

CHAPITRE A1

ENSEMBLES DE NOMBRES

« *Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes.* »

— Richard Dedekind

Objectifs

- Parler d'ensembles de nombres, savoir parler d'inclusion.
- Savoir manipuler des inégalités de nombres réels.
- Notion d'intervalle.
- Outils réels : valeur absolue, partie entière.
- Notion de densité.

Notations. On désigne par

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs,
- $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux,
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels,
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Proposition A1.1

On a les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1 Corps des nombres réels

Notations. On désigne par

- $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ des nombres réels, privé du nombre 0,
- $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls,
- $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls.



1.1 Relation d'ordre

Proposition A1.2

La relation $\leq$ est une **relation d'ordre** sur $\mathbb{R}$, *i.e.* une relation

- **réflexive** : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$,
- **transitive** : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$,
- **antisymétrique** : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$.

C'est une **relation d'ordre total** sur $\mathbb{R}$, *i.e.*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ ou } y \leq x).$$

Proposition A1.3

Soit $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

Somme : si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Produit :

- si $a \leq b$ et $\lambda \geq 0$, alors $\lambda a \leq \lambda b$,
- si $a \leq b$ et $\lambda \leq 0$, alors $\lambda a \geq \lambda b$,
- si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Inverse : si $a \leq b$ et a et b sont de même signe, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

☞ Exercices A1.1, A1.2, A1.5.

1.2 Intervalles

Étant donnés $a, b \in \mathbb{R}$, on définit

- des segments du type $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
- des intervalles semi-ouverts du type $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ ou $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
- des intervalles ouverts du type $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Définition A1.4

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un **intervalle de $\mathbb{R}$** lorsque pour tous $a, b \in X$, si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $a \leq x \leq b$, alors $x \in X$.

Proposition A1.5

Il y a 10 types d'intervalles de $\mathbb{R}$, à savoir, pour $a, b \in \mathbb{R}$:

- | | | | | |
|------------------|---------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. $\emptyset$, | 3. $[a, b[$, | 5. $]a, b[$, | 7. $]a, +\infty[$, | 9. $] - \infty, b[$, |
| 2. $[a, b]$, | 4. $]a, b]$, | 6. $[a, +\infty[$, | 8. $] - \infty, b]$, | 10. $\mathbb{R}$ |

Définition A1.6

Les intervalles des types 1, 5, 7, 9, 10 sont dits **ouverts**, ceux des types 1, 2, 6, 8, 10 sont dits **fermés**. Un intervalle contenant au moins deux réels distincts est appelé **intervalle véritable**.

1.3 Valeur absolue**Définition A1.7**

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x est le nombre réel $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$

Proposition A1.8

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Positivité : $|x| \geq 0$ et $(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

Opérations :

Encadrements :

- $-|x| \leq x \leq |x|$,
- $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$,
- $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$.

- $|xy| = |x||y|$,
- si $x \neq 0$, alors $\left| \frac{y}{x} \right| = \frac{|y|}{|x|}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, |x^n| = |x|^n$.

Théorème A1.9 (Inégalité triangulaire)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Dém. A1.9

- Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
 $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$ donc $x + y \leq |x| + |y|$.
 $-x \leq |x|$ et $-y \leq |y|$ donc $-(x + y) \leq |x| + |y|$.
Ces deux majorations montrent que $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- D'après la première inégalité : $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ donc $|x| - |y| \leq |x - y|$.



De même (ou en appliquant cela à y et x en guise de x et y), $|y| - |x| \leq |x - y|$, soit $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$.
On a ainsi montré $||x| - |y|| \leq |x - y|$, puis $||x| - |y|| \leq |x + y|$ en substituant y par $-y$.

☞ Exercices A1.3, A1.4, A1.6, A1.7.

2 Nombres entiers

2.1 Sous-ensembles d'entiers

Proposition A1.10

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est stable par somme, différence et produit, *i.e.*

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b \in \mathbb{Z}, a - b \in \mathbb{Z} \text{ et } ab \in \mathbb{Z}.$$

Définition A1.11

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a **divise** b , ou que a est **un diviseur** de b ou que b est **divisible** par a lorsque

$$\exists k \in \mathbb{Z}, b = ak.$$

On dit qu'un nombre entier est **pair** lorsqu'il est divisible par 2 et **impair** lorsqu'il ne l'est pas.

Notation. Soit $a \in \mathbb{Z}$. On note $a\mathbb{Z} = \{ak \mid k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des multiples de a .

Proposition A1.12

Soit $a \in \mathbb{Z}$. L'ensemble $a\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ stable par somme, différence. De plus,

$$\forall m \in a\mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, nm \in a\mathbb{Z}.$$

Notation. Soit $a, b \in \mathbb{N}$. On désigne par $\llbracket a, b \rrbracket$ l'intervalle d'entiers $\{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$.

Proposition A1.13

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq b$. L'intervalle d'entiers $\llbracket a, b \rrbracket$ contient $b - a + 1$ éléments.

Proposition A1.14

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

2.2 Partie entière

Définition A1.15 (Partie entière)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x$.

Proposition A1.16

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les deux encadrements :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Proposition A1.17

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $\lfloor x \rfloor = x$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq \lfloor x \rfloor$ si et seulement si $p \leq x$.

Proposition A1.18

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

- Propriété d'Archimède : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > x$.
- Plus précisément, il existe un unique couple $(p, r) \in \mathbb{Z} \times [0, a[$ tel que $x = pa + r$. On a alors $p = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$.

👉 Exercices A1.8, A1.9, A1.10.

3 Nombres rationnels

Définition A1.19

On dit qu'un nombre réel x est **rationnel** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$.
Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

👉 Exercices A1.11, A1.12.



3.1 Approximation décimale

Définition A1.20

On dit qu'un nombre réel x est **décimal** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{p}{10^k}$.

Proposition et définition A1.21

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$. Les nombres a_n et b_n s'appellent **approximation décimale par défaut** et **par excès** de x et vérifient

$$a_n \leq x \leq b_n.$$

3.2 Densité

Proposition A1.22

$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$, i.e. pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,

$$\exists d \in \mathbb{D}, d \in]a, b[.$$

Proposition A1.23

$\mathbb{Q}$ est stable par somme, différence, produit et inverse (sauf pour l'élément 0).

Proposition A1.24

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Méthodes

- Gérer une valeur absolue
 - en distinguant les cas,
 - en élevant au carré.
- Résoudre une équation ou une inéquation.
- Montrer qu'un nombre est irrationnel.
- Déterminer une partie entière.