

TD A2. Trigonométrie

Exercice A2.1

1. À quelle condition a-t-on la relation $\cos t = \sqrt{\frac{1 + \cos(2t)}{2}}$?
2. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice A2.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $] -\pi, \pi]$ les équations suivantes.

1. $\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
2. $\cos(3x) = \sin x$,
3. $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$.

Exercice A2.3

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Écrire sous forme de produit : $S = \cos x + 2 \cos(2x) + \cos(3x)$.
2. Résoudre alors l'équation $S = 0$ pour $x \in] -\pi, \pi]$.

Exercice A2.4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$,
2. $\sin x > -\frac{1}{2}$,
3. $|\sin(3x)| \leq \frac{1}{2}$.

Exercice A2.5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\sin x + \sin(2x) = 0$,
2. $\tan(2x) = 3 \tan x$,
3. $3 \tan x = 2 \cos x$.

Exercice A2.6

Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(nt)| \leq n |\sin t|$.

Exercice A2.7

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\cos(a+b) \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a.$$

2. Si $\tan a$ et $\tan b$ sont bien définis, montrer que

$$\cos(a+b) \cos(a-b) = \frac{1 - \tan^2 a \tan^2 b}{(1 + \tan^2 a)(1 + \tan^2 b)}.$$