

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit ABC un triangle. On note D le point d'intersection des trisectrices issues de B et de C adjacentes au côté $[BC]$. On définit de même E à partir du côté $[CA]$ et F à partir du côté $[AB]$.

Le but du problème est de démontrer que le triangle DEF est équilatéral.

On pose

$$\hat{A} = 3\alpha, \quad \hat{B} = 3\beta, \quad \hat{C} = 3\gamma.$$

A Résultats préliminaires

1. Soit XYZ un triangle. On note x , y et z les longueurs des côtés opposés respectivement aux sommets X , Y et Z . On notera aussi X , Y et Z les mesures de ces angles.

En calculant l'aire du triangle XYZ de trois manières différentes, montrer la loi des sinus :

$$\frac{x}{\sin X} = \frac{y}{\sin Y} = \frac{z}{\sin Z}.$$

2. Avec les mêmes notations, montrer que

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos Z.$$

3. Montrer que, pour tout réel x ,

$$\sin(3x) = 4 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

4. Soient $u, v, w \in]0, \pi[$ tels que $u + v + w = \pi$. Montrer que

$$\sin^2 u + \sin^2 v - 2 \sin u \sin v \cos w = \sin^2 w.$$

B Le triangle de Morley

5. Montrer que

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

6. On note K la valeur commune des trois rapports

$$\frac{BC}{\sin(3\alpha)}, \quad \frac{CA}{\sin(3\beta)}, \quad \frac{AB}{\sin(3\gamma)}.$$

En appliquant la loi des sinus dans le triangle ABF , montrer que

$$AF = 4K \sin \beta \sin \gamma \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right).$$

7. Montrer de même que

$$AE = 4K \sin \beta \sin \gamma \sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right).$$

8. Montrer que

$$\begin{aligned} FE^2 &= 16K^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \\ &\times \left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \beta \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \gamma \right) \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

9. En déduire que

$$FE = 4K \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

10. Conclure.