 \pmod{4}$, alors $n^2 \equiv 2 \pmod{4}$.

Dans tous les cas, cela contredit le résultat précédent. Donc

$$\text{l'équation } n^2 = 3m^2 - 1 \text{ n'a aucune solution entière.}$$

3. Montrons que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

- Par définition de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, on a $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \subset \mathbb{R}$.
- On a $0 = a + b\sqrt{3}$ pour $(a, b) = (0, 0)$ et $1 = a + b\sqrt{3}$ pour $(a, b) = (1, 0)$. Donc $0, 1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.
- Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{3}$ et $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{3}$. On a alors

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\in \mathbb{Z}} \sqrt{3}, \\ x_1 \times x_2 &= \underbrace{(a_1 a_2 + 3b_1 b_2)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{\in \mathbb{Z}} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ainsi $x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ et $x_1 \times x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Donc $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est stable par $+$ et $\times$.

- Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{3}$. On a alors $-x = (-a) + (-b)\sqrt{3}$. Comme $-a \in \mathbb{Z}$ et $-b \in \mathbb{Z}$, $-x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Donc $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ est stable par passage à l'opposé.

$$\boxed{\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \text{ est un sous-anneau de } (\mathbb{R}, +, \times).}$$

4. Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. L'existence de $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{3}$ découle de la définition de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Montrons l'unicité du couple (a, b) .

Supposons que $x = a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3}$, avec $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$. On a alors, par différence, $a_1 - a_2 = (b_2 - b_1)\sqrt{3}$. Si $b_2 \neq b_1$, alors $\sqrt{3} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1}$. Ainsi $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux. Donc nécessairement $b_1 = b_2$, puis $a_1 = a_2$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}], \exists! (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } x = a + b\sqrt{3}.}$$

5. (a) Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. On écrit $x = a + b\sqrt{3}$, avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On a

$$N(x) = x\bar{x} = (a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}], N(x) \in \mathbb{Z}.}$$

- (b) Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. On écrit $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{3}$ et $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{3}$, avec $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned} \overline{x_1 \times x_2} &= (a_1 a_2 + 3b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{3}, \\ \overline{x_1} \times \overline{x_2} &= (a_1 a_2 + 3b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}], \overline{x_1 \times x_2} = \overline{x_1} \times \overline{x_2}.}$$

- (c) Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. On a, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} N(x_1 x_2) &= x_1 x_2 \times \overline{x_1 x_2} \\ &= x_1 \times x_2 \times \overline{x_1} \times \overline{x_2} \\ &= (x_1 \overline{x_1})(x_2 \overline{x_2}), \end{aligned}$$

$$\boxed{N(x_1 x_2) = N(x_1)N(x_2).}$$

6. (a) Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ Supposons $x \in G$. Il existe alors $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ tel que $xy = 1$. On en déduit $N(x)N(y) = N(xy) = N(1) = 1$. Comme $N(x), N(y) \in \mathbb{Z}$, $N(x)$ divise 1. Donc $N(x) = \pm 1$. D'autre part, $N(x) = a^2 - 3b^2$. Or, d'après la question 2, l'équation $n^2 - 3m^2 = -1$ n'admet aucune solution entière. Donc $N(x) \neq -1$ et $N(x) = 1$.

$\Leftarrow$ Supposons $N(x) = 1$. On a alors $x\bar{x} = 1$. Ainsi, comme $\bar{x} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ et $x^{-1} = \bar{x}$. Donc $x \in G$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}], x \in G \Leftrightarrow N(x) = 1}$.

(b) On a $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $2 \neq 0$ et $N(2) = 4 \neq 1$. Donc 2 est un élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ non nul et non inversible. Donc $\boxed{\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \text{ n'est pas un corps}}$.

7. (a) Supposons $x = a + b\sqrt{3} \in H$.

- On a en particulier $x \in G$, donc, d'après la question 6a, $N(x) = x\bar{x} = 1$.
- On a aussi $x > 1$, donc $0 < x^{-1} < 1 < x$. Or, d'après ce qui précède, $x^{-1} = \bar{x}$. Donc $0 < \bar{x} < 1 < x$.
- On en déduit $x - \bar{x} > 0$. Or $x - \bar{x} = 2b\sqrt{3}$. On en déduit $b > 0$, puis $b \geq 1$ car $b \in \mathbb{Z}$.
- Enfin, comme $\bar{x} > 0$, $a > b\sqrt{3} > b \geq 1$. Donc $a > 1$, puis $a \geq 2$ car $a \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Si } x = a + b\sqrt{3} \in H, \text{ alors } a \geq 2 \text{ et } b \geq 1}$.

(b) Montrons $x_0 \in H$ et $\forall x \in H, x \geq x_0$.

- On a $N(x_0) = 2^2 - 3 \times 1^2 = 1$, donc $x_0 \in G$. De plus, $x_0 > 1$, donc $x_0 \in H$.
- Soit $x \in H$. Il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{3}$. D'après la question précédente, $a \geq 2$ et $b \geq 1$. Donc $x = a + b\sqrt{3} \geq 2 + \sqrt{3} = x_0$.

Donc

$\boxed{x_0 \text{ est le plus petit élément de } H}$.

(c) Soit $x \in H$. On considère $A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid x_0^k \leq x\}$.

- $A \subset \mathbb{N}$ par définition de A .
- Comme $x \in H$ et $x_0 = \min H$, $x_0^1 \leq x$. Donc $1 \in A$ et $A \neq \emptyset$.
- Soit $k \in A$. Comme $x_0 \geq 2$, on a $k \leq 2^k \leq x_0^k \leq x \leq [x] + 1$. Donc A est majoré dans $\mathbb{N}$.

A admet donc un plus grand élément p . En particulier, $p \in A$ et $p+1 \notin A$, donc $x_0^p \leq x < x_0^{p+1}$.
Donc

$\boxed{\forall x \in H, \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x_0^p \leq x < x_0^{p+1}}$.

(d) On montre le résultat par double inclusion.

$\supseteq$ $(G, \times)$ est un groupe et $x_0 \in G$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, x_0^p \in G$. De plus, comme $x_0 > 1$, $\forall p \in \mathbb{N}^*, x_0^p \geq x_0 > 1$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, x_0^p \in H$, et cela montre

$$\{x_0^p \mid p \in \mathbb{N}^*\} \subset H.$$

□ Soit $x \in H$. D'après la question précédente, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_0^p \leq x < x_0^{p+1}$. Posons $y = x \times x_0^{-p}$.

- Comme $(G, \times)$ est un groupe et $x, x_0 \in G$, on en déduit $y \in G$.
- Par définition de y , on a $1 \leq y < x_0$. En particulier, $y \in G$ et $y < x_0 = \min H$, donc $y \notin H$. Ainsi, d'après la définition de H , $y \leq 1$.

Finalement, $y = 1$ et $x = x_0^p$. Donc

$$H \subset \{x_0^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}.$$

Finalement, $H = \{x_0^p \mid p \in \mathbb{N}^*\}$.

8. Commençons par vérifier que φ est bien définie. Comme $x_0 \in G$ et $(G, \times)$ est un groupe, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $x_0^p \in G$. De plus, comme $-1 \in G$, $\forall (p, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times$, $\varepsilon x_0^p \in G$. Donc φ est bien définie. On montre ensuite que φ est un morphisme de groupes, injectif et surjectif.

- Commençons par expliciter la loi du groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times$. Il s'agit du produit cartésien des groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}^\times, \times)$. La loi $\star$ est définie par

$$\forall ((p, \varepsilon), (p', \varepsilon')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times)^2, (p, \varepsilon) \star (p', \varepsilon') = (p + p', \varepsilon \varepsilon').$$

On vérifie alors que φ est un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \varphi((p, \varepsilon) \star (p', \varepsilon')) &= \varphi(p + p', \varepsilon \varepsilon') \\ &= \varepsilon \varepsilon' x_0^{p+p'} \\ &= (\varepsilon x_0^p)(\varepsilon' x_0^{p'}). \end{aligned}$$

- Montrons que $\text{Ker } \varphi = \{(0, 1)\}$. Soit $(p, \varepsilon) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times$ tel que $\varphi(p, \varepsilon) = 1$. Alors $\varepsilon x_0^p = 1$. Comme $x_0 > 0$, εx_0^p a le même signe que ε , donc $\varepsilon = 1$. Ainsi $x_0^p = 1$. Comme $x_0 \neq 1$, on en déduit $p = 0$. Donc $(p, \varepsilon) = (0, 1)$, ce qui montre que φ est injective.
- Montrons enfin que φ est surjective. Soit $x \in G$.

➤ Si $x > 1$, alors $x \in H$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = x_0^p = \varphi(p, 1)$.

➤ Si $0 < x < 1$, alors $x^{-1} \in H$ et il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{-1} = x_0^p$, d'où $x = \varphi(-p, 1)$.

➤ Si $x = 1$, alors $x = \varphi(0, 1)$.

Si $x < 0$, alors $-x \in G$ et $-x > 0$, donc $-x = \varphi(p, 1)$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$, d'où $x = \varphi(p, -1)$.

Comme $0 \notin G$, tous les cas sont traités. Ainsi φ est surjective.

Donc φ est un isomorphisme de groupes.

9. Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On pose $x = n + m\sqrt{3}$. Comme $n > 0$ et $m > 0$, $x > 1$. De plus,

$$(n, m) \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow N(x) = 1 \Leftrightarrow x \in G.$$

Et comme $x > 1$, $x \in G \Leftrightarrow x \in H$. Donc

$$(n, m) \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } n + m\sqrt{3} \in H.$$

10. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$a_{p+1} + b_{p+1}\sqrt{3} = x_0^{p+1} = x_0^p x_0 = (a_p + b_p\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = (2a_p + 3b_p) + (a_p + 2b_p)\sqrt{3}.$$

On en déduit, d'après la question 4,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{p+1} = 2a_p + 3b_p \text{ et } b_{p+1} = a_p + 2b_p.$$

11. D'après ce qui précède, les solutions de (E) sont de la forme $a_p + b_p\sqrt{3}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Il suffit donc de déterminer les valeurs de p telles que $10 \leq b_p \leq 100$. Or, comme $\forall p \in \mathbb{N}^*, a_p > 0$ et $b_p > 0$, la suite $(b_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Après calculs, on obtient

$$(a_1, b_1) = (2, 1), \quad (a_2, b_2) = (7, 4), \quad (a_3, b_3) = (26, 15), \quad (a_4, b_4) = (97, 56), \quad (a_5, b_5) = (362, 209).$$

Donc les seuls couples $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ solutions de (E) vérifiant $10 \leq m \leq 100$ sont $(26, 15)$ et $(97, 56)$.

Les grandes plaques contiendront donc $26^2 = 676$ ou $97^2 = 9409$ chocolats.

Problème 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Le but du problème est le calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de M^n de différentes

manières. Les cinq questions de ce problème sont donc indépendantes, à l'exception d'une relation réutilisée en question 5.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Exprimer A^2 en fonction de A .

(b) En remarquant que $M = A + I_3$, exprimer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer M^2 et déterminer a et b réels tels que

$$M^2 = aM + bI_3. \quad (E1)$$

(a) Montrer par récurrence qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = a_n M + b_n I_3.$$

On donnera les valeurs de a_0, b_0, a_1 et b_1 et on établira les relations entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n .

(b) Montrer que (a_n) et (b_n) vérifient toutes deux la même relation de récurrence linéaire à deux termes.

(c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n .

(d) En déduire une expression de M^n et comparer avec la question 1b.

3. (a) Déterminer les deux valeurs de λ telles que la matrice $A - \lambda I_3$ soit de rang inférieur à 3. On les nommera λ_1 et λ_2 de sorte que $\text{rg}(A - \lambda_1 I_3) = 2$ et $\text{rg}(A - \lambda_2 I_3) = 1$.

(b) Soit $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda_1 X\}$ et $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda_2 X\}$. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et exprimer X_1, X_2, X_3 tels que

$$E_1 = \text{Vect}(X_1) \quad \text{et} \quad E_2 = \text{Vect}(X_2, X_3).$$

(c) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont X_1, X_2, X_3 . Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$.

(d) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

(e) Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donner l'expression de A^n en fonction de D^n, P et P^{-1} .

4. (a) Montrer qu'il existe une suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} 5 + 4u_n & -4 - 4u_n & -1 - u_n \\ u_n + 1 & -u_n & -1 - u_n \\ 0 & 0 & 3u_n + 4 \end{pmatrix}.$$

On donnera la valeur de u_0 et on établira la relation entre u_{n+1} et u_n .

(b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n et comparer avec la question 1b.

5. Cette méthode utilise la relation (E1) obtenue précédemment et donne une autre méthode pour calculer les coefficients a_n et b_n .
- (a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - aX - b$.
- (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de M^n en fonction de n et comparer avec la question 1b.

Problème 2

Le but de ce problème est de déterminer le sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}[X]$ des polynômes qui sont divisibles par leur dérivée. Autrement dit, un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est un élément de E si et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \times P'$.

- Montrer que l'ensemble des polynômes constants appartenant à E se résume à $\{0\}$.
- Soit $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que le polynôme $\lambda(X - \alpha)^n$ appartient à E .
- Soit $P \in E$ un polynôme de degré $n \geq 1$.
 - Déterminer le degré du polynôme Q tel que $P = Q \times P'$.
 - Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ (que l'on n'essaiera pas de calculer) tel que $Q = \frac{1}{n}(X - \alpha)$.
 - Montrer par récurrence que pour tout entier $0 \leq k \leq n - 1$,

$$P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X - \alpha) \times P^{(k+1)}.$$

- Décrire l'ensemble des racines de P en précisant la multiplicité associée. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Conclure.

Problème 3

I Cadre d'étude

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une assemblée de n personnes que l'on répartit dans p salles distinctes (numérotées de 1 à p). Les personnes sont indifférenciées, c'est-à-dire qu'on s'intéresse seulement à l'effectif de chaque salle. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note x_i le nombre de personnes présentes dans la salle i .

- Déterminer le nombre de répartitions possibles des n personnes, c'est-à-dire le nombre de p -uplets d'entiers naturels $(x_1, \dots, x_p)$ tels que

$$x_1 + \dots + x_p = n.$$

Dans toute la suite, on y fera référence en parlant simplement de **répartitions**. On notera $\mathcal{C}$ l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid x_1 + \dots + x_p = n\}.$$

II Stricte convexité

Définition 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **strictement convexe** lorsque pour tous $a, b \in I$ distincts,

$$\forall \lambda \in]0, 1[, f((1 - \lambda)a + \lambda b) < (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .

2. Montrer que f est strictement convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction

$$\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est strictement croissante sur $I \setminus \{a\}$.

3. Montrer que si f est dérivable, alors elle est strictement convexe si et seulement si f' est strictement croissante.

III Propriété de minimisation discrète

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe.

4. Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $b \geq a + 2$. Montrer que

$$f(a) + f(b) > f(a + 1) + f(b - 1).$$

On définit, pour tout p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{C}$, la quantité

$$T(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p f(x_i),$$

que l'on souhaite minimiser, c'est-à-dire que l'on cherche le ou les p -uplets de $\mathcal{C}$ pour lesquels les valeurs de T sont minimales. On dira qu'un tel p -uplet **minimise** T .

5. Montrer que si un p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{C}$ minimise T , alors

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, |x_i - x_j| \leq 1.$$

6. On écrit $n = qp + r$ la division euclidienne de n par p . Montrer que tout p -uplet minimisant T est constitué de

- r éléments égaux à $q + 1$,
- $p - r$ éléments égaux à q .

IV Application au problème des interactions

Dans chaque salle, les personnes interagissent : dans une même salle, chaque paire de personnes présente se serre la main. Ainsi si une personne est seule dans sa salle, il n'y a aucune poignée de mains ; si exactement deux personnes sont présentes dans une salle, il y aura une poignée de mains, etc.

7. On rappelle que pour tout i , x_i désigne le nombre de personnes dans la salle i . Montrer que le nombre total de poignées de mains échangées est

$$T = \sum_{i=1}^p \binom{x_i}{2}.$$

8. Déterminer les répartitions minimisant le nombre total de poignées de mains.
 9. Déterminer le nombre de répartitions minimisant le nombre de poignées de mains.

V Maximisation

10. Montrer que si un p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{C}$ maximise T , alors au plus un des x_i est non nul.
11. Déterminer les p -uplets maximisant T et dénombrer les répartitions réalisant cette propriété.

VI Propriété de minimisation continue

On appelle toujours $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe et on considère l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}_+^p \mid x_1 + \dots + x_p = n\}.$$

Pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}_+^p$, on note toujours $T(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p f(x_i)$.

12. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{S}$,

$$\sum_{i=1}^p f(x_i) \geq pf\left(\frac{n}{p}\right).$$

et en déduire le p -uplet en lequel le minimum de T est atteint sur $\mathcal{S}$.

Problème 1

Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & -12 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, donc $A^2 = 3A$

(b) On remarque que $M = A + I_3$. Comme M et I_3 commutent ($MI_3 = I_3M = M$), on peut appliquer la formule du binôme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k I^{n-k}$.

Or d'après ce qui précède, on montre par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = 3^{k-1}A$. De plus $A^0 = I_3$.

D'où $M^n = I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1}A = I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} \right) A$.

Or $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k - 1 \right) = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ en reconnaissant une formule du binôme sur les nombres réels.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)A$.

2. $M^2 = \begin{pmatrix} 21 & -20 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 5M - 4I_3$.

(a) **Init.** $M^0 = a_0M + b_0I_3$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $M^n = a_nM + b_nI_3$.

Alors $M^{n+1} = a_nM^2 + b_nM = a_n(5M - 4I_3) + b_nM = (5a_n + b_n)M - 4a_nI_3$.

En posant $a_{n+1} = 5a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$, on a $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I_3$.

On a donc montré par récurrence qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = a_nM + b_nI_3.$$

Elles vérifient $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}, \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n \end{cases}$.

(b) La relation de récurrence donne pour tout n , $a_{n+2} = 5a_{n+1} + b_{n+1}$, d'où $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$. Elle donne aussi $b_{n+2} = -4a_{n+1}$, d'où $b_{n+2} = -4(5a_n + b_n) = 5 \times (-4a_n) - 4b_n$. Mais $-4a_n = b_{n+1}$. Finalement, $b_{n+2} = 5b_{n+1} - 4b_n$.

(c) Étude de la relation de récurrence $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$:
l'équation caractéristique est $X^2 - 5X + 4 = 0$, de racines 4 et 1.
Donc les suites solutions sont de la forme $(\lambda 4^n + \mu)_n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\bullet \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 4\lambda + \mu = 1 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)}.$$

$$\bullet \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 4\lambda + \mu = 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ \mu = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_n = -\frac{1}{3}(4^n - 4)}.$$

$$(d) \text{ Finalement } \boxed{M^n = a_n M + b_n I_3 = \frac{1}{3}(4^n - 1)M - \frac{1}{3}(4^n - 4)I_3}.$$

$$\text{En utilisant } M = A + I_3, \text{ on obtient } M^n = \frac{1}{3}(4^n - 1)A + \underbrace{\left(\frac{1}{3}(4^n - 1) - \frac{1}{3}(4^n - 4)\right)}_{=1} I_3.$$

On retrouve le résultat de la question 1b.

3. On fait tous les calculs avec M . Si on veut les faire avec A , on aura $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 3$ à la place.

(a) À l'aide du pivot de Gauß (commencer par $L_1 \leftrightarrow L_3$), on obtient $\boxed{\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 4}$.

(b) Soit

$$E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda_1 X\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \lambda_2 X\}.$$

On a

$$E_1 = \text{Ker}(X \mapsto MX - \lambda_1 X) \quad \text{et} \quad E_2 = \text{Ker}(X \mapsto MX - \lambda_2 X),$$

où on prendra soin de montrer la linéarité. E_1 et E_2 sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La résolution des systèmes $(M - \lambda_1 I_3)X = 0$ et $(M - \lambda_2 I_3)X = 0$ donne par exemple

$$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{E_1 = \text{Vect}(X_1) \quad \text{et} \quad E_2 = \text{Vect}(X_2, X_3)}.$$

$$(c) \text{ On a alors } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ D'après ce qui précède, } \boxed{MP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}.$$

$$(d) \text{ Par la méthode de votre choix, on obtient } \boxed{P \text{ est inversible } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$$(e) \text{ On montre par récurrence que } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}}.$$

D'après la question précédente, P étant inversible, on a $M = PDP^{-1}$. On montre alors par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, M^n = PD^n P^{-1}}$.

4. Une petite dernière.

(a) On procède par récurrence.

$$\boxed{\text{Init.}} \quad M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 5+4u_0 & -4-4u_0 & -1-u_0 \\ u_0+1 & -u_0 & -1-u_0 \\ 0 & 0 & 3u_0+4 \end{pmatrix} \text{ avec } u_0 = -1.$$

$$\boxed{\text{Hér.}} \quad \text{Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ Supposons qu'il existe } u_n \text{ tel que } M^n = \begin{pmatrix} 5+4u_n & -4-4u_n & -1-u_n \\ u_n+1 & -u_n & -1-u_n \\ 0 & 0 & 3u_n+4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 5+4u_n & -4-4u_n & -1-u_n \\ u_n+1 & -u_n & -1-u_n \\ 0 & 0 & 3u_n+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } M^{n+1} = \begin{pmatrix} 21+16u_n & -20-16u_n & -5-4u_n \\ 4u_n+5 & -4u_n-4 & -5-4u_n \\ 0 & 0 & 12u_n+16 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Cela donne } M^{n+1} = \begin{pmatrix} 5+4(4+4u_n) & -4-4(4+4u_n) & -1-(4+4u_n) \\ (4u_n+4)+1 & -(4u_n+4) & -1-(4+4u_n) \\ 0 & 0 & 3(4+4u_n)+4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En posant } u_{n+1} = 4u_n + 4, \text{ on a } M^{n+1} = \begin{pmatrix} 5+4u_{n+1} & -4-4u_{n+1} & -1-u_{n+1} \\ u_{n+1}+1 & -u_{n+1} & -1-u_{n+1} \\ 0 & 0 & 3u_{n+1}+4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{La suite ainsi définie vérifie } \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 4u_n + 4 \end{cases}.$$

(b) On étudie la suite arithmético-géométrique (u_n) . Pour cela on démontre que $(u_n + \frac{4}{3})_n$ est géométrique et vérifie $u_{n+1} + \frac{4}{3} = 4(u_n + \frac{4}{3})$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_n = \frac{1}{3}(4^n - 4)}.$

Cela donne bien $M^n = M + u_n A = (A + I) + u_n A = I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)A$.

5. Division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 4$: il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = (X^2 - 5X + 4)Q + R$ et $R = \alpha X + \beta \in \mathbb{R}_1[X]$.

L'évaluation de cette égalité en 1 et 4, racines de $X^2 - 5X + 4$, donne

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + \beta = 4^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{4^n - 1}{3} \\ \beta = \frac{4 - 4^n}{3} \end{cases}.$$

Finalement $M^n = R(M) = \alpha M + \beta I_3 = \boxed{\frac{1}{3}(4^n - 1)M - \frac{1}{3}(4^n - 4)I_3}$, comme en 2d.

Problème 2

Le but de cet exercice est de déterminer le sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}[X]$ des polynômes qui sont divisibles par leur dérivée. Autrement dit, un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est un élément de E si et seulement s'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \times P'$.

1. **Analyse** Soit $a \in \mathbb{C}$ et $P = a$ un polynôme constant. Alors $P' = 0$. Si P' divise P , alors il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $a = Q \times 0$ et alors $a = 0$.

Synthèse Le polynôme nul appartient à E car sa dérivée est 0 également et il existe bien Q tel que $0 = Q \times 0$ (n'importe quel Q convient).

Donc $\mathbb{C}_0[X] \cap E = \{0\}$.

2. Soit $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Soit $P = \lambda(X - \alpha)^n$. Alors $P' = \lambda n(X - \alpha)^{n-1}$.

On a $P(X) = \left(\frac{1}{n}(X - \alpha)\right) P'(X)$. Donc P' divise P et donc $P \in E$.

3. Soit $P \in E$ un polynôme de degré $n \geq 1$.

(a) On a $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = QP'$ avec $\deg(P) = \deg(QP') = \deg(Q) + \deg(P')$. Or $\deg P = n$ et $\deg P' = n - 1$. Donc $\deg Q = 1$.

(b) Q est de degré 1 donc il s'écrit $\lambda(X - \alpha)$ avec α sa racine dans $\mathbb{C}$ et λ son coefficient dominant. De plus, si on examine le coefficient dominant de P , on a $P = a_n X^n + B(X)$ avec $\deg B \leq n - 1$. Donc $P' = na_n X^{n-1} + B'(X)$.

Ainsi $QP' = \lambda na_n X^n + \underbrace{\dots}_{\deg \leq n-1} = P$. Par unicité des coefficients (en particulier du coefficient

dominant non nul de P), on a $\lambda na_n = a_n$. Donc $\lambda = \frac{1}{n}$.

Finalement, $Q = \frac{1}{n}(X - \alpha)$.

(c) **Init.** $P^{(0)} = P = \frac{1}{n}(X - \alpha) \times P'$ d'après la question précédente.

Hér. Soit $0 \leq k \leq n - 2$ et supposons que $P^{(k)} = \frac{1}{n - k}(X - \alpha) \times P^{(k+1)}$.

Alors $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)' = \frac{1}{n - k} \left[P^{(k+1)} + (X - \alpha)P^{(k+2)} \right]$.

Donc $\left(1 - \frac{1}{n - k}\right) P^{(k+1)} = \frac{1}{n - k}(X - \alpha)P^{(k+2)}$. Finalement, $P^{(k+1)} = \frac{1}{n - (k + 1)}(X - \alpha)P^{(k+2)}$.

On a donc montré par récurrence que pour tout $0 \leq k \leq n - 1$,

$$P^{(k)} = \frac{1}{n - k}(X - \alpha) \times P^{(k+1)}.$$

(d) En évaluant cette égalité en α , on a $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $0 \leq k \leq n - 1$.

Ceci montre que α est racine de P et de ses dérivées successives, donc racine de P de multiplicité au moins n . P étant de degré n , il n'a pas d'autre racine.

Donc la seule racine de P est α , de multiplicité n .

Finalement, $P = a_n(X - \alpha)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$.

4. La question 3 est l'analyse du problème. La synthèse a été effectuée à la question 2. On a montré que $E = \{a(X - \alpha)^n, n \in \mathbb{N}^*, a, \alpha \in \mathbb{C}\} \cup \{0\}$.

Problème 3

1. Si on représente une répartition comme un alignement de personnes et de cloisons, une répartition revient à ordonner $n + p - 1$ objets, à savoir n personnes ($\bullet$) et $p - 1$ cloisons (pour délimiter les p salles. Par exemple

$\bullet \bullet \mid \mid \bullet \bullet \mid \bullet$ et $\mid \bullet \bullet \mid \bullet \bullet \bullet \mid$

représentent les répartitions $2 + 0 + 2 + 1$ et $0 + 2 + 3 + 0$ dans le cas $n = 5$ et $p = 4$.

On dénombre cela soit comme une anagramme, soit comme les parties à $p - 1$ éléments (le choix des places des $|$) dans un ensemble à $n + p - 1$ éléments (les places disponibles) et on obtient

$$\boxed{\binom{n+p-1}{p-1} \text{ répartitions.}}$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \geq a + 2$.

D'après la croissance des pentes, on a $f(a+1) - f(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f(b) - f(b-1)$.

D'où

$$f(a+1) - f(a) \leq f(b) - f(b-1).$$

On réarrange.

$$\boxed{f(a+1) + f(b-1) \leq f(a) + f(b)}.$$

3. Raisonnons par contraposée. Supposons qu'il existe $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tels que $x_j \geq x_i + 2$.

On définit un nouveau p -uplet en posant $y_i = x_i + 1$, $y_j = x_j - 1$ et $y_k = x_k$ sinon.

On a toujours $\sum_{k=1}^p y_k = n$, mais d'après la question 2 $f(y_i) + f(y_j) \leq f(x_i) + f(x_j)$.

Donc

$$T(y_1, \dots, y_p) \leq T(x_1, \dots, x_p).$$

Là la question est légèrement inexacte : si l'inégalité est stricte, le p -uplet initial n'était pas minimal. Ainsi tout minimiseur strict vérifie

$$|x_i - x_j| \leq 1.$$

Pour gérer les cas d'égalité, il faudrait travailler avec une fonction strictement convexe. Ici, tous les minimiseurs ne sont pas tels qu'annoncés, mais un minimum est toujours atteint par un p -uplet de la forme annoncée.

4. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ minimisant T et posons $m = \min x_i$.

D'après la question précédente, les x_i prennent uniquement les valeurs m ou $m + 1$.

Notons k le nombre d'indices tels que $x_i = m + 1$. Alors

$$n = k(m+1) + (p-k)m = pm + k.$$

Par unicité de la division euclidienne, $m = q$, $k = r$.

On a donc $\boxed{r \text{ éléments égaux à } q+1 \text{ et } p-r \text{ éléments égaux à } q}$.

5. Chaque poignée de mains se déroule dans l'une des p salles.

Dans la salle i , le nombre de paires de personnes est donné par le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à x_i éléments, soit $\binom{x_i}{2}$.

Donc au total, $\boxed{T = \sum_{i=1}^p \binom{x_i}{2}}$.

6. Pour tout i , $\binom{x_i}{2} = \frac{x_i(x_i-1)}{2}$. La fonction

$$f : x \mapsto \frac{x(x-1)}{2}$$

est (strictement) convexe sur $\mathbb{R}_+$ car de classe $\mathcal{C}^2$ (comme une fonction polynomiale) et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f''(x) = 1 > 0$. On note encore $n = qp + r$ la division euclidienne de n par p (notamment $q = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$).

La partie précédente montre qu'on a une valeur de T minimale si et seulement si r salles contiennent $q + 1$ personnes et $n - r$ salles contiennent q personnes.

7. Une répartition minimisant le coût correspond au choix des r salles contenant $q + 1$ personnes.

Le nombre de répartitions minimales est donc $\boxed{\binom{p}{r}}$.

8. Même remarque sur le problème de stricte convexité et de stricte minimisation.

S'il existe $i \neq j$ tels que $0 < x_i < x_j$, alors ils sont aussi inférieurs à n . Dans ce cas, on a, d'après la question 2, $f(x_i) + f(x_j) \leq f(x_i - 1) + f(x_j + 1)$ et le p -uplet $(x_1, \dots, x_p)$ ne maximise pas T . Ainsi, si on a un maximum en $(x_1, \dots, x_p)$, alors $\boxed{\text{au plus un des } x_i \text{ est non nul}}$.

9. Les p -uplets maximisant T sont donc tels que $\boxed{\exists i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_{i_0} = n \text{ et } \forall i \neq i_0, x_i = 0}$.

Une telle répartition revient au choix de $i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soit $\boxed{p \text{ possibilités}}$.

10. On applique l'inégalité de Jensen à la fonction f .

$$f\left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{p} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \frac{1}{p} f(x_i)$$

avec les $\frac{1}{p}$ qui sont bien tels que $\sum_{i=1}^p \frac{1}{p} = 1$.

En factorisant par $\frac{1}{p}$ et comme $\sum_{i=1}^p x_i = n$, on obtient

$$\boxed{\sum_{i=1}^p f(x_i) \geq p f\left(\frac{n}{p}\right)}.$$

Un p -uplet réalisant cela est $\left(\frac{n}{p}, \dots, \frac{n}{p}\right)$ (avec la même réserve que précédemment sur la question de la stricte minimalité).

Problème 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \ln x + x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la valeur de α_1 .
2. (a) Étudier le sens de variation de la suite (α_n) .
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{n}{2} \leq \alpha_n \leq n.$$

- (c) En déduire la limite de la suite (α_n) .
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\alpha_n}{n} = 1 - \frac{\ln(\alpha_n)}{n}$.
(b) Montrer que $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.
(c) Calculer, si elle existe, la limite de $(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 2$ par

$$u_n = \frac{n - \alpha_n}{\ln n}.$$

- (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a

$$1 - u_n = \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln n}.$$

- (b) Étudier la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite éventuelle.
- (c) Montrer que $\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln \alpha_n}{\alpha_n}$.
- (d) En déduire que $1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Problème 2

Dans ce problème, E désigne l'ensemble des suites réelles dites **polynomiales**, c'est-à-dire

$$E = \{(P(n))_{n \in \mathbb{N}} \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$$

et F désigne l'ensemble des suites à valeurs réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\exists P \in \mathbb{R}[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + P(n). \quad (\star)$$

On note $\mathcal{B} = (X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C} = (R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la famille définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = (X + 1)^n - X^n.$$

I Comparaison des espaces E et F

1. Montrer que si $u \in F$, alors le polynôme P de la relation $(\star)$ est unique. On le notera alors P_u .
2. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 (b) Montrer que $\Phi : F \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ est une application linéaire.

$$u \longmapsto P_u$$

 (c) Déterminer le noyau de Φ et en donner une base et la dimension.
3. (a) Montrer que $\Psi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une application linéaire injective.

$$P \longmapsto (P(n))_{n \in \mathbb{N}}$$

 (b) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 (c) Montrer que la suite $u = (\delta_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas d'antécédent par Ψ .
On rappelle le symbole de Kronecker : $\delta_{0,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
4. Montrer que $E \subset F$.
5. (a) Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$ le degré du polynôme R_n .
 (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X^n s'exprime comme combinaison linéaire des polynômes $R_1, \dots, R_{n+1}$.
 (c) Montrer que C est une base de $\mathbb{R}[X]$.
6. (a) Soit $u \in F$. En exprimant le polynôme P_u dans la base C , montrer l'existence d'un polynôme Q vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Q(n).$$

 (b) Que peut-on en déduire concernant les espaces vectoriels E et F ?
 (c) Avec les notations de la question 6a, exprimer le degré et le coefficient dominant du polynôme Q en fonction de ceux du polynôme P_u .

II Une application calculatoire

Dans cette partie, α désigne un entier naturel fixé. On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$$

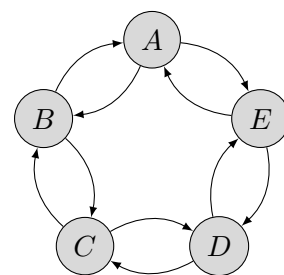
avec la convention $S_0 = \sum_{k=1}^0 k^\alpha = 0$.

7. Vérifier que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est élément de F .
8. Démontrer l'existence d'un polynôme unitaire Q dont on précisera le degré tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{n}{\alpha + 1} Q(n).$$
9. À l'aide de ce qui précède (impérativement), calculer $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=0}^n k^\alpha$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Problème 3 (A long time ago in a galaxy far, far away....)

Il y a bien longtemps dans une galaxie lointaine, très lointaine, deux amis, Han et Luke, décident de se retrouver pour parler du bon vieux temps. Comme point de rendez-vous, ils ont le choix entre cinq planètes : Alderaan (A), Bespin (B), Coruscant (C), Dagobah (D) et Endor (E). Ces cinq endroits sont reliés par certaines lignes de transports selon le schéma ci-contre. Ainsi, A est à un trajet de distance de B et de E , et à 2 trajets de distance de C et de D . Même chose pour les autres lieux qui sont tous distants de un ou deux trajets (si on y va par le plus court chemin).



Hélas, suite à un malentendu, Han arrive sur Alderaan et Luke sur Bespin. À partir de ce moment, ils décident chacun de se déplacer chaque jour sur un lieu voisin jusqu'à se retrouver tous les deux au même endroit. Comme ils n'ont aucun moyen de communication, ils choisissent au hasard, de manière équiprobable, un des deux lieux accessibles depuis leur position actuelle. Chaque jour, s'ils ne sont pas au même endroit, ils font un nouveau choix indépendant des précédents et se déplacent une fois chacun (simultanément et sans possibilité de se voir s'ils se croisent). L'objet de ce problème est d'étudier la probabilité qu'ils se retrouvent au bout de n jours, pour $n \in \mathbb{N}$.

On se limite à une durée finie pour l'expérience (N jours, avec N supposé supérieur ou égal à 3). Ainsi l'expérience peut être modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ que l'on n'essaiera pas d'explicitier.

On définit les événements suivants, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- U_n : « Han et Luke sont au même endroit après le n -ième déplacement »,
- V_n : « Han et Luke sont à un trajet d'écart après le n -ième déplacement »,
- W_n : « Han et Luke sont à deux trajets d'écart après le n -ième déplacement »,

et on appelle $u_n = P(U_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $w_n = P(W_n)$ leurs probabilités.

Remarque. Pour $n = 0$, il s'agit de leur position initiale : ainsi, $v_0 = 1$ et $u_0 = w_0 = 0$ car ils démarrent à un trajet de distance (Han en A et Luke en B).

Pour nous aider (si si!), on définit deux autres événements, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- H_n : « Lors du n -ième déplacement, Han effectue (sans le savoir) un trajet qui le rapproche de la position qu'occupait Luke après le déplacement $n - 1$ »,
- L_n : « Lors du n -ième déplacement, Luke effectue (sans le savoir) un trajet qui le rapproche de la position qu'occupait Han après le déplacement $n - 1$ ».

Exemple. Supposons qu'après 5 déplacements, Han soit en E et Luke en C . Alors l'événement H_6 décrit le fait que Han se déplace vers D lors de son sixième déplacement. Et l'événement $\overline{L_6}$ (contraire de L_6) décrit le fait que Luke se déplace vers B lors de son sixième déplacement.

On supposera que la famille des événements $(H_1, \dots, H_N, L_1, \dots, L_N)$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, que dire de la famille d'événements (U_n, V_n, W_n) ?

Épisode I : premier trajet.

2. (a) À partir de la position initiale, expliciter les quatre situations possibles après le premier déplacement.
 (b) Justifier que $W_1 = \overline{H_1} \cap \overline{L_1}$ et en déduire w_1 .
 (c) Exprimer V_1 en fonction de H_1 et L_1 et en déduire la valeur de v_1 .
 (d) Déterminer finalement u_1 .

Épisode II : des inégalités. Soit $n \geq 2$ un entier.

3. (a) Justifier l'inclusion : $\overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap \left(\bigcap_{k=2}^n (H_k \cap \overline{L_k}) \right) \subset W_n$. En déduire que $w_n \geq \frac{1}{4^n}$.
- (b) En vous inspirant de ce qui précède, montrer que $v_n \geq \frac{1}{4^n}$.
- (c) Montrer que $U_2 = \overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap H_2 \cap L_2$. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq \frac{1}{16}$.

Épisode III : probabilités conditionnelles. Soit $n \geq 2$ un entier.

4. (a) Montrer que $P_{U_n}(U_{n+1}) = 1$ et que $P_{U_n}(V_{n+1}) = P_{U_n}(W_{n+1}) = 0$.
- (b) Par exemple de manière analogue à une question déjà traitée, montrer que $P_{W_n}(U_{n+1}) = \frac{1}{4}$.
- (c) Calculer successivement $P_{W_n}(V_{n+1})$, $P_{W_n}(W_{n+1})$, $P_{V_n}(U_{n+1})$, $P_{V_n}(W_{n+1})$ et $P_{V_n}(V_{n+1})$.

Épisode IV : relations de récurrence.

5. (a) Pour tout $n \geq 2$ entier, exprimer u_{n+1} , v_{n+1} et w_{n+1} , chacun en fonction de u_n , v_n et w_n .
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = \frac{5}{4}w_{n+1} - \frac{5}{16}w_n$.

Épisode V : résolution.

6. (a) Montrer en les déterminant qu'il existe deux nombres $0 < \alpha < \beta < 1$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n).$$
- (b) Avec ces notations, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}\alpha^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10}\beta^n$.
- (c) En déduire une expression puis la limite de (u_n) .

Épisode VI : changement de sens. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

7. On suppose que Han et Luke sont à deux trajets d'écart après la N -ième étape. Quelle est (en fonction de N , α et β) la probabilité qu'ils aient déjà été à cette même distance après $N - 1$ étapes.

Problème 1

1. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction f étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*, f(\alpha_n) = n.$$

Comme $f(1) = 1$, on a $\alpha_1 = 1$.

2. (a) On a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui est strictement croissante en tant que bijection réciproque d'une application strictement croissante. D'autre part, pour tout $n \geq 1$, on a : $f(\alpha_n) = n \Leftrightarrow \alpha_n = f^{-1}(n)$. Ainsi pour $n \geq 1$, on a : $f^{-1}(n+1) \geq f^{-1}(n)$, c'est-à-dire $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$.

$$(\alpha_n) \text{ est croissante}$$

- (b) • Pour $n \geq 1$, on a $f(n) = \ln(n) + n \geq n$ donc par croissance de f^{-1} : $f^{-1}(f(n)) \geq f^{-1}(n)$. C'est-à-dire $n \geq \alpha_n$.

• D'autre part, on a l'inégalité suivante qui se démontre en étudiant rapidement la fonction $f : x \mapsto x - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{n}{2}\right) \leq \frac{n}{2}$$

On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{n}{2}\right) = \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

En appliquant f^{-1} qui est croissante, cela donne $\frac{n}{2} \leq f^{-1}(n) = \alpha_n$.

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{2} \leq \alpha_n \leq n$$

- (c) D'après le théorème de comparaison, étant donné que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par définition de α_n , on a :

$$\ln(\alpha_n) + \alpha_n = n \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha_n)}{n} + \frac{\alpha_n}{n} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{n} = 1 - \frac{\ln(\alpha_n)}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\alpha_n}{n} = 1 - \frac{\ln(\alpha_n)}{n}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leq \alpha_n \leq n$ donc par croissance de la fonction $\ln$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{n}{2}\right) \leq \ln(\alpha_n) \leq \ln(n)$$

Ainsi en divisant par n ,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\ln(n) - \ln(2)}{n} \leq \frac{\ln(\alpha_n)}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

D'après les résultats usuels de croissances comparées, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\alpha_n)}{n} = 0$.

Pour conclure, on utilise le résultat démontré à la question précédente, pour en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1$.

$$\boxed{\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n}$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\alpha_{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{\alpha_n} \times \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

ceci en utilisant la question précédente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{n+1} = 1$.

Par définition de α_n , on a

$$\ln(\alpha_n) + \alpha_n = n \quad \text{et} \quad \ln(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1} = n+1$$

En soustrayant les égalités précédentes,

$$\ln\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) + (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 1$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \ln\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) = 1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$ et $\ln$ est continue en 1.

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 1}$$

4. (a) Soit $n \geq 2$, en utilisant l'égalité qui définit la suite (α_n) : $\alpha_n = n - \ln(\alpha_n)$.

$$1 - u_n = 1 - \frac{n - \alpha_n}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) - n + \alpha_n}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) - n + n - \ln(\alpha_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln(n)}$$

$$\boxed{\forall n \geq 2, 1 - u_n = \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln(n)}}$$

(b) D'après la question 3b, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\alpha_n} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right) = 0$. On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln(n)} = 0$$

et d'après la question précédente, cela implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - u_n = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

(c) On sait que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ en reconnaissant le taux de variation de la fonction $\ln$ en 1. Sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\alpha_n} = 1$ d'après la question 4.(b), par composition des limites, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\frac{n}{\alpha_n} - 1} = 1$$

Ceci en remarquant que le dénominateur n'est pas nul à partir d'un certain rang. En effet $\alpha_n = n - \ln(\alpha_n) < n$ à partir d'un certain rang car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\alpha_n) = +\infty$.

Le dénominateur de notre fraction est :

$$\frac{n}{\alpha_n} - 1 = \frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}$$

en utilisant la relation qui définit α_n : $\ln(\alpha_n) + \alpha_n = n$.

On obtient finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}} = 1$$

Ce qui démontre la relation obtenue :

$$\boxed{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}}$$

(d) Pour $n \geq 1$, on a :

$$n(1 - u_n) = n \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\ln(n)} = n \frac{\frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}}{\ln(n)} \times \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}} = \underbrace{\frac{n}{\alpha_n}}_{(1)} \times \underbrace{\frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)}}_{(2)} \times \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}}}_{(3)}$$

• (1) : on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\alpha_n} = 1$, d'après la question 3b.

• (2) : on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - \alpha_n}{\ln(n)} = 1$, d'après la question 4b.

• (3) : enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{n}{\alpha_n}\right)}{\frac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}} = 1$ d'après la question précédente.

Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - u_n) = 1$, c'est-à-dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - u_n}{\frac{1}{n}} = 1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

Problème 2

1. Soit P, Q deux polynômes à coefficients réels. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = Q(n)$, alors le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines et est donc nul. Ainsi $P = Q$.

Soit $u \in F$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + P(n) = u_n + Q(n).$$

Alors $P(n) = Q(n)$ pour tout n , donc $\boxed{P = Q}$.

2. (a) On a $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite nulle appartient à F .

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in F^2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\lambda u + \mu v)_{n+1} = \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(u_n + P_u(n)) + \mu(v_n + P_v(n)) = (\lambda u + \mu v)_n + (\lambda P_u + \mu P_v)(n).$$

Donc $\lambda u + \mu v \in F$.

Conclusion : $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

- (b) Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in F^2$, d'après ce qui précède,

$$P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v,$$

donc Φ est linéaire.

- (c) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$\Phi(u) = 0 \iff P_u = 0 \iff \forall n, u_{n+1} = u_n \iff u \text{ est constante.}$$

Ainsi

$$\boxed{\ker \Phi = \{(\lambda)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1)},$$

ce qui en fait un sev de $\boxed{\text{dimension } 1}$.

3. (a) Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\Psi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P(n) + \mu Q(n))_n = \lambda \Psi(P) + \mu \Psi(Q),$$

donc $\boxed{\Psi \text{ est linéaire}}$.

Si $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = 0$, alors $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Autrement dit, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\Psi(P) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $\boxed{\Psi \text{ est injective}}$.

- (b) Par définition, $E = \text{Im}(\Psi)$. Donc $\boxed{E = \text{Im}(\Psi) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

- (c) Soit $u = (\delta_{0,n})_n$. Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Psi(P) = u$. Alors $P(0) = 1$ et $P(n) = 0$ pour tout $n \geq 1$, donc P a une infinité de racines et est non nul, ce qui est impossible.

4. Soit $u \in E$, $u = (P(n))_n$. Alors

$$u_{n+1} = P(n+1) = P(n) + (P(X+1) - P(X))(n),$$

donc $\boxed{u \in F}$.

5. (a)

$$R_n = (X+1)^n - X^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k,$$

donc $\boxed{\deg R_n = n-1}$.

(b) Procédons par récurrence forte. On a $X^0 = R_1$.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$R_{n+2} = (X+1)^{n+2} - X^{n+2} = (n+2)X^{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} X^k,$$

donc

$$X^{n+1} = \frac{1}{n+2} \left(R_{n+2} - \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} X^k \right),$$

Par hypothèse de récurrence et stabilité, $\sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} X^k \in \text{Vect}(R_1, \dots, R_{n+1})$.

Donc $\boxed{X^{n+2} \in \text{Vect}(R_1, \dots, R_{n+2})}$.

(c) Les R_n sont de degrés distincts donc forment une famille libre. Ils engendrent $\mathbb{R}[X]$ d'après la question précédente. Donc $\boxed{C \text{ est une base}}$.

6. (a) On écrit

$$P_u = \sum_{k=1}^p a_k R_k.$$

Posons

$$Q = \sum_{k=1}^p a_k X^k.$$

Alors

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{k=1}^p a_k ((n+1)^k - n^k),$$

donc

$$u_{n+1} - Q(n+1) = u_n - Q(n).$$

Ainsi $(u_n - Q(n))_n$ est constante, et comme $Q(0) = 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + Q(n).$$

Donc $\boxed{\text{avec } P = Q + u_0, \text{ on a } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = P(n)}$.

(b) On en déduit $F \subset E$. Comme $E \subset F$, on a montré que $\boxed{E = F}$.

(c) Si $P_u = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$ et donc $Q = 0$.

Sinon, si $P_u = \sum_{k=1}^p a_k R_k$, avec $a_p \neq 0$, alors

$$P = u_0 + \sum_{k=1}^p a_k X^k.$$

Le terme dominant de R_k est kX^{k-1} , donc celui de P_u est $pa_p X^{p-1}$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \deg(P) = d, \text{ alors } \deg(Q) = d+1 \text{ et } \text{cd}(Q) = \frac{\text{cd}(P)}{d+1}}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^\alpha = S_n + P_S(n)$$

avec $P_S = (X+1)^\alpha$, donc $\boxed{S \in F}$.

8. Il existe P tel que $S_n = P(n)$. Le polynôme P_S est unitaire de degré α , donc P est de degré $\alpha+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{\alpha+1}$.

Comme $P(0) = 0$, il existe Q unitaire de degré α tel que

$$P = \frac{1}{\alpha+1} X Q(X),$$

d'où

$$\boxed{S_n = \frac{n}{\alpha+1} Q(n)}.$$

9. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n k^2$. Alors

$$S_n = \frac{n}{3} Q(n), \quad Q = X^2 + aX + b.$$

On utilise $S_1 = 1$, $S_2 = 5$:

$$\frac{1+a+b}{3} = 1, \quad \frac{2(4+2a+b)}{3} = 5.$$

D'où $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, et donc

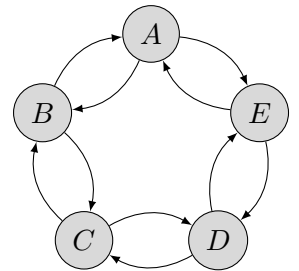
$$\boxed{S_n = \frac{n}{3} \left(n^2 + \frac{n}{2} + \frac{3}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

10. On a $S_n = \frac{n}{\alpha+1} Q(n)$, $Q(n) \sim n^\alpha$, donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}}.$$

Problème 3 (A long time ago in a galaxy far, far away....)

Il y a bien longtemps dans une galaxie lointaine, très lointaine, deux vieux amis, Han et Luke, décident de se retrouver pour parler du bon vieux temps. Comme point de rendez-vous, ils ont le choix entre cinq planètes : Alderaan (A), Bespin (B), Coruscant (C), Dagobah (D) et Endor (E). Ces cinq endroits sont reliés par certaines lignes de transports selon le schéma ci-contre. Ainsi, A est à un trajet de distance de B et de E , et à 2 trajets de distance de C et de D . Même chose pour les autres lieux qui sont tous distants de un ou deux trajets (si on y va par le plus court chemin).



Hélas, suite à un malentendu, Han arrive sur Alderaan et Luke sur Bespin. À partir de ce moment, ils décident chacun de se déplacer chaque jour sur un lieu voisin jusqu'à se retrouver tous les deux au même endroit. Comme ils n'ont aucun moyen de communication, ils choisissent au hasard, de manière équiprobable, un des deux lieux accessibles depuis leur position actuelle. Chaque jour, s'ils ne sont pas au même endroit, ils font un nouveau choix indépendant des précédents et se déplacent une fois chacun (simultanément et sans

possibilité de se voir s'ils se croisent). L'objet de ce problème est d'étudier la probabilité qu'ils se retrouvent au bout de n jours, pour $n \in \mathbb{N}$.

On se limite à une durée finie pour l'expérience (N jours, avec N supposé supérieur ou égal à 3). Ainsi l'expérience peut être modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ que l'on n'essaiera pas d'expliciter.

On définit les événements suivants, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- U_n : « Han et Luke sont sur au même endroit après le n -ième déplacement »,
- V_n : « Han et Luke sont à un trajet d'écart après le n -ième déplacement »,
- W_n : « Han et Luke sont à deux trajets d'écart après le n -ième déplacement »,

et on appelle $u_n = P(U_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $w_n = P(W_n)$ leurs probabilités.

Remarque. Pour $n = 0$, il s'agit de leur position initiale : ainsi, $v_0 = 1$ et $u_0 = w_0 = 0$ car ils démarrent à un trajet de distance (Han en A et Luke en B).

On définit deux autres événements, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- H_n : « Lors du n -ième déplacement, Han effectue (sans le savoir) un trajet qui le rapproche de la position qu'occupait Luke après le déplacement $n - 1$ »,
- L_n : « Lors du n -ième déplacement, Luke effectue (sans le savoir) un trajet qui le rapproche de la position qu'occupait Han après le déplacement $n - 1$ ».

On supposera que la famille des événements $(H_n, L_n)_{1 \leq n \leq N}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

1. (U_n, V_n, W_n) est un système complet d'événements.

Épisode I : premier trajet.

2. (a) Dans la position initiale, Han est en A , Luke est en B . Dans ce cas,

H_1 est « Han va vers B »

L_1 est « Luke va vers A »

D'où les quatre situations :

$H_1 \cap L_1$: Han est en B , Luke est en A .

$H_1 \cap \overline{L_1}$: Han est en B , Luke est en C .

$\overline{H_1} \cap L_1$: Han est en E , Luke est en A .

$\overline{H_1} \cap \overline{L_1}$: Han est en E , Luke est en C .

- (b) De ces quatre situations (qui forment bien un système complet d'événements), seule la dernière réalise W_1 donc $W_1 = \overline{H_1} \cap \overline{L_1}$.

Donc $w_1 = P(\overline{H_1} \cap \overline{L_1})$. Par indépendance (Han et Luke choisissent leur destination de manière

indépendante), $w_1 = P(\overline{H_1})P(\overline{L_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

- (c) Les trois autres situations sont incompatibles et réalisent toutes trois V_1 .

Donc $V_1 = (H_1 \cap L_1) \sqcup (H_1 \cap \overline{L_1}) \sqcup (\overline{H_1} \cap L_1)$.

On obtient de la même manière : $v_1 = \frac{3}{4}$.

- (d) (U_1, V_1, W_1) est un système complet d'événements, donc $u_1 = 1 - (v_1 + w_1)$, soit $u_1 = 0$.

Épisode II : des inégalités.

3. (a) Examinons une issue de l'événement $\overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap \left(\bigcap_{k=2}^n (H_k \cap \overline{L_k}) \right)$. On a vu que $\overline{H_1} \cap \overline{L_1}$ place Han en E et Luc en C , donc à 2 trajets d'écart. Puis pour tout k , $(H_k \cap \overline{L_k})$ maintient cette distance (Han se rapproche et Luke s'éloigne à chaque déplacement). Ainsi après le n -ième déplacement, ils sont bien toujours à deux trajets d'écart (rédiger la récurrence en détail). Notre issue est bien dans W_n .

Donc $P(W_n) \geq P\left(\overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap \left(\bigcap_{k=2}^n (H_k \cap \overline{L_k})\right)\right)$. À nouveau par indépendance, $\boxed{w_n \geq \frac{1}{4^n}}$.

- (b) Sur le même principe, $V_1 \cap \left(\bigcap_{k=2}^n (H_k \cap \overline{L_k})\right) \subset V_n$. En minorant grossièrement $v_1 = \frac{3}{4} \geq \frac{1}{4}$, on

obtient $\boxed{v_n \geq \frac{1}{4^n}}$.

- (c) $\supset$ Considérons une issue dans $\overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap H_2 \cap L_2$.

Tout d'abord $\overline{H_1} \cap \overline{L_1} = W_1$: Han est en E , Luke est en C .

Puis $H_2 \cap L_2$ mène Han en D et Luke également. Donc notre issue est dans U_2 .

- $\subset$ Considérons une issue dans U_2 .

Après le 2^e déplacement, Han et Luke sont au même endroit. Donc après le 1^{er} déplacement, ils étaient chacun dans un endroit voisin de celui-ci ; mais pas dans le même car U_1 est exclu. Donc ils étaient à deux trajets d'écart, ainsi notre issue est dans W_1 .

On examine les quatre possibilités :

$W_1 \cap (H_2 \cap \overline{L_2}) \subset W_2$ donc est exclu (incompatible avec U_2),

$W_1 \cap (\overline{H_2} \cap L_2) \subset W_2$ donc est exclu,

$W_1 \cap (\overline{H_2} \cap \overline{L_2}) \subset V_2$ donc est exclu.

Finalement notre issue est dans $W_1 \cap (H_2 \cap L_2) = (\overline{H_1} \cap \overline{L_1}) \cap (H_2 \cap L_2)$.

Finalement $U_2 = \overline{H_1} \cap \overline{L_1} \cap H_2 \cap L_2$ et, toujours par indépendance, $P(U_2) = \frac{1}{16}$.

De plus lorsque Han et Luke se sont retrouvés, ils restent ensemble, donc $U_2 \subset U_n$ pour tout

$n \geq 2$. D'où $P(U_n) \geq P(U_2)$. Donc $\boxed{\text{pour tout } n \geq 2, u_n \geq \frac{1}{16}}$.

Épisode III : probabilités conditionnelles. Soit $n \geq 2$ un entier.

4. (a) $P(U_n) \neq 0$, donc on peut définir la probabilité conditionnelle $P_{U_n}(U_{n+1})$.

Comme $U_n \subset U_{n+1}$ pour tout n , $U_n \cap U_{n+1} = U_n$.

Donc $P_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{P(U_n \cap U_{n+1})}{P(U_n)} = \frac{P(U_n)}{P(U_n)} = \boxed{1}$.

Pour la même raison, $U_n \cap V_{n+1} = \emptyset$ et $U_n \cap W_{n+1} = \emptyset$ donc ont pour probabilité 0 et la formule des probabilités conditionnelles donne $\boxed{P_{U_n}(V_{n+1}) = P_{U_n}(W_{n+1}) = 0}$.

- (b) Comme pour $\subset$ dans 3c, on montre que :

$W_n \cap (H_{n+1} \cap L_{n+1}) \subset U_{n+1}$,

$W_n \cap (\overline{H_{n+1}} \cap L_{n+1}) \subset W_{n+1}$,

$W_n \cap (H_{n+1} \cap \overline{L_{n+1}}) \subset W_{n+1}$

et $W_n \cap (\overline{H_{n+1}} \cap \overline{L_{n+1}}) \subset V_{n+1}$.

Ainsi $W_n \cap U_{n+1} = W_n \cap (H_{n+1} \cap L_{n+1})$.

D'où par indépendance : $P(W_n \cap U_{n+1}) = P(W_n)P(H_{n+1})P(L_{n+1})$.

Donc $P_{W_n}(U_{n+1}) = P(H_{n+1})P(L_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{4}}$.

(c) De même, comme $W_n \cap (V_{n+1}) = W_n \cap (\overline{H_{n+1}} \cap \overline{L_{n+1}})$, $P_{W_n}(V_{n+1}) = P(\overline{H_{n+1}})P(\overline{L_{n+1}}) = \boxed{\frac{1}{4}}$.

Puis comme $(U_{n+1}, V_{n+1}, W_{n+1})$ est un s.c.e., $\boxed{P_{W_n}(W_{n+1}) = \frac{1}{2}}$.

Un raisonnement analogue encore donne :

comme $V_n \cap (W_{n+1}) = V_n \cap (\overline{H_{n+1}} \cap \overline{L_{n+1}})$, $\boxed{P_{V_n}(W_{n+1}) = \frac{1}{4}}$;

comme $V_n \cap (U_{n+1}) = V_n \cap (\overline{H_{n+1}} \cap \overline{L_{n+1}})$, $\boxed{P_{V_n}(U_{n+1}) = 0}$.

Enfin (s.c.e.) $\boxed{P_{V_n}(V_{n+1}) = \frac{3}{4}}$.

Épisode IV : relations de récurrence.

5. (a) Soit $n \geq 2$. D'après la formule des probabilités totales avec le s.c.e. (U_n, V_n, W_n) , on a :

$$u_{n+1} = u_n \times P_{U_n}(U_{n+1}) + v_n \times P_{V_n}(U_{n+1}) + w_n \times P_{W_n}(U_{n+1}).$$

Après avoir écrit la même chose pour V_{n+1} et W_{n+1} , on obtient :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}w_n \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{4}w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2}w_n \end{cases}$$

(b) Soit $n \geq 2$. $w_{n+2} = \frac{1}{4}v_{n+1} + \frac{1}{2}w_{n+1}$ et on remplace à l'aide des deux premières équations.

Ainsi $w_{n+2} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}v_n + \frac{1}{4}w_n \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2}w_n \right)$. Or $\frac{1}{4}v_n = w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n$ donc on obtient après simplifications : $\boxed{w_{n+2} = \frac{5}{4}w_{n+1} - \frac{5}{16}w_n}$. Cette relation est encore vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Épisode V : résolution.

6. (a) Résolution classique avec l'équation caractéristique et la détermination des deux constantes. On

obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{w_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)}$ avec $\alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$. On vérifie que

$0 < \alpha < \beta < 1$, par exemple en utilisant que $2 < \sqrt{5} < 3$.

(b) La troisième équation du système donne $v_n = 4w_{n+1} - 2w_n$, soit :

$$v_n = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \beta^n + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) \alpha^n.$$

En utilisant $\frac{\alpha}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{8}$ et $\frac{\beta}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{8}$, on a finalement $\boxed{v_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}\alpha^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10}\beta^n}$.

(c) Comme $\alpha, \beta \in]0, 1[$, on a $\alpha^n \rightarrow 0$ et $\beta^n \rightarrow 0$. Ainsi, $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Or $u_n = 1 - v_n - w_n$ grâce au s.c.e. Donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1}$.

Épisode VI : changement de sens. Soit $N \in \mathbb{N}$.

7. On cherche ici $P_{W_N}(W_{N-1})$. D'après la formule de Bayes :

$$P_{W_N}(W_{N-1}) = P_{W_{N-1}}(W_N) \frac{P(W_N)}{P(W_{N-1})} = \frac{1}{2} \frac{\beta^{N-1} - \alpha^{N-1}}{\beta^N - \alpha^N}.$$

Problème 1*Notations*

On considère un entier naturel $n \geq 2$ et on note $\mathcal{B} = (X^j)_{0 \leq j \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
 Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit un polynôme

$$R_k = X^k(1 - X)^{n-k}.$$

Tout polynôme P pourra être identifié à la fonction polynomiale qui lui est associée et on pourra noter 0 le polynôme nul, au lieu de $0_{\mathbb{R}[X]}$. On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ U &\longmapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U\left(\frac{k}{n}\right) R_k. \end{aligned}$$

Dans tout le problème, le résultat d'une question peut être admis afin de faire la suite.

I Étude du cas $n = 3$

Dans cette partie, on se place dans le cas où $n = 3$. Ainsi les polynômes définis dans l'énoncé sont

$$R_0 = (1 - X)^3, \quad R_1 = X(1 - X)^2, \quad R_2 = X^2(1 - X) \quad \text{et} \quad R_3 = X^3.$$

1. Montrer que (R_0, R_1, R_2, R_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Justifier que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

4. Justifier que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. (a) Déterminer deux polynômes Q_2 et Q_3 de degrés respectifs 2 et 3 et **de coefficient dominant 1** tels que

$$\varphi(Q_2) = \frac{2}{3}Q_2 \quad \text{et} \quad \varphi(Q_3) = \frac{2}{9}Q_3.$$

On pose également $Q_0 = 1$ et $Q_1 = X$.

- (b) On pose $\mathcal{C} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$. Justifier que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (c) Expliciter la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$, on note D cette matrice.
- (d) Déterminer la matrice de passage, notée P , de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Déterminer P^{-1} .
- (e) Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer A^p . On explicitera tous les coefficients.

II Étude du commutant

On se place toujours dans le cas où $n = 3$ et on reprend les notations de la partie précédente.

On note F_A l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire que $AM = MA$.

6. Montrer que F_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
7. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. Montrer que M commute avec A si et seulement si N commute avec D .
8. On note $F_D = \{N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), DN = ND\}$. On admet que l'on peut démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, comme dans la question 1. Déterminer une base et la dimension de F_D , pour cela on ne s'effrayera pas d'un système de 16 équations à 16 inconnues.
9. On pose :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & : & \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \\ & & M \mapsto P^{-1}MP \end{array}$$

Démontrer que Γ est un automorphisme de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

10. En déduire la dimension de F_A .

III Retour au cas général

On rappelle que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

11. (a) Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Démontrer que :

$$X^j = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j}$$

- (b) En déduire que $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (c) Démontrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

12. (a) Démontrer que :

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(X) = X \quad \text{et} \quad \varphi(X^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2 + \frac{1}{n}X$$

- (b) En déduire que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ .

On note $\tilde{\varphi}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ correspondant à la restriction de φ à $\mathbb{R}_2[X]$.

- (c) On note A_n la matrice de $\tilde{\varphi}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Démontrer que $A_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}H$ où H est une matrice à préciser.

- (d) Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et dont les coefficients diagonaux valent 1 telle que

$$H = Q\Delta Q^{-1} \quad \text{avec} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (e) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n$.

Indication : pour étudier la limite d'une suite de matrices, on examine simplement la limite coefficient par coefficient.

Problème 2

Dénombrement.

Soit E un ensemble fini à $n \geq 1$ éléments. On rappelle la définition d'une **partition** de E : un ensemble de parties de E

- non vides et deux à deux disjointes,
- dont la réunion vaut E .

Par exemple les parties $\{a, b, e\}$ et $\{c, d\}$ forment une partition de l'ensemble $\{a, b, c, d, e\}$.

1. Soient $c, d \in \mathbb{N}$ tels que $n = c + d$. Déterminer le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles, l'un ayant c éléments et l'autre d éléments.
2. Déterminer le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles non vides.
3. On suppose (dans cette question seulement) que n est pair. Déterminer le nombre de partitions de E en sous-ensembles contenant chacun exactement deux éléments.
4. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $n = ab$. Déterminer le nombre de partitions de E en a sous-ensembles contenant chacun b éléments.

Probabilités

On lance 100 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Pour tout $N \in \llbracket 2, 100 \rrbracket$, on appelle X_N la variable aléatoire égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats consécutifs ont été différents. Par exemple, si les premiers lancers sont $(F, F, P, F, P, P, P, F, \dots)$ alors X_8 vaut 4 (*prenez la peine de vérifier que ça vous paraît clair avant d'attaquer le problème*).

5. Décrire l'univers Ω associé à l'expérience aléatoire présentée ici : les 100 lancers consécutifs de notre pièce. Déterminer son cardinal.
6. Pour $2 \leq N \leq 100$, déterminer $X_N(\Omega)$ l'ensemble des valeurs de X_N .
7. Déterminer la loi de X_2 et son espérance.
8. Déterminer la loi de X_3 et son espérance.
9. Pour $2 \leq N \leq 100$, déterminer $\mathbb{P}(X_N = 0)$ et $\mathbb{P}(X_N = 1)$.
10. Soit $2 \leq N \leq 99$. On pose $Y_N = X_{N+1} - X_N$.
 - (a) Pour tout $0 \leq k \leq N - 1$, montrer que

$$\mathbb{P}((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_N = k).$$

- (b) En déduire la loi de Y_N et son espérance.
- (c) Calculer $E(X_N)$ en fonction de N .
- (d) Montrer que X_N et Y_N sont indépendantes.
- (e) Montrer que si la variable aléatoire U suit une loi binomiale de paramètres $(N - 1, 1/2)$ et V suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, alors $U + V$ suit une loi binomiale de paramètres $(N, 1/2)$.
- (f) En déduire loi, espérance et variance de X_N .

Problème 1**I Étude du cas $n = 3$**

- Pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on a $R_k = X^k(1 - X)^{3-k}$, ainsi $R_k \in \mathbb{R}_3[X]$ puisque $\deg(R_k) = 3$.
 • Montrons ensuite que la famille $(R_k)_{0 \leq k \leq 3}$ est libre.

On se donne $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq 3} \in \mathbb{R}^4$ tels que $\sum_{k=0}^3 \lambda_k R_k = 0$.

On évalue cette égalité en 0 pour obtenir $\lambda_0 = 0$ puis on évalue en 1 pour obtenir $\lambda_3 = 0$.

Il reste $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = 0$, c'est-à-dire

$$\lambda_1 X(1 - X)^2 + \lambda_2 X^2(1 - X) = 0.$$

En examinant le monôme de degré 1 dans cette égalité, on obtient $\lambda_1 = 0$ puis on en déduit que $\lambda_2 = 0$.

• Finalement la famille $(R_k)_{0 \leq k \leq 3}$ est libre et comme c'est une famille de cardinal $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

- L'application φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ car pour tout $U \in \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(U)$ est une combinaison linéaire des polynômes $(R_k)_{0 \leq k \leq 3}$ qui forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
 • Montrons ensuite la linéarité de φ . Soit $(U, V) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda U + \mu V) &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (\lambda U + \mu V) \left(\frac{k}{3}\right) R_k \\ &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \left(\lambda U \left(\frac{k}{3}\right) + \mu V \left(\frac{k}{3}\right) \right) R_k \\ &= \lambda \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} U \left(\frac{k}{3}\right) R_k + \mu \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} V \left(\frac{k}{3}\right) R_k \\ &= \lambda \varphi(U) + \mu \varphi(V) \end{aligned}$$

Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

- On calcule les images par φ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. En utilisant la formule du binôme,

$$\varphi(1) = R_0 + 3R_1 + 3R_2 + R_3 = (1 - X)^3 + 3X(1 - X)^2 + 3X^2(1 - X) + X^3 = (X + (1 - X))^3 = 1,$$

$$\varphi(X) = R_1 + 2R_2 + R_3 = X(1 - X)^2 + 2X^2(1 - X) + X^3 = X^3 - 2X^2 + X + 2X^2 - 2X^3 + X^3 = X,$$

$$\varphi(X^2) = \frac{1}{3}R_1 + \frac{4}{3}R_2 + R_3 = \frac{1}{3}X(1 - X)^2 + \frac{4}{3}X^2(1 - X) + X^3 = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}X^2,$$

$$\varphi(X^3) = \frac{1}{9}R_1 + \frac{8}{9}R_2 + R_3 = \frac{1}{9}X(1 - X)^2 + \frac{8}{9}X^2(1 - X) + X^3 = \frac{1}{9}X + \frac{2}{3}X^2 + \frac{2}{9}X^3.$$

En disposant les résultats trouvés en colonnes, on obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

4. La matrice A est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls, on en déduit que A est inversible et donc que φ est bijective. Donc φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. (a) • On cherche un polynôme $Q_2 = X^2 + aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel $\varphi(Q_2) = \frac{2}{3}Q_2$. Matriciellement, cela se traduit par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est équivalent au système

$$\begin{cases} b &= \frac{2}{3}b \\ a + \frac{1}{3} &= \frac{2}{3}a \end{cases}$$

On obtient $b = 0$ et $a = -1$, c'est-à-dire $Q_2 = X^2 - X$.

- On procède de même en cherchant Q_3 sous la forme $Q_3 = X^3 + aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On souhaite $\varphi(Q_3) = \frac{2}{9}Q_3$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est équivalent au système

$$\begin{cases} c &= \frac{2}{9}c \\ b + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9} &= \frac{2}{9}b \\ \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} &= \frac{2}{9}a \end{cases}$$

On obtient $c = 0$, $b = \frac{1}{2}$ et $a = -\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $Q_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$. Finalement,

$$Q_2 = X^2 - X \text{ et } Q_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X.$$

- (b) La famille (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ car elle est composée de polynômes non nuls de degrés distincts. Son cardinal étant égal à la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$, c'est une base. Donc (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(c) D'après les questions précédentes, on a

$$\varphi(Q_0) = Q_0, \varphi(Q_1) = Q_1, \varphi(Q_2) = \frac{2}{3}Q_2 \text{ et } \varphi(Q_3) = \frac{2}{9}Q_3$$

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On vient de diagonaliser la matrice A , c'est-à-dire de trouver une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme φ est diagonale.

(d) Pour former la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on place en colonnes les composantes des polynômes de la base $\mathcal{C}$ décomposés dans la base $\mathcal{B}$. D'après les expressions de Q_2 et Q_3 obtenues à la question 5a,

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme toute matrice de passage, P est inversible et P^{-1} peut-être obtenue par exemple en résolvant un système.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & y_1 \\ x_2 - x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = & y_2 \\ x_3 - \frac{3}{2}x_4 & = & y_3 \\ x_4 & = & y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & y_1 \\ x_2 & = & y_2 + y_3 + y_4 \\ x_3 & = & y_3 + \frac{3}{2}y_4 \\ x_4 & = & y_4 \end{cases}$$

On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(e) D'après la formule de changement de base, on sait que : $A = PDP^{-1}$. On en déduit, grâce à la simplification $P^{-1}P = I_4$ que

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = P D^p P^{-1}$$

Or la matrice D étant diagonale, ses puissances sont (éventuellement par récurrence)

$$\forall p \in \mathbb{N}, D^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2/3)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2/9)^p \end{pmatrix}$$

Il reste à effectuer les deux multiplications, pour obtenir

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^p & 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^p + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^p \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^p & \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^p - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^p \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{2}{9}\right)^p \end{pmatrix}.$$

II Étude du commutant

6. • $F_A \subset \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
 • La matrice nulle de taille 4 commute avec A .
 • Soit $(M, M') \in F_A^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$(\lambda M + \mu M')A = \lambda(MA) + \mu(M'A) = \lambda AM + \mu AM' = A(\lambda M + \mu M').$$

Ainsi $\lambda M + \mu M' \in F_A$. Finalement

$$F_A \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

7. D'après la partie I, on sait que $A = PDP^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} AM = MA &\Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}PDP^{-1}MP = P^{-1}MPDP^{-1}P \\ &\Leftrightarrow DN = ND. \end{aligned}$$

$$M \text{ commute avec } A \text{ si et seulement si } N \text{ commute avec } D$$

8. On se donne une matrice

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

On a

$$\begin{aligned}
N \in F_D &\Leftrightarrow ND = DN \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & 2c/3 & 2d/9 \\ e & f & 2g/3 & 2h/9 \\ i & j & 2k/3 & 2l/9 \\ m & n & 2o/3 & 2p/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 2i/3 & 2j/3 & 2k/3 & 2l/3 \\ 2m/9 & 2n/9 & 2o/9 & 2p/9 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow c = d = g = h = i = j = l = m = n = o = 0 \\
&\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow N \in \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33}, E_{44}).
\end{aligned}$$

Donc $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{33}, E_{44})$ est une base de F_D qui est de dimension 6.

9. • Montrons tout d'abord que Γ est linéaire. Soit $(M, M') \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\Gamma(\lambda M + \mu M') = P^{-1}(\lambda M + \mu M')P = \lambda P^{-1}MP + \mu P^{-1}M'P = \lambda \Gamma(M) + \mu \Gamma(M').$$

- Montrons ensuite l'injectivité de Γ .

$$M \in \text{Ker}(\Gamma) \Leftrightarrow P^{-1}MP = 0 \Leftrightarrow M = P0P^{-1} = 0.$$

- Finalement, Γ est un endomorphisme injectif en dimension finie donc c'est une bijection.

Autrement dit, Γ est un automorphisme de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

10. Montrons que $\Gamma(F_A) = F_D$. Ainsi les sous-espaces vectoriels F_A et F_D auront la même dimension puisqu'ils seront isomorphes.

Déjà, d'après la question 7, on sait que si $M \in F_A$ alors $\Gamma(M) \in F_D$, ce qui montre que $\Gamma(F_A) \subset F_D$. Réciproquement, soit $N \in F_D$. On a $N = P^{-1}(PNP^{-1})P$ avec $PNP^{-1} \in F_A$ en utilisant encore la question 7. Ainsi $M = PNP^{-1}$ vérifie $N = \Gamma(M)$ donc $N \in \Gamma(F_A)$, ce qui montre que $F_D \subset \Gamma(F_A)$.

On a bien $\Gamma(F_A) = F_D$, on en déduit que $\dim(F_A) = 6$.

III Retour au cas général

11. (a) Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j} &= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} X^{k+j} (1-X)^{n-k-j} \\ &= X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} X^k (1-X)^{n-j-k} \\ &= X^j (X + (1-X))^{n-j} = X^j. \end{aligned}$$

Donc $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, X^j = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} R_{k+j}.$

- (b) D'après la question précédente, on sait que la famille $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ engendre la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ ainsi $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus, son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, donc $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- (c) En procédant de la même façon que dans la question 2 de la partie I, on montre que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Déterminons son noyau. Soit $U \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\varphi(U) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U\left(\frac{k}{n}\right) R_k = 0.$$

Or d'après la question précédente, $(R_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ ainsi l'égalité précédente implique

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, U\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

Ainsi le polynôme U possède au moins $n+1$ racines. Mais il est de degré au plus n , donc $U = 0$. On a montré que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$, donc φ est injective. Enfin, φ est un endomorphisme injectif en dimension finie, donc φ est bijectif.

Finalement, φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

12. (a) • Soit $n \geq 2$. D'après la formule du binôme,

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1.$$

• Puis

$$\varphi(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\binom{n}{k} \frac{k}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k}{n} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

On reprend le calcul précédent, on utilise toujours la formule du binôme de Newton et on effectue lors du calcul le changement d'indice $j = k - 1$.

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= X \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-1-(k-1)} \\ &= X \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} X^j (1-X)^{n-1-j} \\ &= X(X + (1-X))^{n-1} = X.\end{aligned}$$

• Enfin :

$$\begin{aligned}\varphi(X^2) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k(k-1) + k) X^k (1-X)^{n-k}.\end{aligned}$$

Comme $n \geq 2$,

$$\binom{n}{k} k(k-1) = \frac{n!}{k!(n-k)!} k(k-1) = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi(X^2) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) X^k (1-X)^{n-k} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} X^k (1-X)^{n-2-(k-2)} + \frac{n}{n^2} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-1-(k-1)} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} X^{k-2} (1-X)^{n-2-(k-2)} + \frac{n}{n^2} X \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-1-(k-1)} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} X^j (1-X)^{n-2-j} + \frac{n}{n^2} X \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} X^j (1-X)^{n-1-j} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 (X + (1-X))^{n-2} + \frac{1}{n} X (X + (1-X))^{n-1} \\ &= \frac{n-1}{n} X^2 + \frac{1}{n} X.\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\varphi(1) = 1, \varphi(X) = X \text{ et } \varphi(X^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2 + \frac{1}{n}X.}$

- (b) D'après la question précédente, l'image par φ de chaque vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Donc par linéarité de φ , $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ .

- (c) D'après les égalités trouvées dans la question 12a, en disposant en colonnes les images de 1, X et X^2 par $\tilde{\varphi}$, on a

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/n \\ 0 & 0 & 1 - 1/n \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient la décomposition souhaitée en posant $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (d) Dans cette question, on reconnaît la formule de changement de base. Notons h l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à la matrice H . On a $h(1) = 1$, $h(X) = X$ et $h(X^2) = X$. Ainsi, $h(X^2 - X) = 0$.

La famille $(1, X, X^2 - X)$ est libre (car échelonnée en degrés) et possède 3 vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Dans cette base, on a

$$h(1) = 1, \quad h(X) = X \quad \text{et} \quad h(X^2 - X) = 0$$

La matrice de l'endomorphisme h dans cette nouvelle base est

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose Q la matrice de passage de $(1, X, X^2)$ vers $(1, X, X^2 - X)$, *i.e.*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son inverse est la matrice de passage de $(1, X, X^2 - X)$ à $(1, X, X^2)$, ce qui donne

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puisque $X^2 = (X^2 - X) + X$. On a bien $\Delta = Q^{-1}HQ$ et donc

$$H = Q\Delta Q^{-1} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) On reprend la relation de la question 12c.

$$\begin{aligned}
 A_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}H \\
 &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)QI_3Q^{-1} + \frac{1}{n}Q\Delta Q^{-1} \\
 &= Q\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}\Delta\right)Q^{-1} \\
 &= Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1/n \end{pmatrix}Q^{-1}.
 \end{aligned}$$

On élève à la puissance n en constatant comme d'habitude la simplification des Q^{-1} et Q :

$$A_n^n = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 1/n)^n \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

En effectuant les deux multiplications, on trouve :

$$A_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - (1 - 1/n)^n \\ 0 & 1 & (1 - 1/n)^n \end{pmatrix}.$$

Or

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

et

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim n \times \left(-\frac{1}{n}\right) = -1.$$

Par continuité de $x \mapsto e^x$ en -1 , on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = e^{-1}.$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - e^{-1} \\ 0 & 1 & e^{-1} \end{pmatrix}}.$$

Problème 2

Dénombrement.

1. Si $c = 0$ ou $d = 0$, il n'existe aucune partition de E en deux sous-ensembles non vides.

On suppose donc $c, d \geq 1$. Si $c \neq d$, il suffit de choisir la partie à c éléments, l'autre étant son complémentaire. Il y a donc $\binom{n}{c}$ possibilités.

Si $c = d$, chaque partition est comptée deux fois par ce procédé, une fois par chacun des deux sous-ensembles. Il y a donc $\frac{1}{2} \binom{n}{c}$ possibilités.

Ainsi, le nombre cherché est $\boxed{\binom{n}{c} \text{ si } c \neq d}$ et $\boxed{\frac{1}{2} \binom{n}{c} \text{ si } c = d}$.

2. Pour former une partition de E en deux sous-ensembles non vides, on peut choisir une partie non vide et différente de E , puis prendre son complémentaire.

Il y a $2^n - 2$ parties non vides et différentes de E , mais chaque partition est comptée deux fois. Le nombre cherché est donc $\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$.

Ainsi, $\boxed{2^{n-1} - 1}$.

3. On suppose n pair. On commence par ordonner les éléments de E , ce qui donne $n!$ listes possibles, puis on regroupe les éléments deux par deux.

Chaque paire peut être ordonnée de 2 façons, et les $n/2$ paires peuvent être permutées entre elles de $(n/2)!$ façons. Chaque partition est donc comptée $2^{n/2}(n/2)!$ fois.

Le nombre cherché est donc $\boxed{\frac{n!}{2^{n/2}(n/2)!}}$.

4. On procède de même. On ordonne les n éléments de E , puis on les regroupe en a blocs de taille b .

Dans chaque bloc, les b éléments peuvent être permutés de $b!$ façons, et les a blocs peuvent être permutés entre eux de $a!$ façons.

Le nombre cherché est donc $\boxed{\frac{n!}{(b!)^a a!}}$.

Probabilités

5. L'univers est l'ensemble des suites de longueur 100 formées avec les deux symboles F et P .

Ainsi, $\Omega = \{F, P\}^{100}$ et $\boxed{|\Omega| = 2^{100}}$.

6. Au cours des N premiers lancers, il y a $N - 1$ comparaisons entre deux lancers consécutifs. Le nombre de changements peut donc être compris entre 0 et $N - 1$.

Toutes ces valeurs sont possibles : par exemple, une suite constante donne 0 changement, et une suite alternée donne $N - 1$ changements.

Ainsi, $\boxed{X_N(\Omega) = \llbracket 0, N - 1 \rrbracket}$.

7. Pour $N = 2$, on a $X_2 = 0$ si les deux lancers sont identiques et $X_2 = 1$ s'ils sont différents.

Comme la pièce est équilibrée, $P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $E(X_2) = \frac{1}{2}$.

8. Pour $N = 3$, on regarde les deux transitions. Les suites FFF et PPP donnent $X_3 = 0$, les suites FPP , FPP , $PF F$ et PPF donnent $X_3 = 1$, et les suites FPP et PPF donnent $X_3 = 2$.

Donc $P(X_3 = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X_3 = 2) = \frac{1}{4}$.

Ainsi, $X_3 \sim \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$ et $E(X_3) = 1$.

9. L'événement $(X_N = 0)$ correspond aux suites constantes : il y en a 2, donc $P(X_N = 0) = \frac{2}{2^N} = 2^{1-N}$.

L'événement $(X_N = 1)$ correspond aux suites ayant un unique changement. On choisit le résultat du premier lancer de 2 façons, puis la position de l'unique changement parmi les $N - 1$ transitions. Il y a donc $2(N - 1)$ suites favorables.

Ainsi, $P(X_N = 0) = 2^{1-N}$ et $P(X_N = 1) = (N - 1)2^{1-N}$.

10. Soit $2 \leq N \leq 99$. On pose $Y_N = X_{N+1} - X_N$.

- (a) La variable Y_N vaut 0 si le lancer numéro $N + 1$ est identique au lancer numéro N , et vaut 1 sinon. Fixons $k \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$. Une fois les N premiers lancers connus, la probabilité que le lancer suivant soit identique au N -ième est $\frac{1}{2}$.

Donc $P((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}P(X_N = k)$.

Ainsi,

$$P((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}P(X_N = k).$$

- (b) En sommant la relation précédente pour k allant de 0 à $N - 1$, on obtient $P(Y_N = 0) = \frac{1}{2}$.

Comme Y_N ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, on a aussi $P(Y_N = 1) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $Y_N \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $E(Y_N) = \frac{1}{2}$.

- (c) Comme $X_{N+1} = X_N + Y_N$, on obtient $E(X_{N+1}) = E(X_N) + E(Y_N) = E(X_N) + \frac{1}{2}$.

Or $E(X_2) = \frac{1}{2}$. Par récurrence, pour tout $N \in \llbracket 2, 100 \rrbracket$, on a $E(X_N) = \frac{N - 1}{2}$.

Ainsi, $E(X_N) = \frac{N - 1}{2}$.

- (d) D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, on a $P((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}P(X_N = k)$.

Comme $P(Y_N = 0) = \frac{1}{2}$, cela donne $P((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = P(Y_N = 0)P(X_N = k)$.

De plus,

$$P((Y_N = 1) \cap (X_N = k)) = P(X_N = k) - P((Y_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}P(X_N = k).$$

Comme $P(Y_N = 1) = \frac{1}{2}$, on a aussi $P((Y_N = 1) \cap (X_N = k)) = P(Y_N = 1)P(X_N = k)$.

Ainsi, $\boxed{X_N \text{ et } Y_N \text{ sont indépendantes}}.$

(e) Soient $U \sim \mathcal{B}(N-1, \frac{1}{2})$ et $V \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ indépendantes.

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on a

$$P(U + V = k) = P(U = k, V = 0) + P(U = k - 1, V = 1).$$

Avec la convention $P(U = -1) = P(U = N) = 0$, cela donne

$$P(U + V = k) = \frac{1}{2}P(U = k) + \frac{1}{2}P(U = k - 1).$$

Donc

$$P(U + V = k) = \frac{1}{2} \binom{N-1}{k} \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2} \binom{N-1}{k-1} \frac{1}{2^{N-1}}.$$

Par la formule de Pascal, $\binom{N-1}{k} + \binom{N-1}{k-1} = \binom{N}{k}$. Ainsi, $P(U + V = k) = \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$.

Donc $\boxed{U + V \sim \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{2}\right)}.$

(f) On montre par récurrence que $X_N \sim \mathcal{B}(N-1, \frac{1}{2})$.

La propriété est vraie pour $N = 2$ d'après la question 7. Supposons $X_N \sim \mathcal{B}(N-1, \frac{1}{2})$. D'après les questions précédentes, $Y_N \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ et X_N et Y_N sont indépendantes. Comme $X_{N+1} = X_N + Y_N$, la question précédente donne $X_{N+1} \sim \mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$.

Ainsi, pour tout $N \in \llbracket 2, 100 \rrbracket$, $\boxed{X_N \sim \mathcal{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right)}.$

On en déduit immédiatement $\boxed{E(X_N) = \frac{N-1}{2}}$ et $\boxed{V(X_N) = \frac{N-1}{4}}.$

Problème 1

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$.

Le but de ce problème est de calculer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Pour tout réel t , on pose $h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$ et on définit la fonction φ sur l'intervalle $[0; \pi]$ par

$$\varphi(0) = -1 \quad \text{et} \quad \forall t \in]0; \pi], \quad \varphi(t) = \frac{h(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

2. (a) Montrer que φ est continue sur $[0; \pi]$.
 (b) Justifier que φ est dérivable sur $]0; \pi]$ et calculer $\varphi'(t)$ pour $t \in]0; \pi]$.
 (c) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$.
3. Montrer, à l'aide d'intégrations par parties, que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}.$$

4. Montrer qu'il existe une constante λ (à déterminer) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in]0; \pi], \quad \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \lambda.$$

5. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$ on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(xt) dt = 0.$$

6. Calculer la somme de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$.

Problème 2

Soit $n \geq 1$ un entier fixé. On note $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers de n .

1. On choisit de manière équiprobable un entier x dans l'univers $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 Pour tout entier m de $\llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, on appelle A_m l'événement « m divise x » (ou, de manière équivalente, « x est multiple de m »). On appelle B l'événement « x est premier avec n ».
 On notera enfin A^c le complémentaire d'un événement A .
- (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner la définition de k événements **mutuellement indépendants**.
 (b) Pour tout entier $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$ qui divise n , calculer $\text{Card}(A_m)$ puis la probabilité de A_m .
 (c) En déduire que les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

(d) Montrer que

$$B = \bigcap_{k=1}^r A_{p_k}^c.$$

(e) En déduire la probabilité de B .

2. Application : on note

$$I_n = \{x \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \exists y \in \llbracket 1, n \rrbracket, xy \equiv 1 \pmod{n}\}.$$

On note $\varphi(n)$ le cardinal de I_n .

(a) Énoncer le théorème de Bézout.

(b) Montrer qu'un élément x de $\llbracket 1, n \rrbracket$ appartient à I_n si et seulement s'il est premier avec n .

(c) Démontrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Problème 3

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, on rappelle qu'on note f^k le k -ième itéré de f pour la composition.

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **racine carrée** de f lorsque $u^2 = f$.

I Propriétés générales

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f admet une racine carrée u .

1. Montrer que $-u$ est encore une racine carrée de f .
2. Montrer que $u \circ f = f \circ u$.
3. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(u)$.
4. En déduire que f est bijective si et seulement si u est bijective.

II Un exemple en dimension 3

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f : (x, y, z) \mapsto (-3x - 4y + 6z, 6x + 7y - 9z, 2x + 2y - 2z).$$

5. Déterminer $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\ker(f) = \operatorname{Vect}(v_1)$.
6. Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est défini par l'équation $2x + 2y - 3z = 0$.
7. On pose $v_2 = (0, 3, 2)$ et $v_3 = (1, -1, 0)$. Montrer que (v_2, v_3) est une base de $\operatorname{Im}(f)$.
8. Établir que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.
9. Montrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $f^2 = f$.
10. Déterminer une racine carrée de f différente de f et de $-f$.

III Racines carrées et dérivation

Dans cette partie, $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $I = \text{id}_E$ et d l'endomorphisme de E défini par

$$d(P) = P'.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le but de cette partie est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $d + \lambda I$ admette une racine carrée.

11. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Étant donnés $m \in \mathbb{N}$ et $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on définit l'endomorphisme

$$P(f) = \sum_{k=0}^m a_k f^k.$$

- (a) Montrer que, pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et tous réels λ, μ ,

$$(\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f).$$

- (b) Montrer que

$$P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f).$$

12. Étude de d .

- (a) Déterminer $\ker(d)$ et montrer que $\text{Im}(d) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- (b) Montrer que $d^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

13. Condition nécessaire : on suppose que $d + \lambda I$ admet une racine carrée u .

- (a) Montrer que u et d commutent et justifier qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(1) = a$.

- (b) En déduire que $\lambda \geq 0$.

- (c) Montrer que $\lambda > 0$.

14. Réciproque : on suppose $\lambda > 0$.

- (a) Montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que au voisinage de 0,

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + o(x^n).$$

- (b) Déterminer R_n le reste de la division euclidienne de P_n^2 par X^{n+1} .

- (c) En déduire un endomorphisme g tel que $g^2 = I + \frac{1}{\lambda}d$ puis un endomorphisme u tel que $u^2 = d + \lambda I$.

Problème 1

1. Voir cours.
2. (a) Tout d'abord, φ est continue sur $]0; \pi]$ (en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Il reste donc à étudier la continuité en 0. On a

$$\frac{t^2}{2\pi} - t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t \quad \text{et} \quad 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t.$$

Par conséquent, $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{t}{t}$ c'est-à-dire $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -1$ et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = -1 = \varphi(0).$$

Ainsi, φ est continue sur $]0; \pi]$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \varphi(0)$: la fonction φ est donc également continue en 0.

- (b) La fonction φ est dérivable sur $]0; \pi]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle et dont le dénominateur ne s'annule pas (sur cet intervalle). De plus,

$$\forall t \in]0; \pi], \quad \varphi'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

- (c) Commençons par remarquer que φ' est continue sur $]0; \pi]$ par opérations sur les fonctions continues comme précédemment. Il reste à montrer que φ est dérivable en 0 et de dérivée continue en 0. Pour cela on a plusieurs méthodes.

— On peut déterminer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi'(t)$ et utiliser le théorème de la limite de la dérivée. Comme il faudra montrer que φ' est continue en 0, il faudra de toute façon déterminer cette limite. Cette méthode est donc la plus simple. Cependant elle ne sépare pas les difficultés donc si on échoue à calculer la limite, on n'aura aucun point. On a

$$4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 4 \left(\frac{t}{2}\right)^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2.$$

On va déterminer le développement limité à l'ordre 2 du numérateur de φ' : Pour cela, il suffit d'un développement à l'ordre 2 de sinus et d'un à l'ordre 1 de cosinus (regarder par quoi ils sont multipliés). On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) &= \left(1 - \frac{t}{\pi}\right) 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \left(1 - \frac{t}{\pi}\right) 2 \left(t + o_{t \rightarrow 0}(t^2)\right) = -t + \frac{t^2}{\pi} + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \\ \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) &= \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right) \left(1 + o_{t \rightarrow 0}(t)\right) = -t + \frac{t^2}{2\pi} + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \end{aligned}$$

Par différence, on a

$$\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2).$$

Ainsi, on a pour équivalent du numérateur

$$\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi} t^2.$$

Par conséquent, $\varphi'(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2\pi}$, c'est-à-dire que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi'(t) = \frac{1}{2\pi}$. La fonction φ est continue sur $[0; \pi]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; \pi]$ et on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi'(t) = \frac{1}{2\pi}$. Grâce au théorème de la limite de la dérivée, φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi}$ et φ' est continue en 0.

— On peut montrer que φ est dérivable en 0 à l'aide du taux d'accroissements. Pour $t \in]0; \pi]$ on a

$$\tau(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \frac{\frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{\sin(\frac{t}{2})} + 1}{t} = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2t \sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Pour le dénominateur on a

$$2t \sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2t \times \frac{t}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2.$$

Pour le numérateur on va faire un développement limité au premier ordre permettant d'avoir un équivalent. Comme $\sin(x) = x + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ on a

$$\frac{t^2}{2\pi} - t + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t^2}{2\pi} - t + 2 \left(\frac{t}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)\right) = \frac{t^2}{2\pi} + o_{t \rightarrow 0}(t^2).$$

Le numérateur est donc équivalent à $\frac{t^2}{2\pi}$. Par quotient on a

$$\tau(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2\pi}}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi}.$$

Ainsi le taux d'accroissement en 0 de φ a pour limite $\frac{1}{2\pi}$ quand t tend vers 0. La fonction φ est donc dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi}$.

On montre que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi'(t) = \frac{1}{2\pi} = \varphi'(0)$ par la même méthode que précédemment. Ainsi φ' est continue en 0.

— On peut montrer que φ est dérivable en 0 à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1.

Pour cela, montrer que $\varphi(x) = -1 + \frac{x}{2\pi} + o(x^2)$.

En conséquence φ est dérivable sur $[0; \pi]$ et de dérivée continue donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour calculer l'intégrale proposée, on procède à deux intégrations par parties successives

(licites puisque toutes les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; \pi]$).

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \times \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \times \frac{\sin(kt)}{k} dt \\
&= \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \pi \right) \times \frac{\sin(k\pi)}{k}}_0 - 0 - \frac{1}{k} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(kt) dt \\
&= -\frac{1}{k} \left(\left[\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \times \frac{-\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \times \frac{-\cos(kt)}{k} dt \right) \\
&= -\frac{1}{k} \left((1-1) \times \frac{-\cos(k\pi)}{k} - (0-1) \times \frac{-\cos(0)}{k} + \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \cos(kt) dt \right) \\
&= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi k^2} \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0; \pi]$ fixés. On pose $C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$. On a

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left(e^{ikt} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n (e^{it})^k \right).$$

On reconnaît la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = e^{it} \neq 1$ (puisque t est dans l'intervalle $]0; \pi]$). Par conséquent, on a

$$\sum_{k=1}^n (e^{it})^k = e^{it} \frac{1 - e^{itn}}{1 - e^{it}} = e^{it} \frac{e^{i\frac{nt}{2}} (e^{-i\frac{nt}{2}} - e^{i\frac{nt}{2}})}{e^{i\frac{t}{2}} (e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}})} = e^{i\frac{n+1}{2}t} \frac{-2i \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = e^{i\frac{n+1}{2}t} \times \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

On sait que pour tout (a, b) de $\mathbb{R}^2$, on a : $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$. Par conséquent, pour tout entier n et tout t dans $]0; \pi]$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \frac{\frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{n+(n+1)}{2}t\right) + \sin\left(\frac{n-(n+1)}{2}t\right) \right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0; \pi], \quad \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

5. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$ et soit $x > 0$ un réel. On a alors en intégrant par parties (licite puisque les fonctions $t \mapsto -\frac{\cos(xt)}{x}$ et $t \mapsto g(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$).

$$\int_0^\pi g(t) \sin(xt) dt = \left[-\frac{\cos(xt)}{x} g(t) \right]_0^\pi + \frac{1}{x} \int_0^\pi g'(t) \cos(xt) dt = \frac{g(0) - \cos(x\pi)g(\pi)}{x} + \frac{1}{x} \int_0^\pi g'(t) \cos(xt) dt.$$

On a d'une part

$$\left| \frac{g(0) - \cos(x\pi)g(\pi)}{x} \right| \leq \frac{|g(0)| + |\cos(x\pi)||g(\pi)|}{x} \leq \frac{|g(0)| + |g(\pi)|}{x},$$

et d'autre part,

$$\left| \int_0^\pi g'(t) \cos(xt) dt \right| \leq \int_0^\pi |g'(t) \cos(xt)| dt \leq \int_0^\pi |g'(t)| dt.$$

La fonction g étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction g' est continue donc la fonction $|g'|$ l'est aussi. Par le théorème des bornes atteintes, elle est majorée. On peut donc continuer à majorer l'intégrale. Cependant cela n'est pas nécessaire.

Posons $M = \int_0^\pi |g'(t)| dt$ qui est un réel indépendant de x . Par ce qui précède on a, pour tout x strictement positif,

$$\left| \int_0^\pi g(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{|g(0)| + |g(\pi)|}{x} + \frac{M}{x}.$$

Or, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{|g(0)| + |g(\pi)|}{x} + \frac{M}{x} \right) = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(xt) dt = 0.$$

6. Montrons que la somme de la série $\sum \frac{1}{k^2}$ est $\frac{\pi^2}{6}$. Soit $n \geq 2$ un entier. En reprenant le résultat de la question 3 et par linéarité de l'intégrale, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt = \int_0^\pi h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt.$$

D'après la question 4, pour tout $t \in]0; \pi]$ on a

$$h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) = \frac{h(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}h(t) = \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}h(t).$$

Les fonctions $t \mapsto h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right)$ et $t \mapsto \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}h(t)$ de l'égalité précédente sont continues en 0 (par opérations sur les fonctions continues). L'égalité étant valide sur $]0; \pi]$, par passage à la limite, elle l'est aussi sur $[0; \pi]$. On peut aussi tout simplement évaluer les fonctions en 0.

Nous avons alors

$$\forall t \in [0; \pi], \quad h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) = \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{1}{2}h(t)$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt = \int_0^\pi \varphi(t) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi h(t) dt.$$

Or, on sait que $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série convergente donc la suite de ses sommes partielles converge. Par ailleurs, la fonction φ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$, on a, d'après la question 5,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi h(t) dt.$$

Il reste alors à calculer l'intégrale précédente.

$$\int_0^\pi h(t) dt = \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}.$$

En conclusion on a montré que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Problème 2

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Des événements $E_1, \dots, E_k$ sont mutuellement indépendants si

$$\forall J \subset \{1, \dots, k\}, \quad P \left(\bigcap_{j \in J} E_j \right) = \prod_{j \in J} P(E_j).$$

- (b) Soit $m \in \{1, \dots, n\}$ qui divise n . L'événement A_m est l'ensemble des issues $x \in \{1, \dots, n\}$ multiples de m . On a donc $A_m = \left\{ m, 2m, \dots, \frac{n}{m}m \right\}$. Ainsi on a $\text{Card}(A_m) = \frac{n}{m}$. La probabilité étant uniforme et $\Omega = \{1, \dots, n\}$, on a

$$P(A_m) = \frac{\text{Card}(A_m)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\frac{n}{m}}{n} = \boxed{\frac{1}{m}}.$$

- (c) Soit $J \subset \{1, \dots, r\}$. Pour $x \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{j \in J} A_{p_j} &\iff \forall j \in J, x \in A_{p_j} \\ &\iff \forall j \in J, p_j | x. \end{aligned}$$

Les p_j étant des nombres premiers différents, ils sont premiers entre eux. Par le corollaire de Gauss, ils divisent x si et seulement si leur produit divise x . Notons $m = \prod_{j \in J} p_j$ on a

$$x \in \bigcap_{j \in J} A_{p_j} \iff \prod_{j \in J} p_j | x \iff m | x \iff x \in A_m.$$

On a donc l'égalité des événements $\bigcap_{j \in J} A_{p_j} = A_m$. Par la question précédente, on a alors

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_{p_j}\right) = P(A_m) = \frac{1}{m} = \frac{1}{\prod_{j \in J} p_j} = \prod_{j \in J} \frac{1}{p_j} = \prod_{j \in J} P(A_{p_j}).$$

Ceci étant vrai pour tout $J \subset \{1, \dots, r\}$, les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

- (d) • Si $x \in \{1, \dots, n\}$ n'est pas premier avec n alors $\gcd(x, n) > 1$. En prenant un diviseur premier de $\gcd(x, n)$, il existe un diviseur premier de n qui soit aussi diviseur de x . Comme les diviseurs premiers de n sont $p_1, \dots, p_r$, il existe $k \in \{1, \dots, r\}$ tel que p_k divise x et donc $x \in A_k$. On a donc $x \in \bigcup_{k=1}^r A_k$.

- Réciproquement si $x \in \bigcup_{k=1}^r A_k$, il existe $k \in \{1, \dots, r\}$ tel que $x \in A_k$ et donc p_k divise x . Ainsi x n'est pas premier avec n .

Par double inclusion on a montré que $B^c = \bigcup_{k=1}^r A_k$. Le complémentaire d'une union étant l'intersection des complémentaires on obtient

$$B = \bigcap_{k=1}^r A_{p_k}^c.$$

- (e) Les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ étant mutuellement indépendants, leurs complémentaires le sont aussi. On a alors

$$P(B) = P\left(\bigcap_{k=1}^r A_{p_k}^c\right) = \prod_{k=1}^r P(A_{p_k}^c) = \prod_{k=1}^r (1 - P(A_{p_k})).$$

Avec la question 1b on obtient
$$P(B) = \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

2. (a) Le théorème de Bézout affirme que pour des entiers relatifs a et b non simultanément nuls, a et b sont premiers entre eux si et seulement il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
- (b) • Soit $x \in I_n$, il existe $y \in \{1, \dots, n\}$, tel que $xy \equiv 1 [n]$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = 1 + kn$ soit $xy + (-k)n = 1$. Par le théorème de Bézout, x est premier avec n .
- Si $x \in \{1, \dots, n\}$ est premier avec n alors par le théorème de Bézout il existe des entiers u et v tels que $ux + vn = 1$. Modulo n on a alors $ux + 0 \equiv 1 \pmod{n}$. Posons $y \in \{1, \dots, n\}$ congru à u modulo n (y existe car on peut prendre le reste de la division euclidienne de u par n si celui-ci est non nul et prendre $y = n$ sinon). Par les propriétés de la relation d'équivalence modulo n on a $xy \equiv xu \equiv 1 \pmod{n}$. Ainsi x appartient à I_n .

Ainsi un élément $x \in \{1, \dots, n\}$ appartient à I_n si et seulement si il est premier avec n .

- (c) Par la question précédente I_n est l'ensemble des $x \in \{1, \dots, n\}$ qui sont premiers avec n . Dans la première partie cet ensemble avait été noté B . On a alors

$$\varphi(n) = \text{Card}(I_n) = \text{Card}(B).$$

Par équiprobabilité on a $P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$ donc $\text{Card}(B) = \text{Card}(\Omega)P(B) = \text{Card}(\{1, \dots, n\})P(B)$.

On a donc

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Problème 3

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, on rappelle qu'on note f^k le k -ième itéré de f pour la composition.

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **racine carrée** de f lorsque $u^2 = f$.

I Propriétés générales

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit u une racine carrée de f .

1. Par définition on a $u^2 = f$. Pour tout $x \in E$, par linéarité de u on a

$$(-u)^2(x) = -u(-u(x)) = u(u(x)) = u^2(x) = f(x)$$

On a donc $(-u)^2 = f$ et $-u$ est aussi une racine carrée de f .

2. On a $f = u^2$ donc

$$u \circ f = u \circ u^2 = u^3 = u^2 \circ u = f \circ u.$$

3. — Soit $x \in \ker(u)$ on a $f(x) = u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0$ donc $x \in \ker(u)$.

Ainsi on a l'inclusion $\ker(u) \subset \ker(f)$.

— Soit $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors $y = u^2(x) = u(u(x))$. Comme $u(x)$ est un antécédent de y par u , y appartient à $\text{Im}(u)$. On a donc l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(u)$.

4. — Si u est bijective, comme la composée d'applications bijectives est bijective on a $f = u^2$ qui est bijective.

— Si f est bijective alors elle est injective et surjective.

Étant injective on a $\ker(f) = \{0_E\}$. Par la question précédente on a alors $\ker(u) \subset \{0_E\}$. Cela implique que $\ker(u) = \{0_E\}$ (car $0_E \in \ker(u)$). Ainsi u est injective.

Étant surjective on a $\text{Im}(f) = E$. Par la question précédente on a alors $E \subset \text{Im}(u)$ et donc $\text{Im}(u) = E$ (car $\text{Im}(u)$ est inclus dans l'ensemble d'arrivée E de u). Ainsi u est surjective.

Étant injective et surjective, u est bijective.

On a donc bien montré que f est bijective si et seulement si u est bijective.

II Un exemple en dimension 3

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f : (x, y, z) \mapsto (-3x - 4y + 6z, 6x + 7y - 9z, 2x + 2y - 2z).$$

5. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \ker(f) &\iff f((x, y, z)) = 0 \\
&\iff \begin{cases} -3x - 4y + 6z = 0 \\ 6x + 7y - 9z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -3x - 4y + 6z = 0 \\ 6x + 7y - 9z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\
&\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 6x + 7y - 9z = 0 \\ -3x - 4y + 6z = 0 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array} \\
&\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 3z \\ x = -y + z = -2z \end{cases} \\
&\iff (x, y, z) = z(-2, 3, 1)
\end{aligned}$$

Pour $\boxed{v_1 = (-2, 3, 1)}$ on a donc $\ker(f) = \text{Vect}(v_1)$.

6. Montrons que $\text{Im}(f)$ est défini par l'équation $2x + 2y - 3z = 0$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$2(-3x - 4y + 6z) + 2(6x + 7y - 9z) - 3(2x + 2y - 2z) = (-6 + 12 - 6)x + (-8 + 14 - 6)y + (12 - 18 + 6)z = 0.$$

En conséquence $\text{Im}(f)$ est inclus dans l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $2x + 2y - 3z = 0$.

Par la question précédente on a $\ker(f) = \text{Vect}(v_1)$ où $v_1 \neq 0$. La famille (v_1) est une famille de un vecteur non nul donc elle est génératrice de l'espace qu'elle engendre. Ainsi $\dim(\ker(f)) = \dim(\text{Vect}(v_1)) = 1$. Par le théorème du rang on a $\dim(\mathbb{R}^3) = \text{rg}(f) + \dim(\ker(f))$ donc $\dim(\text{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$. Par ailleurs l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 2y - 3z = 0\}$ étant un plan de $\mathbb{R}^3$, il est de dimension 2.

Ayant une inclusion et l'égalité des dimensions finies on a

$$\boxed{\text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + 2y - 3z = 0\}}.$$

7. Les vecteurs $v_2 = (0, 3, 2)$ et $v_3 = (1, -1, 0)$ sont des solutions de l'équation $2x + 2y - 3z = 0$ donc ils appartiennent à $\text{Im}(f)$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda v_2 + \mu v_3 = 0$. On a $(\mu, 3\lambda - \mu, 2\lambda) = (0, 0, 0)$. En étudiant la première et la dernière coordonnées on obtient $\lambda = \mu = 0$. Ainsi la famille (v_2, v_3) est libre.

On rappelle qu'on avait prouvé que $\text{Im}(g)$ est de dimension 2. Étant libre et de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel, $\boxed{(v_2, v_3) \text{ est une base de } \text{Im}(f)}$.

8. D'après le théorème du rang on a

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Soit $u \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$. Comme $u \in \ker(f) = \text{Vect}(v_1)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v_1 = (-2\lambda, 3\lambda, \lambda)$. Comme $u \in \text{Im}(f)$, ses coordonnées vérifient l'équation de $\text{Im}(f)$. On a donc $2 \times (-2\lambda) + 2 \times (3\lambda) - 3\lambda = 0$

c'est-à-dire $-\lambda = 0$. On a donc $u = 0$. Cela montre que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$ donc $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont en somme directe.

En conséquence $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.

9. On a vu que (v_1) est une base de $\ker(f)$ et (v_2, v_3) une base de $\operatorname{Im}(f)$. Comme $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ par la question précédente, la famille $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $v_1 \in \ker(f)$ on a $f(v_1) = 0$ et $f(f(v_1)) = f(0) = 0$. On a $f(v_2) = f((0, 3, 2)) = (0, 3, 2) = v_2$ donc $f^2(v_2) = f(f(v_2)) = f(v_2)$. On a $f(v_3) = f((1, -1, 0)) = (1, -1, 0) = v_3$ donc $f^2(v_3) = f(f(v_3)) = f(v_3)$. Les applications linéaires f et f^2 coïncidant sur la base B on obtient que $f^2 = f$.

10. La question précédente montre que f est une racine carrée de f .

D'après la question 1, une racine carrée de f différente de f est $-f$.

Utilisons la base B pour déterminer une autre racine carrée de f . Posons g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par $g(v_1) = 0$, $g(v_2) = v_3$ et $g(v_3) = v_2$. On peut vérifier que $\forall i, g^2(v_i) = f(v_i)$. Les applications linéaires f et g^2 coïncidant sur la base B on obtient que $g^2 = f$ donc g est une racine carrée de f différente de f .

III Racines carrées et dérivation

Dans cette partie, $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $I = \operatorname{id}_E$ et d l'endomorphisme de E défini par

$$d(P) = P'.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le but de cette partie est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $d + \lambda I$ admette une racine carrée.

11. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Étant donnés $m \in \mathbb{N}$ et $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on définit l'endomorphisme

$$P(f) = \sum_{k=0}^m a_k f^k.$$

- (a) Soit $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ deux polynômes, avec $m = \max(\deg P, \deg Q)$, quitte à compléter avec des coefficients nuls. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors $\lambda P + \mu Q = \sum_{k=0}^m (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$, donc

$$\begin{aligned} (\lambda P + \mu Q)(f) &= \sum_{k=0}^m (\lambda a_k + \mu b_k) f^k \text{ par définition} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^m a_k f^k + \mu \sum_{k=0}^m b_k f^k \text{ par opérations dans l'anneau } \mathcal{L}(E) \\ &= \boxed{\lambda P(f) + \mu Q(f)}. \end{aligned}$$

- (b) Avec $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ et $Q = \sum_{j=0}^q b_j X^j$,

$$\begin{aligned} P(f) \circ Q(f) &= \left(\sum_{k=0}^m a_k f^k \right) \circ \left(\sum_{j=0}^q b_j f^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^q a_k b_j f^{k+j} \\ &= \sum_{i=0}^{m+q} \left(\sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} \right) f^i \text{ en posant } i = k + j \\ &= \boxed{(PQ)(f)} \end{aligned}$$

en reconnaissant le produit de Cauchy de P et Q .

12. Étude de d .

- (a) Soit $P \in E$.

$P \in \ker d \Leftrightarrow P' = 0 \Leftrightarrow P$ est constant. Donc $\boxed{\ker d = \mathbb{R}_0[X]}$.

$\ker d$ est de dimension 1, donc par le vénéré théorème du rang $\text{Im } d$ est de dimension $n - 1$.

Or $\forall P \in E$, $d(P) = P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a une inclusion et l'égalité des dimensions. Donc

$$\boxed{\text{Im}(d) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}.$$

- (b) Soit $P \in E$. On a $d(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par récurrence (à détailler), $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $d^k(P) \in \mathbb{R}_{n-k}[X]$.
Donc $d^n(P) \in \mathbb{R}_0[X]$ puis $d^{n+1}(P) = 0_E$.

$$\text{Ainsi } \boxed{d^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}}.$$

13. Condition nécessaire : on suppose que $d + \lambda I$ admet une racine carrée u .

- (a) Alors $u^2 = d + \lambda I$. Donc $d = u^2 - \lambda I$.

$$\text{Ainsi } d \circ u = (u^2 + \lambda I) \circ u = u^3 - u = u \circ (u^2 + \lambda I) = \boxed{u \circ d}.$$

Remarque. Plus théoriquement, d'après la question précédente, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent pour tous polynômes P, Q .

On a $d(u(1)) = u(d(1)) = u(0_E) = 0_E$. Donc $u(1) \in \ker d$. Donc $u(1) \in \mathbb{R}_0[X]$.

$$\text{Ainsi, } \boxed{\text{il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } u(1) = a}.$$

Remarque. On identifie dans la suite un polynôme constant et le réel associé.

- (b) D'une part, $u^2(1) = u(u(1)) = u(a) = au(1) = a^2$.

$$\text{D'autre part, } u^2(1) = (d + \lambda I)(1) = d(1) + \lambda \cdot 1 = \lambda.$$

$$\text{Finalement } \boxed{\lambda \geq 0}.$$

- (c) Supposons $\lambda = 0$. Alors $u^2 = d$. Or $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ (le redémontrer).

Donc $\ker(u) \subset \mathbb{R}_0[X]$. Or d n'est pas injectif donc u ne l'est pas non plus. Donc $\ker(u) = \mathbb{R}_0[X]$.

Par ailleurs $u^2(X) = u(u(X)) = d(X) = 1 \in \ker u$.

Donc $u(u^2(X)) = 0$, soit $u^3(X) = d(u(X)) = 0$, donc $u(X) \in \ker d = \mathbb{R}_0[X]$.

Finalement $u(X) \in \ker u$, donc $1 = d(X) = u(u(X)) = 0$. Absurde.

$$\text{Ceci montre par l'absurde que } \boxed{\lambda > 0}.$$

14. Réciproque : on suppose $\lambda > 0$.

- (a) $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$. D'après le théorème de Taylor-Young, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que au voisinage de 0,

$$\boxed{\sqrt{1+x} = P_n(x) + o(x^n)}.$$

- (b) Écrivons l'égalité qui précède pour tout $x \in]-1, 1[$ par exemple. Il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$.

$$\text{En élevant au carré, } 1+x = P_n^2(x) + 2P_n(x)x^n\varepsilon(x) + x^{2n}\varepsilon(x)^2 = P_n^2(x) + x^n \underbrace{(2P_n(x)\varepsilon(x) + x^n\varepsilon(x)^2)}_{h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0},$$

soit $P_n^2(x) = 1+x + o(x^n)$.

Posons $W = P_n^2 - (1+X)$. Comme $w(x) = o(x^n)$, W a 0 pour racine de multiplicité au moins $n+1$.

Ainsi il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n^2 = (1+X) + X^{n+1}Q$.

Finalement, le reste attendu est $\boxed{R_n = X + 1}$.

- (c) Avec $\boxed{g = P_n\left(\frac{1}{\lambda}d\right)}$, on a, d'après les règles de calcul de la question 11,

$$g^2 = P_n^2\left(\frac{1}{\lambda}d\right) = 1 + \frac{1}{\lambda}d + \left(\frac{1}{\lambda}d\right)^{n+1} Q\left(\frac{1}{\lambda}d\right).$$

Or $\left(\frac{1}{\lambda}d\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n+1} d^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc $\boxed{g^2 = I + \frac{1}{\lambda}d}$.

Avec, enfin, $\boxed{u = \sqrt{\lambda}g}$, possible car $\lambda > 0$, on a $u^2 = \lambda g^2 = \lambda \left(I + \frac{1}{\lambda}d\right) = \boxed{d + \lambda I}$.