

**Problème 1** (d'après bac S 2012)

Pour tout  $k \in \mathbb{R}$ , on définit sur  $[0, 1]$  la fonction  $f_k$  par  $f_k(x) = \begin{cases} x(\ln x)^2 + kx & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**A Étude de  $f_0$** 

1. (a)  $f_0$  est dérivable sur  $]0, 1]$  et pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,

$$f'_0(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \frac{\ln x}{x} = (\ln x)(\ln x + 2).$$

- (b)  $f'_0(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$  ou  $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = e^{-2}$

| $x$         | 0 | $e^{-2}$ | 1 |
|-------------|---|----------|---|
| $\ln x$     |   | −        | 0 |
| $\ln x + 2$ |   | −        | + |
| $f'_0(x)$   |   | +        | − |

2. (a)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$  et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{u} = +\infty$  donc par composition (changement de variable),  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} = 0$ .

Or pour tout  $u > 0$ ,  $\frac{\ln u}{\sqrt{u}} = 2 \frac{\ln(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}$  donc  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{\sqrt{u}} = 0$ .

Finalement, en élevant au carré,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(\ln u)^2}{u} = 0$ .

- (b) En posant  $u = 1/x$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  et en composant avec la limite précédente, on a  $\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = 0$ .

Comme  $f_0(x)$  tend vers  $f_0(0)$  quand  $x$  tend vers 0, on peut affirmer que  $f_0$  est continue en 0.

- (c) On calcule le taux d'accroissement de  $f_0$  en 0 : pour tout  $x > 0$ , on a  $\frac{f_0(x) - f_0(0)}{x - 0} = (\ln x)^2$ .

Donc sa limite quand  $x$  tend vers 0 est :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_0(x) - f_0(0)}{x - 0} = +\infty$ . Ce n'est pas une limite finie donc

$f_0$  n'est pas dérivable en 0,

ce qui se traduit par une demi-tangente verticale à l'origine.

3. (a)

|           |   |          |   |
|-----------|---|----------|---|
| $x$       | 0 | $e^{-2}$ | 1 |
| $f'_0(x)$ |   | + 0 -    | 0 |
| $f_0(x)$  |   |          |   |

(b) voir les trois plus loin.

## B Étude générale de $f_k$

4.  $f_k$  est dérivable sur  $]0, 1]$  et pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,

$$f'_k(x) = (\ln x)(2 + \ln x) + k.$$

5. L'équation de la tangente en  $x = 1$  à la courbe  $\mathcal{C}_k$  est  $y = f'_k(1)(x - 1) + f_k(1)$ , c'est-à-dire  $y = kx$ . On constate que les coordonnées du point  $O(0, 0)$  vérifient cette équation. Donc elle passe par  $O$ . De plus, par définition d'une tangente, elle passe par  $A_k$ .

Donc la tangente à  $\mathcal{C}_k$  en  $A_k$  est la droite  $(OA_k)$ .

6. On a déjà démontré que  $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = 0$ . Cette limite coïncide avec  $f_k(0) = 0$ .

Donc  $f_k$  est continue en 0.

Pour tout  $x > 0$ , comme  $\frac{f_k(x) - f_k(0)}{x - 0} = (\ln x)^2 + k$ , sa limite n'est pas un nombre fini, donc

$f_k$  n'est pas dérivable en 0.

## C Étude de $f_1$ et $f_{1/2}$

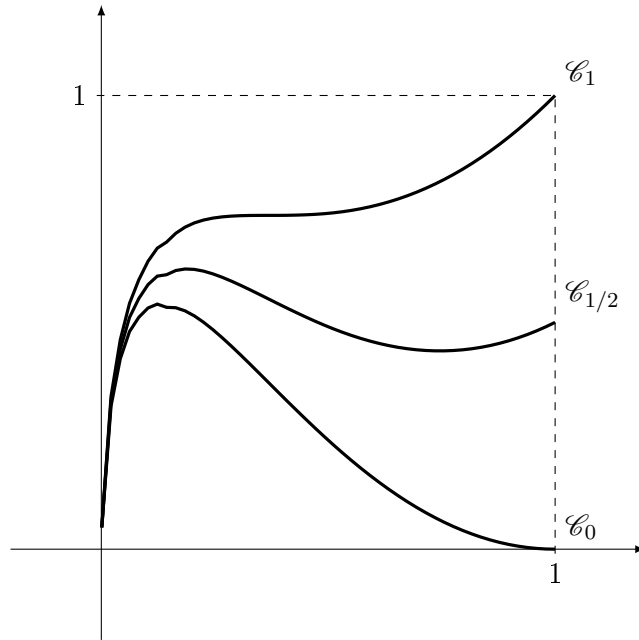
7. (a) Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $f_1(x) - f_0(x) = x$  qui est positif sur cet intervalle. Donc

la courbe  $\mathcal{C}_1$  est au-dessus de la courbe  $\mathcal{C}_0$ .

(b)  $f_1$  est dérivable sur  $]0, 1]$  et pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $f'_1(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x + 1$ . D'où  $f'_1(x) = (\ln x + 1)^2$ .

(c) Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $f'_1(x) \geq 0$  et on a  $f'_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$ .

|           |   |          |   |
|-----------|---|----------|---|
| $x$       | 0 | $e^{-1}$ | 1 |
| $f'_1(x)$ |   | + 0 +    |   |
| $f_1(x)$  |   |          |   |



8. Étude de  $f_{1/2}$ .

(a) Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,

$$\frac{f_0(x) + f_1(x)}{2} = \frac{1}{2}(2x(\ln x)^2 + x) = x(\ln x)^2 + \frac{1}{2}x.$$

Donc  $\boxed{\frac{f_0(x) + f_1(x)}{2} = f_{1/2}(x)}.$

(b) Pour tout  $x \in ]0, 1]$ , le point de  $\mathcal{C}_{1/2}$  d'abscisse  $x$  est le  $\boxed{\text{milieu des points de } \mathcal{C}_0 \text{ et } \mathcal{C}_1}$  de mêmes abscisses.

La tangente en  $A_{1/2}$  passe par  $O$  et  $A_{1/2}(1, \frac{1}{2})$  d'après la question 5. Donc c'est la droite d'équation

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x}.$$

## D Partage équitable (mais compliqué) d'un gâteau carré

Soit  $\alpha$  un nombre réel tel que  $0 < \alpha \leq 1$ . On note  $u$  et  $v$  les fonctions définies sur  $]0, 1]$  par

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2.$$

9. On pose  $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 x(\ln x)^2 dx$ .

(a)  $u$  est dérivable sur  $]0, 1]$  et pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $\boxed{u'(x) = x \ln x + \frac{x}{2}}.$

On en déduit que  $\int_{\alpha}^1 (x \ln x + \frac{x}{2}) dx = [u(x)]_{\alpha}^1$ . D'où  $\int_{\alpha}^1 x \ln x dx + \int_{\alpha}^1 \frac{x}{2} dx = -\frac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha$ .

Donc  $\int_{\alpha}^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\alpha}^1$ .

Finalement,  $\int_{\alpha}^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha - \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{4}$ .

(b) Par intégration par parties,  $\int_{\alpha}^1 x(\ln x)^2 \, dx = -\frac{1}{2}\alpha^2(\ln \alpha)^2 - \int_{\alpha}^1 x \ln x \, dx$ .

Finalement,  $\int_{\alpha}^1 x(\ln x)^2 \, dx = -\frac{1}{2}\alpha^2(\ln \alpha)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$ .

10. On pose  $S_k(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f_k(x) \, dx$ .

(a)  $S_k(\alpha) = \int_{\alpha}^1 x(\ln x)^2 \, dx + \int_{\alpha}^1 kx \, dx$ . Donc

$$S_k(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha^2(\ln \alpha)^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{k}{2} - k\frac{\alpha^2}{2}.$$

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^2 \ln \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^2(\ln \alpha)^2 = 0$  donc finalement  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_k(\alpha) = S_k = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$ .

(b) D'après ce qui précède, on a  $S_0 = \frac{1}{4}$ ,  $S_{1/2} = \frac{1}{2}$  et  $S_1 = \frac{3}{4}$ . De plus, on a montré que la courbe  $\mathcal{C}_1$  est au-dessus de la courbe  $\mathcal{C}_0$  et que la courbe  $\mathcal{C}_{1/2}$  est entre elles deux. Donc dans le carré  $O I J K$ , l'aire sous la courbe  $\mathcal{C}_0$  est  $\frac{1}{4}$ ; puis l'aire sous la courbe  $\mathcal{C}_{1/2}$  étant  $\frac{1}{2}$ , l'aire entre les courbes  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_{1/2}$  est également  $\frac{1}{4}$ ; puis l'aire sous  $\mathcal{C}_1$  étant  $\frac{3}{4}$ , l'aire entre les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_{1/2}$  est également  $\frac{1}{4}$ ; ce qui laisse une région d'aire  $\frac{1}{4}$  entre la courbe  $\mathcal{C}_1$  et le bord supérieur du carré  $O I J K$ . On a finalement montré que ces trois courbes partagent le carré en quatre régions de même aire.