

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1 Questions indépendantes

1. Soit (u_n) une suite de nombres définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$.
2. Soit N un entier supérieur ou égal à 1.

(a) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

(b) En déduire $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}$.

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On rappelle que, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } x < y \\ y & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} 2^{\min(i, j)}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période n . Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} f(x+k)$. Montrer que g est 1-périodique.

Problème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n > 0$.
(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq 1$.

Les résultats précédents montrent que la suite (S_n) est croissante et majorée par 1. On peut en déduire qu'elle est convergente (théorème admis pour l'instant) ; la suite du problème vise à déterminer sa limite.

2. (a) Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
(b) En appliquant cette inégalité à $x = \frac{1}{n}$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
(c) À l'aide d'une autre évaluation judicieuse, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$.
(d) En déduire que $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leq \frac{1}{n+k} \leq \ln(n+k) - \ln(n+k-1)$.
3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq S_n \leq \ln(2)$.
(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$.
(c) En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.