

Les résultats devront être **encadrés**.

Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

1. (a) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer sous forme factorisée $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{2j+1}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|\cos(x)| = \frac{1}{2}$.
4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin^3(x)$ et $\sin(x)$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^{k+1}}\right)$.

Problème 2

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Le but de ce problème est de déterminer de plusieurs manières différentes la somme $\sum_{k=1}^n kx^k$.

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

L'objet du problème étant de retrouver ce résultat de différentes manières, il est bien sûr interdit de l'utiliser tel quel dans les questions ultérieures.

2. On définit sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ la fonction $h : x \mapsto \sum_{k=1}^n x^k$.
 (a) Calculer $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 (b) Donner deux expressions de la dérivée de h , l'une avec une somme, l'autre à l'aide de la question 2a.
 (c) En déduire $\sum_{k=1}^n kx^k$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k$.
 (a) À l'aide du changement d'indice $i = k - 1$, exprimer $S_{n+1}(x)$ en fonction de $S_n(x)$.

(b) En exprimant $S_{n+1}(x)$ d'une autre manière, montrer que

$$S_n(x) + (n+1)x^{n+1} = xS_n(x) + \frac{x - x^{n+2}}{1-x}.$$

(c) En déduire une expression de $S_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. (a) Montrer que $(1-x)^2 kx^k = \left[(k-1)x^k - kx^{k+1} \right] + \left[(k+1)x^{k+2} - kx^{k+1} \right] + \left[x^k - x^{k+2} \right].$

(b) En déduire une expression de $(1-x)^2 \sum_{k=1}^n kx^k$ puis conclure.

5. Étant données deux suites (a_n) et (b_n) , on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. On pose par convention $A_{-1} = 0$.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer a_k en fonction de A_k et A_{k-1} .

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1}$.

(c) Sans mener le calcul complet, avec quel choix de valeurs a_k et b_k pensez-vous qu'il soit possible de retrouver d'une nouvelle manière la somme $\sum_{k=1}^n kx^k$?

Problème 3

Pour tout réel $x > 1$, on note $E_x = \{ \lfloor nx \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^* \}$. On dit que E_a et E_b forment une **partition** de $\mathbb{N}^*$ si tout entier naturel non nul appartient à exactement l'un de ces deux ensembles.

L'objectif du problème est de démontrer le théorème de Beatty : pour $a, b > 1$, les ensembles E_a et E_b forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si a et b sont irrationnels et vérifient $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

A Compter les éléments de E_x

Soient $x > 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note $c_x(m)$ le nombre d'éléments de E_x inférieurs ou égaux à m .

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor (n+1)x \rfloor > \lfloor nx \rfloor$. Ceci montre que $c_x(m)$ est aussi le nombre d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\lfloor nx \rfloor \leq m$ (ce qui sera admis pour la suite).
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor nx \rfloor \leq m$ si et seulement si $n < \frac{m+1}{x}$.
- En déduire que $\frac{m+1}{x} - 1 \leq c_x(m) < \frac{m+1}{x}$. En déduire $c_x(m)$ quand x est irrationnel ?

B Une condition nécessaire

On suppose dans cette partie que E_a et E_b forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

- Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $c_a(m) + c_b(m) = m$.
- En posant $\delta = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\frac{m}{m+1} < \delta \leq \frac{m+2}{m+1}$.
- Montrer que $\delta = 1$. On pourra procéder par l'absurde et examiner successivement les hypothèses $\delta > 1$ et $\delta < 1$.

7. Montrer que $\frac{a}{b}$ est irrationnel.
8. En utilisant $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, en déduire que a et b sont irrationnels.

C La réciproque

On suppose désormais que a et b sont irrationnels et que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

9. Supposons qu'un entier m appartienne à E_a et à E_b . Justifier qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $m < pa < m + 1$ et $m < qb < m + 1$. Conclure.
10. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les deux nombres $\frac{m+1}{a}$ et $\frac{m+1}{b}$ ne sont pas des entiers. En déduire que $\left\lfloor \frac{m+1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+1}{b} \right\rfloor = m$.
11. En déduire que $c_a(m) + c_b(m) = m$. Expliquer pourquoi, avec la question 9, cette égalité prouve que $E_a \cup E_b = \mathbb{N}^*$.

D Application

On note $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

12. Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$, puis montrer que $\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = 1$.
13. En déduire que les ensembles $\{\lfloor n\varphi \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{\lfloor n\varphi^2 \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

Problème 4

On considère dans tout ce problème la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Étudier la parité de la fonction f , et vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.
3. Dresser le tableau de variations complet de f .
4. Tracer une allure de la courbe représentative de f , en ajoutant au graphique la droite d'équation $y = x$ et la tangente à la courbe en son point d'abscisse 1.
5. Soit $x > 0$.
 - (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x^{n+1}) = f(x)f(x^n) - f(x^{n-1})$.
 - (b) On suppose que $f(x) \in \mathbb{Z}$. Montrer à l'aide de la question précédente que $f(x^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on risque d'avoir besoin d'une récurrence un peu particulière pour s'en sortir rigoureusement ici).
6. Soit p un entier supérieur ou égal à 2.
 - (a) Montrer qu'il existe un unique réel $x_p \in]0, 1]$ et un unique réel $y_p \in [1, +\infty[$ tels que $f(x_p) = f(y_p) = p$ (sans chercher à les calculer pour l'instant).
 - (b) Calculer x_2 et x_3 .

- (c) Justifier que $y_p = \frac{1}{x_p}$.
 - (d) Expliquer pourquoi la suite (x_p) est décroissante. Est-elle convergente ? Quelle est la monotonie de la suite (y_p) ?
 - (e) Que vaut $x_p + y_p$? En déduire les limites des deux suites (x_p) et (y_p) .
 - (f) Résoudre l'équation $f(x) = p$ et en déduire les valeurs explicites de x_p et y_p .
7. Soit $p \geq 2$ un entier naturel, et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un entier $q \geq 2$ tel que $\left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}\right)^n = \frac{q - \sqrt{q^2 - 4}}{2}$. Préciser l'entier q . Donner la valeur de q quand $p = 4$ et $n = 5$.