

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on définit sur $[0, 1]$ la fonction f_k par

$$f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx \text{ si } x \in]0, 1] \text{ et } f_k(0) = 0.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans ce même repère, on place les points $I(1, 0)$, $J(0, 1)$ et $K(1, 1)$.

A Étude de f_0

Dans cette partie, on étudie la fonction $f_0 : x \mapsto x(\ln x)^2$.

1. Étude de la dérivée.

(a) Calculer la dérivée de f_0 sur $]0, 1]$ et montrer qu'elle peut s'écrire

$$f'_0(x) = (\ln x)(2 + \ln x).$$

(b) Déterminer le signe de $f'_0(x)$ sur $]0, 1]$.

2. Étude en 0.

(a) Calculer $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}$. En déduire $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{\sqrt{u}}$ puis $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(\ln u)^2}{u}$.

(b) En déduire la limite de f_0 en 0 et que f_0 est continue en 0.

(c) Étudier la dérivabilité en 0 de f_0 et en donner une interprétation graphique.

3. Tracé de la courbe.

(a) Établir le tableau de variations de f_0 .

(b) Tracer la courbe $\mathcal{C}_0$.

B Étude générale de f_k

4. Exprimer la dérivée de f_k sur $]0, 1]$.

5. Soit A_k le point de $\mathcal{C}_k$ d'abscisse 1. Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_k$ en A_k est la droite (OA_k) .

6. Montrer que f_k est continue en 0 et étudier sa dérivabilité en 0.

C Étude de f_1 et $f_{1/2}$

7. Étude de f_1 .

- (a) Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_0$.
- (b) Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$, $f_1'(x) = (\ln x + 1)^2$.
- (c) Établir le tableau de variations de f_1 et tracer $\mathcal{C}_1$ sur le même graphique que $\mathcal{C}_0$. On précisera le coefficient directeur de la tangente en A_1 .

8. Étude de $f_{1/2}$.

- (a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$,

$$f_{1/2}(x) = \frac{f_0(x) + f_1(x)}{2}.$$

- (b) En déduire une construction point par point de $\mathcal{C}_{1/2}$ à partir des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$. Tracer $\mathcal{C}_{1/2}$ sur le même graphique que précédemment en précisant l'équation de sa tangente en $A_{1/2}$.

D Partage équitable (mais compliqué) d'un gâteau carré

Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha \leq 1$. On note u la fonction définie sur $]0, 1]$ par

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x \quad \text{et.}$$

9. Calcul d'une intégrale. On pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 x(\ln x)^2 dx$.

- (a) Calculer la dérivée de u . En déduire $\int_{\alpha}^1 x \ln x dx$.
- (b) Montrer que

$$I(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha^2(\ln \alpha)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$

10. Calcul d'aires. On pose $S_k(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f_k(x) dx$.

- (a) Exprimer $S_k(\alpha)$ en fonction de α . En déduire la limite S_k de $S_k(\alpha)$ quand α tend vers 0.
- (b) On admet que S_k représente l'aire du domaine plan limité par les axes, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe $\mathcal{C}_k$. Expliquer le titre de cette partie.