

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer

1. On peut établir une démonstration par récurrence de :

Il y a $n + 1$ entiers dans $[0, n]$.

Init. Dans $[0, 0] = \{0\}$, il y a un entier : 0.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il y ait $n + 1$ entiers dans $[0, n]$.

On a $[0, n + 1] = [0, n] \cup]n, n + 1]$, cette réunion étant disjointe.

Dans $[0, n]$ il y a $n + 1$ entiers par H.R.

Dans $]n, n + 1]$, il y a un seul entier : $n + 1$. (on peut détailler à nouveau par récurrence pourquoi il n'y a pas d'entier dans $]n, n + 1[$ si on veut aller au fond des choses).

Finalement il y a bien $n + 1 + 1$ entiers dans $[0, n + 1]$.

On a montré par récurrence que : il y a $n + 1$ entiers dans $[0, n]$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $p \in [0, x] \Leftrightarrow 0 \leq p \leq x \Leftrightarrow 0 \leq p \leq \lfloor x \rfloor$.

On détaille cette dernière équivalence :

$\Rightarrow$ Supposons $0 \leq p \leq x$. Comme p est un entier et $p \leq x$, on a $p \leq \lfloor x \rfloor$, d'où $0 \leq p \leq \lfloor x \rfloor$.

$\Leftarrow$ Supposons $0 \leq p \leq \lfloor x \rfloor$. $\lfloor x \rfloor \leq x$, on a $0 \leq p \leq x$.

Ceci montre que les entiers de $[0, x]$ sont les entiers de $[0, \lfloor x \rfloor]$.

D'après la première question, il y a $\lfloor x \rfloor + 1$ entiers dans $[0, x]$.

3. Soit p est un entier naturel impair. Alors $\exists k \in \mathbb{N}, p = 2k + 1$.

- Si $p \in [0, x]$, alors $0 \leq p \leq x$.

D'où $0 \leq 2k + 1 \leq x$, i.e. $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{x-1}{2}$, soit encore $0 \leq k \leq \frac{x-1}{2}$ car k est entier.

- Réciproquement, si $k \in \left[0, \frac{x-1}{2}\right]$, alors $2k + 1$ est un entier impair de $[0, x]$.

Il y a donc autant d'entiers impairs dans l'intervalle $[0, x]$ que d'entiers dans $\left[0, \frac{x-1}{2}\right]$. D'après la

question précédente, il y a $\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor + 1$ entiers naturels impairs dans l'intervalle $[0, x]$.

4. On refait le même raisonnement qu'en question 2 avec $3k$ au lieu de $2k + 1$ et on obtient

$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 1$ multiples de 3 dans l'intervalle $[0, x]$.

5. $a + 2b = 2024 \Leftrightarrow a = 2024 - 2b$.

(a, b) est solution de l'équation si et seulement si $b \in \mathbb{N}$ et $2024 - 2b \in \mathbb{N}$, i.e. $2b \in [0, 2024]$, i.e. $b \in [0, 1012]$.

D'après la question 1, il y a 1013 couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ solutions de l'équation $a + 2b = 2024$.

6. On cherche le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $10a + 20b = 1000$ (10 euros c'est 1000 centimes), soit $a + 2b = 100$. On est ramené à la question précédente avec 100 à la place de 2024. Le même raisonnement donne $\boxed{51 \text{ façons de payer 10 euros en pièces de 10 et 20 centimes}}$. **Remarque.** On pouvait donner un résultat général : $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ couples solutions de $a + 2b = n$.
7. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On a $2a + 3b = 2024 \Leftrightarrow a = \frac{2024 - 3b}{2}$. Donc on a un couple solution si et seulement si $2024 - 3b \in 2\mathbb{N}$, i.e. $2024 - 3b \geq 0$ et $2024 - b \in 2\mathbb{N}$ (car $2b$ est pair). Cela équivaut à avoir $3b \leq 2024$, i.e. $b \in [0, 674]$ et pair, ce qui donne $\boxed{338 \text{ solutions}}$. **Remarque.** On pourrait poser la question plus générale avec $n \in \mathbb{N}$ au lieu de 2024. Après une petite disjonction de cas, le nombre de solutions est $\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 1$ si n est pair et $\left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor + 1$ si n est impair.

Problème 2

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que m n'est pas le carré d'un entier. Supposons qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{m} = \frac{p}{q}$.

1. Considérons l'ensemble des dénominateurs possibles $D = \{q \in \mathbb{N}^* \mid \exists p \in \mathbb{N}^*, \sqrt{m} = \frac{p}{q}\}$. Par hypothèse, D est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, donc elle admet un plus petit élément. On peut donc choisir p et q tels que $\sqrt{m} = \frac{p}{q}$ et q soit minimal.

2. Comme m n'est pas un carré, $\sqrt{m} \neq a$, donc $\frac{m - a\sqrt{m}}{\sqrt{m} - a} = \frac{\sqrt{m}(\sqrt{m} - a)}{\sqrt{m} - a} = \boxed{\sqrt{m}}$.

D'autre part, $a = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$ donne $a < \sqrt{m} < a + 1$. Ainsi $0 < p - aq < q$. Posons $r = p - aq$; alors $r \in \mathbb{N}^*$ et $r < q$.

En remplaçant $\sqrt{m}$ par $\frac{p}{q}$, on obtient $\sqrt{m} = \frac{mq - ap}{p - aq} = \frac{mq - ap}{r}$. Avec $s = mq - ap = r\sqrt{m} > 0$, on a bien

$$\boxed{s \in \mathbb{N}^*, 0 < r < q \text{ et } \sqrt{m} = \frac{s}{r}.$$

3. La question précédente fournit une écriture de $\sqrt{m}$ comme quotient de deux entiers naturels non nuls dont le dénominateur r est strictement inférieur à q . Ceci contredit la minimalité de q . On a donc montré par l'absurde que

$$\boxed{\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n -ième entier naturel qui n'est pas un carré d'entier.

Soit $A_n = \{k \in \mathbb{N}^* \mid k^2 < n + k\}$.

4. $\Rightarrow$ Supposons $k \in A_n$.

Ainsi $k^2 < n + k$. Les nombres k^2 et $n + k$ étant entiers, k^2

leq $sn + k - 1$ et donc $k^2 < n + k - \frac{1}{4}$ par transitivité.

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons $k^2 < n + k - \frac{1}{4}$. Alors $k^2 < n + k$ (par transitivité). Donc $k \in A_n$.

On a donc montré

$$\boxed{k \in A_n \Leftrightarrow k^2 < n + k - \frac{1}{4}.$$

5. On a $x^2 < n + x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} < n \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < n \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| < \sqrt{n} \Leftrightarrow -\sqrt{n} < x - \frac{1}{2} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \sqrt{n} < x < \frac{1}{2} + \sqrt{n}$.

Ainsi les solutions sont $\left] \frac{1}{2} - \sqrt{n}, \frac{1}{2} + \sqrt{n} \right[$.

6. • 1^{er} cas : si n est un carré, alors $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ et $\frac{1}{2} + \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$.
 • 2^e cas : si n n'est pas un carré, la première partie donne $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
 Si $\frac{1}{2} + \sqrt{n}$ était entier, alors $\sqrt{n} = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{n}\right) - \frac{1}{2}$ serait rationnel, ce qui est faux.

Ainsi, dans tous les cas,

$$\frac{1}{2} + \sqrt{n} \notin \mathbb{N}.$$

D'après ce qui précède, $A_n = \left] \frac{1}{2} - \sqrt{n}, \frac{1}{2} + \sqrt{n} \right[\cap \mathbb{N}^*$, i.e. les entiers positifs de $\left] \frac{1}{2} - \sqrt{n}, \frac{1}{2} + \sqrt{n} \right[$.

Comme $n \geq 1$, $\frac{1}{2} - \sqrt{n} < 1 < \frac{1}{2} + \sqrt{n}$. Donc A_n est non vide (il contient 1) et majoré par $\frac{1}{2} + \sqrt{n}$, donc il a un plus grand élément.

Comme $\frac{1}{2} + \sqrt{n}$ n'est pas entier, le plus grand entier qui lui est strictement inférieur est sa partie entière. Ainsi,

$$k_n = \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n} \right\rfloor.$$

7. Comme $k_n \in A_n$, on a $k_n^2 < n + k_n$.
 Par maximalité de k_n , $k_n + 1 \notin A_n$, donc $(k_n + 1)^2 \geq n + k_n + 1 > n + k_n$. Ainsi,

$$k_n^2 < n + k_n < (k_n + 1)^2.$$

Les carrés d'entiers non nuls strictement inférieurs à $n + k_n$ sont donc exactement $1^2, 2^2, \dots, k_n^2$.

$$\text{Il y en a } k_n.$$

8. Parmi les $n + k_n - 1$ entiers naturels non nuls strictement inférieurs à $n + k_n$, il y a exactement k_n carrés. Il y a donc $(n + k_n - 1) - k_n = n - 1$ entiers qui ne sont pas des carrés.
 D'après la question précédente, $n + k_n$ est strictement compris entre deux carrés consécutifs, donc n'est lui-même pas un carré. Il est ainsi le n -ième entier naturel qui n'est pas un carré, donc $p_n = n + k_n$.
 Finalement,

$$p_n = n + \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n} \right\rfloor.$$