

CHAPITRE A3

CALCULS ALGÈBRIQUES

« Celui-ci demanda qu'on lui donnât le nombre de grains de blé que produiroit le nombre des cases de l'échiquier, un seul pour la première, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite, en doublant toujours jusqu'à la soixante-quatrième. »

— Louis de Jaucourt, « Échecs », *Encyclopédie*, 1755

« ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla. »

— Dante, *Paradis*

Objectifs

- Notations et manipulations de sommes et produits.
- Sommes et produits usuels.
- Coefficients binomiaux.
- Formalisme des sommes doubles.

1 Sommes et produits

1.1 Notations et règles de calcul

Par souci de généralité, les notations et résultats de ce chapitre sont énoncés avec des nombres complexes, mais les exemples développés se limiteront aux calculs réels.

Notations. Étant donné une famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres (réels ou complexes) indexée par un ensemble fini I , on note $\sum_{i \in I} a_i$ leur somme et $\prod_{i \in I} a_i$ leur produit.

En particulier si $I = \llbracket n, p \rrbracket$ avec n, p des entiers, on note

$$\sum_{n \leq i \leq p} a_i = \sum_{i=n}^p a_i = a_n + a_{n+1} + \dots + a_p \quad \text{et} \quad \prod_{n \leq i \leq p} a_i = \prod_{i=n}^p a_i = a_n \times a_{n+1} \times \dots \times a_p.$$



Parfois l'ensemble d'indices sera noté, par souci de concision ou de clarté, de manière descriptive plutôt qu'ensembliste. Ainsi,

$$\sum_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \cap 2\mathbb{Z}} a_i = \sum_{\substack{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ i \text{ pair}}} a_i = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^n a_i = a_0 + a_2 + a_4 + \dots$$

Proposition A3.1

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de nombres complexes. Soit J et K deux parties disjointes de I (i.e. $J \cap K = \emptyset$). On a

$$\sum_{i \in J \cup K} a_i = \sum_{i \in J} a_i + \sum_{i \in K} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in J \cup K} a_i = \left(\prod_{i \in J} a_i \right) \left(\prod_{i \in K} a_i \right).$$

Soit λ une constante. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda a_i &= \lambda \sum_{i \in I} a_i, & \prod_{i \in I} a_i^\lambda &= \left(\prod_{i \in I} a_i \right)^\lambda, \\ \sum_{i \in I} a_i + b_i &= \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i, & \prod_{i \in I} a_i b_i &= \prod_{i \in I} a_i \times \prod_{i \in I} b_i, \\ \sum_{i \in I} \lambda &= p\lambda, & \prod_{i \in I} \lambda &= \lambda^p, \end{aligned}$$

où p est le nombre d'éléments de I .

Corollaire A3.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de nombres réels ou complexes, et $1 \leq m \leq n$ un entier.

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^m a_i \times \prod_{i=m+1}^n a_i.$$

Remarque. Par convention, une somme vide vaut 0 et un produit vide vaut 1.

☞ Exercices A3.1, A3.2, A3.10.

1.2 Sommes et méthodes usuelles

Proposition A3.3 (Changement d'indice)

Par translation : soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de nombres et $n, p \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{i=p+1}^{p+n} a_i = \sum_{k=1}^n a_{p+k} \quad \text{et} \quad \prod_{i=p+1}^{p+n} a_i = \prod_{k=1}^n a_{p+k}.$$

Par changement d'ordre : soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de nombres et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{k=1}^n a_{n+1-k} & \text{et} & \quad \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{k=1}^n a_{n+1-k}, \\ \sum_{i=0}^n a_i &= \sum_{k=0}^n a_{n-k} & \text{et} & \quad \prod_{i=0}^n a_i = \prod_{k=0}^n a_{n-k}. \end{aligned}$$

Théorème A3.4 (Somme télescopique)

Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de nombres et $p \leq n$ deux entiers. On a

$$\sum_{i=p}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_p$$

📖 Exercices A3.4, A3.5, A3.6.

Théorème A3.5 (Progression arithmétique)

Soient $(u_k)_k$ une suite arithmétique de raison r et $m, n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=m}^n u_k = (n - m + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}.$$

Théorème A3.6 (Progression géométrique)

Soient $(v_k)_k$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=m}^n v_k = \frac{v_m - v_{n+1}}{1 - q} = v_m \times \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}.$$

**Proposition A3.7**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

☞ Exercices A3.3, A3.7.

Théorème A3.8 (Formule de Bernoulli)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

2 Coefficients binomiaux

Définition A3.9

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle** de n le nombre entier noté $n!$ et défini par

$$n! = \prod_{k=1}^n k.$$

Remarques.

- La convention $0! = 1$ est cohérente avec celle du produit vide.
- On peut aussi la définir par récurrence par $0! = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$.

☞ Exercice A3.9

Définition A3.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit le **coefficient binomial** « p parmi n » par

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Remarque. On peut les définir plus généralement en posant $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > n$.

Proposition A3.11

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. $\binom{n}{1} = n$.
3. Symétrie : $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
4. Formule de Pascal :

$$\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Proposition A3.12 (Formule du binôme)

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

🔗 Exercices A3.11, A3.12, A3.13.

3 Sommes doubles

Notations. Étant donné deux ensembles finis I et J , une famille d'éléments indexée par I et J se note $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ ou $(a_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$. La somme de ces éléments est notée

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} \quad \text{ou} \quad \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_{ij}.$$

Remarque. Dans le cas particulier où $I = \llbracket m, n \rrbracket$ et $J = \llbracket p, q \rrbracket$ sont des ensembles d'entiers successifs, on note la somme

$$\sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{ij}.$$

Théorème A3.13 (Indexation sur un rectangle)

Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ et $(a_{ij})_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}}$ une famille de nombres complexes. Alors

$$\sum_{\substack{m \leq i \leq n \\ p \leq j \leq q}} a_{ij} = \sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q a_{ij} = \sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n a_{ij}.$$


Théorème A3.14 (Indexation sur un triangle)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $(a_{ij})_{m \leq i \leq j \leq n}$ une famille de nombres complexes indexée par le triangle $\{(i, j) \mid m \leq i \leq j \leq n\}$. Alors

$$\sum_{m \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=m}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=m}^n \sum_{i=m}^j a_{ij}.$$

☞ Exercices A3.14, A3.15, A3.16.

Méthodes

- Démonstration par récurrence.
- Calculer une somme ou un produit télescopique.
- Translater ou inverser une indexation.
- Séparation d'une somme selon une partition :
 - extraire un terme,
 - séparer les termes pairs et impairs.
- Intversion de sommes/produits doubles.