

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer

1. le nombre d'entiers naturels dans l'intervalle $[0, n]$,
2. le nombre d'entiers naturels dans l'intervalle $[0, x]$,
3. le nombre d'entiers naturels impairs dans l'intervalle $[0, x]$,
4. le nombre d'entiers naturels multiples de 3 dans l'intervalle $[0, x]$,
5. le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ solutions de l'équation $a + 2b = 2024$,
6. le nombre de façons de payer 10 euros en pièces de 10 et 20 centimes,
7. le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ solutions de l'équation $2a + 3b = 2024$.

Problème 2

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que m n'est pas le carré d'un entier. Ces premières questions visent à démontrer sans outil d'arithmétique que $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$. Supposons qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{m} = \frac{p}{q}$.

1. Expliquer pourquoi on peut choisir des entiers p et q tels que q soit minimal.
2. Soit $a = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$. Après avoir justifié que $\sqrt{m} = \frac{m - a\sqrt{m}}{\sqrt{m} - a}$, montrer qu'il existe des entiers naturels r et s , avec $r < q$, tels que $\sqrt{m} = \frac{s}{r}$.
3. Conclure.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n -ième entier naturel qui n'est pas un carré d'entier. Ainsi,

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 6, \text{ etc.}$$

Le but de ce problème est d'obtenir une formule explicite pour p_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'ensemble $A_n = \{k \in \mathbb{N}^* \mid k^2 < n + k\}$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $k \in A_n \Leftrightarrow k^2 < n + k - \frac{1}{4}$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 < n + x - \frac{1}{4}$.
6. Montrer que $\frac{1}{2} + \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ et en déduire une expression de k_n , le maximum de A_n .
7. Montrer que $k_n^2 < n + k_n < (k_n + 1)^2$ et donner le nombre de carrés d'entiers non nuls strictement inférieurs à $n + k_n$.
8. En déduire une expression explicite de p_n .