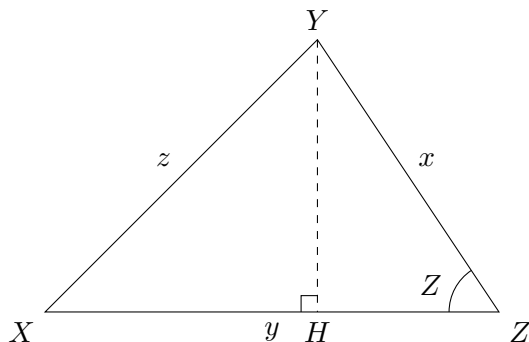


Problème 1**A Résultats préliminaires**

1. Notons $\mathcal{A}$ l'aire du triangle XYZ . On a $YH = x \sin Z = z \sin X$. Donc

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}yz \sin X = \frac{1}{2}xy \sin Z.$$

De même, $\mathcal{A} = \frac{1}{2}xz \sin Y$.

En divisant par $\frac{1}{2}xyz$, on obtient

$$\frac{\sin X}{x} = \frac{\sin Y}{y} = \frac{\sin Z}{z},$$

soit

$$\boxed{\frac{x}{\sin X} = \frac{y}{\sin Y} = \frac{z}{\sin Z}}.$$

2. Grâce à l'angle droit formé par la hauteur issue de Y sur la droite (XZ) , le théorème de Pythagore permet d'écrire

$$z^2 = XH^2 + HY^2 = (y - x \cos Z)^2 + x^2 \sin^2 Z.$$

Ainsi

$$z^2 = y^2 - 2xy \cos Z + x^2(\cos^2 Z + \sin^2 Z),$$

d'où

$$\boxed{z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos Z}.$$

3. On a

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\cos(2x) - \cos(2\pi/3)}{2}.$$

Comme $\cos(2\pi/3) = -\frac{1}{2}$,

$$4 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2 \sin x \left(\cos(2x) + \frac{1}{2}\right).$$

Or

$$2 \sin x \cos(2x) = \sin(3x) - \sin x.$$

Par conséquent

$$\boxed{\sin(3x) = 4 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}.$$

4. Comme $u + v + w = \pi$, on a

$$\sin w = \sin(u + v).$$

Ainsi

$$\sin^2 w = (\sin u \cos v + \cos u \sin v)^2.$$

D'autre part,

$$\cos w = -\cos(u + v) = \sin u \sin v - \cos u \cos v.$$

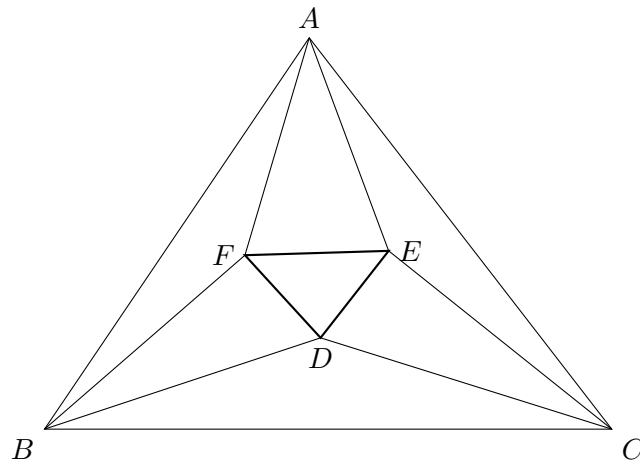
Donc

$$\begin{aligned} & \sin^2 u + \sin^2 v - 2 \sin u \sin v \cos w \\ &= \sin^2 u + \sin^2 v - 2 \sin^2 u \sin^2 v + 2 \sin u \sin v \cos u \cos v \\ &= \sin^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + 2 \sin u \sin v \cos u \cos v \\ &= \sin^2(u + v) = \sin^2 w. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\sin^2 u + \sin^2 v - 2 \sin u \sin v \cos w = \sin^2 w}.$$

B Le triangle de Morley



5. La somme des angles du triangle ABC donne

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi,$$

donc

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}}.$$

6. Dans le triangle ABF , on a

$$\widehat{BAF} = \alpha, \quad \widehat{ABF} = \beta.$$

Par conséquent,

$$\widehat{AFB} = \pi - \alpha - \beta = \frac{2\pi}{3} + \gamma.$$

La loi des sinus donne

$$\frac{AF}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(2\pi/3 + \gamma)}.$$

Or

$$AB = K \sin(3\gamma)$$

et

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \gamma\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right).$$

Ainsi

$$AF = K \sin \beta \frac{\sin(3\gamma)}{\sin(\pi/3 - \gamma)}.$$

La question 3 donne finalement

$$\boxed{AF = 4K \sin \beta \sin \gamma \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)}.$$

7. De même, dans le triangle ACE ,

$$\widehat{CAE} = \alpha, \quad \widehat{ACE} = \gamma,$$

donc

$$\widehat{AEC} = \frac{2\pi}{3} + \beta.$$

La loi des sinus donne

$$\frac{AE}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin(2\pi/3 + \beta)}.$$

Comme

$$AC = K \sin(3\beta),$$

on obtient

$$\boxed{AE = 4K \sin \beta \sin \gamma \sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)}.$$

8. Les deux trisectrices issues de A délimitent un angle α , donc

$$\widehat{EAF} = \alpha.$$

La question 2 appliquée au triangle AEF donne

$$FE^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cos \alpha.$$

En utilisant les deux résultats précédents,

$$\begin{aligned} FE^2 &= 16K^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \\ &\times \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \cos \alpha \right]. \end{aligned}$$

9. Posons $u = \frac{\pi}{3} + \beta$, $v = \frac{\pi}{3} + \gamma$, $w = \alpha$. D'après la question 5,

$$u + v + w = \frac{2\pi}{3} + \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

La question 4 donne donc

$$\begin{aligned} & \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \\ & - 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Ainsi $FE^2 = 16K^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$. Tous les termes étant positifs,

$$\boxed{FE = 4K \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

10. Par permutation circulaire des rôles de A , B et C , on obtient également

$$DE = 4K \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \text{ et } DF = 4K \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Par conséquent $DE = DF = EF$. Ainsi,

$$\boxed{\text{le triangle } DEF \text{ est équilatéral}}.$$