

CHAPITRE A2

TRIGONOMÉTRIE

« Without trigonometry we put back the clock millennia to Standard Darkness Time and antedate the Greeks. »

— György Pólya

Objectifs

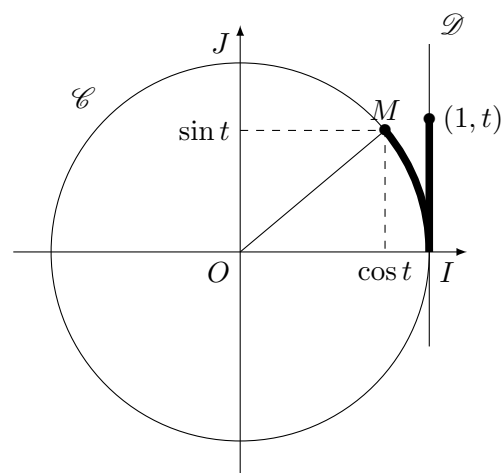
- Lignes trigonométriques.
- Formulaire.

1 Le cercle trigonométrique

Soit $t \in \mathbb{R}$. Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ étant le cercle trigonométrique, on place un point de coordonnées $(1, t)$ sur la droite $\mathcal{D}$. Puis on enroule la droite sur le cercle. Au point de coordonnées $(1, t)$ sur la droite correspondra un point M sur le cercle tel que l'arc de I à M ait pour longueur $|t|$ (éventuellement après avoir effectué plusieurs tours).

Définition A2.1

On appelle **cosinus** et **sinus** du nombre t , et on note $\cos(t)$ et $\sin(t)$, respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M .



Proposition A2.2

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $-1 \leq \cos t \leq 1$ et $-1 \leq \sin t \leq 1$.

**Définition A2.3**

On dit que deux nombres réels a et b sont **congrus modulo 2π** lorsqu'ils sont égaux, à un multiple de 2π près. On note

$$a \equiv b [2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a = b + k \times 2\pi.$$

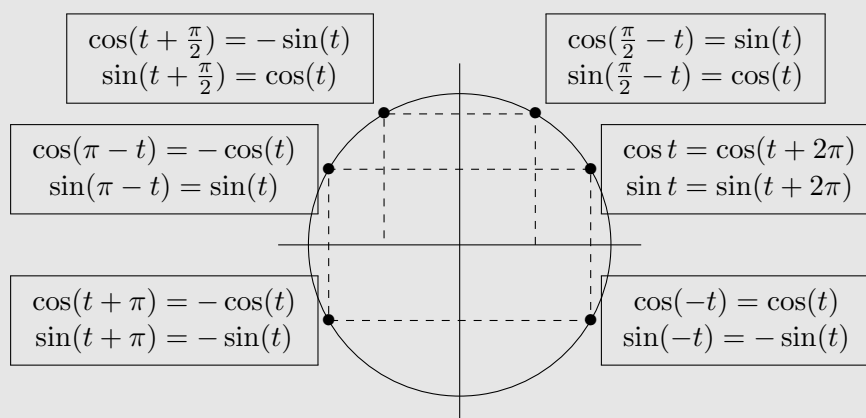
Proposition A2.4

Le nombre t est une mesure (en radians) de l'angle $\widehat{IOM}$.

2 Propriétés géométriques

Proposition A2.5

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes.

**Proposition A2.6**

On a les valeurs remarquables suivantes.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	...
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	

Proposition A2.7

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Proposition A2.8

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv b[2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv -b[2\pi] \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv b[2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv \pi - b[2\pi] \end{cases}.$$

 Exercice A2.4

3 Formules trigonométriques

Proposition A2.9

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Formules d'addition :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

(ii) Formules de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a,$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$

(iii) Formules de linéarisation :

- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2},$
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2},$
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b)),$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b)),$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b)).$

(iv) Formules de factorisation : soit $p, q \in \mathbb{R}$.

- $\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p + q}{2} \right) \cos \left(\frac{p - q}{2} \right),$
- $\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p + q}{2} \right) \sin \left(\frac{p - q}{2} \right),$
- $\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p + q}{2} \right) \cos \left(\frac{p - q}{2} \right),$
- $\sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p + q}{2} \right) \sin \left(\frac{p - q}{2} \right).$

 Exercices A2.1, A2.2, A2.3, A2.6.

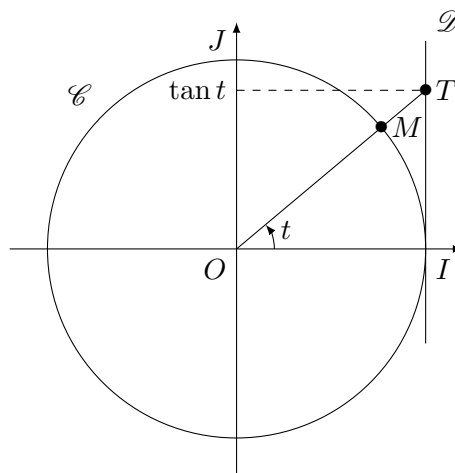
**Proposition A2.10**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls et $t \in \mathbb{R}$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $a \cos t + b \sin t = r \cos(t - \varphi)$.

4 Tangente

Définition A2.11

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. On note T le point d'intersection de (OM) avec la tangente au cercle en I . On appelle **tangente** de t l'ordonnée de T , notée $\tan t$.

**Proposition A2.12**

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$.

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Proposition A2.13

Soit $t \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$. On a

- $\tan(t + \pi) = \tan t$,
- $\tan(\pi - t) = -\tan t$.
- Valeurs remarquables :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X

Proposition A2.14

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ non congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π .

(i) Formules d'addition :

- si $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, alors $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$,
- si $a - b \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$, alors $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

(ii) Formules de duplication : si $a \not\equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$, alors $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$.

(iii) Formules de changement de variable : soit $u = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$.

- $\cos a = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$,
- $\sin a = \frac{2u}{1 + u^2}$,
- $\tan a = \frac{2u}{1 - u^2}$.

☞ A2.5, A2.7.

Méthodes

- Linéarisation et factorisation.
- Résolutions d'équations et inéquations trigonométriques.