

Problème 1

1. (a) Les formules d'addition donnent

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \text{ et } \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

En soustrayant, on obtient $\boxed{\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))}$.

- (b) D'après la question précédente, pour tout $k \geq 1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) \right)$.

La somme est télescopique, d'où $\boxed{\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) - 1 \right)}$. Cette formule vaut aussi pour $n = 0$: ses deux membres sont alors nuls.

2. En échangeant l'ordre des sommations, puis en utilisant la formule de la somme des carrés, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{2j+1} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i^2}{2j+1} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j+1} \sum_{i=1}^j i^2 \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n j(j+1). \end{aligned}$$

Or $\sum_{j=1}^n j(j+1) = \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Ainsi $\boxed{\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i^2}{2j+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{18}}$.

3. L'équation équivaut à $\cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$. En réunissant les solutions de ces deux équations, on

obtient $\boxed{S = \left\{ k\pi + \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ k\pi - \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$.

4. (a) En utilisant les formules d'addition et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, on trouve

$$\sin(3x) = \sin(2x) \cos x + \cos(2x) \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x.$$

Par conséquent, $\boxed{\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x}$.

- (b) La question précédente donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^{k+1}}\right) = \frac{1}{4} \left(3^{k+1} \sin\left(\frac{\pi}{3^{k+1}}\right) - 3^k \sin\left(\frac{\pi}{3^k}\right) \right).$$

La somme est télescopique et $\sin \pi = 0$, donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\pi}{3^{k+1}}\right) = \frac{3^n}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right)}$.

Problème 2

1. On note $\mathcal{P}_n$ la propriété recherchée.

Init. $\sum_{k=1}^1 kx^k = x.$

D'autre part, $x - 2x^2 + x^3 = x(1 - 2x + x^2) = x(1 - x)^2.$

Donc $\frac{x - 2x^2 + x^3}{(1 - x)^2} = x$, ce qui montre $\boxed{\mathcal{P}_1}$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \sum_{k=1}^n kx^k + (n+1)x^{n+1} = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1} \text{ d'après l'H.R.}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2} + (1-2x+x^2)(n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Après développement et simplification du numérateur, on trouve bien :

$$\sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \frac{x - (n+2)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$$

et donc $\boxed{\mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie}}.$

2. On définit sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ la fonction $h : x \mapsto \sum_{k=1}^n x^k$.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\boxed{h(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}}.$

(b) • En dérivant la somme terme à terme, on a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\boxed{h'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}}.$

• En dérivant l'expression de la question précédente, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$h'(x) = \frac{(1 - (n+1)x^n)(1 - x) + x - x^{n+1}}{(1 - x)^2} = \frac{1 - x - (n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + x - x^{n+1}}{(1 - x)^2}.$$

D'où $\boxed{h'(x) = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}}.$

(c) Donc $\sum_{k=1}^n kx^k = x \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = xh'(x) = x \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}.$

Donc $\boxed{\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x)^2}}.$

3. Pour $n \geq 1$, on note $S_n(x) = \sum_{k=0}^n kx^k$ et on se propose de retrouver le résultat précédent.

(a) • $S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} kx^k = \boxed{S_n(x) + (n+1)x^{n+1}}.$

$$\bullet S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} kx^k = \sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \sum_{j=0}^n (j+1)x^{j+1} \text{ en posant } j = k-1.$$

$$\text{Donc } S_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^n jx^{j+1} + \sum_{j=0}^n x^{j+1} = x \sum_{j=0}^n jx^j + \frac{x - x^{n+2}}{1-x} = \boxed{xS_n(x) + \frac{x - x^{n+2}}{1-x}}.$$

$$(b) \text{ Donc pour tout } n \in \mathbb{N}, S_n(x) + (n+1)x^{n+1} = xS_n(x) + \frac{x - x^{n+2}}{1-x}.$$

$$\text{D'où } (1-x)S_n(x) = \frac{x - x^{n+2}}{1-x} - (n+1)x^{n+1} = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{1-x}.$$

$$\text{Finalement, } \boxed{S_n(x) = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}}.$$

4. (a) Après développement :

$$\left[(k-1)x^k - kx^{k+1} \right] + \left[(k+1)x^{k+2} - kx^{k+1} \right] + \left[x^k - x^{k+2} \right] = kx^k - 2kx^{k+1} + kx^{k+2}.$$

Cela donne $kx^k(1-2x+x^2)$, soit le $\boxed{(1-x)^2 kx^k}$ attendu.

(b) On calcule alors trois sommes télescopiques :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[(k-1)x^k - kx^{k+1} \right] &= -nx^{n+1}; \\ \sum_{k=1}^n \left[(k+1)x^{k+2} - kx^{k+1} \right] &= (n+1)x^{n+2} - x^2 \\ \text{et } \sum_{k=1}^n \left[x^k - x^{k+2} \right] &= x + x^2 - x^{n+1} - x^{n+2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } (1-x)^2 \sum_{k=1}^n kx^k = x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2} \text{ et donc } \boxed{\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}}.$$

5. Soit deux suites (a_n) et (b_n) . On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ et par convention $A_{-1} = 0$.

$$(a) \text{ Pour tout } k \in \mathbb{N}, \boxed{a_k = A_k - A_{k-1}}.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n a_k B_k = \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1}) B_k = \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^n A_{k-1} B_k$. On fait le changement d'indice $k \mapsto k+1$ dans la deuxième somme, en excluant le cas -1 ($A_{-1} = 0$).

$$\sum_{k=0}^n a_k B_k = \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} = A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) = \boxed{A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1}}.$$

(c) Cette transformation, appelée **transformation d'Abel**, permet de retrouver notre résultat en l'appliquant avec $\boxed{a_k = x^k \text{ et } b_k = 1}$ pour tout k . Ainsi, on a notamment $B_k = k$.

Niels Henrik Abel était un grand génie scandinave des mathématiques, né et mort au début du XIX^e siècle, à l'instar d'Évariste Galois en France, bien que leurs travaux fussent essentiellement indépendants. En 26 années de vie, Niels Abel a laissé des avancées majeures dans des domaines aussi bien algébriques (résolution d'équations polynomiales) qu'analytiques (suites et séries, intégrales). Hélas il n'a été reconnu qu'à titre posthume, notamment à cause de tentatives infructueuses pour se mettre en relation avec les grands mathématiciens de l'époque, comme Legendre ou Cauchy. Mais nous lui rendons (modestement) hommage ici et nous promettons de le retrouver bientôt.

Problème 3

- Comme $x > 1$, on a $(n+1)x > nx + 1$, d'où $\lfloor (n+1)x \rfloor \geq \lfloor nx \rfloor + 1$. Les termes $\lfloor nx \rfloor$ sont donc deux à deux distincts et $c_x(m) = \text{Card}\{n \in \mathbb{N}^* \mid \lfloor nx \rfloor \leq m\}$.
- $\Rightarrow$ Supposons $\lfloor nx \rfloor \leq m$. Alors $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq m$ donc $nx < m + 1$ et comme $x > 0$, $n < \frac{m+1}{x}$.
 $\Leftarrow$ Supposons $n < \frac{m+1}{x}$. Alors $\lfloor nx \rfloor \leq nx < m + 1$, d'où $\lfloor nx \rfloor \leq m$ car m est un entier.
- Posons $t = \frac{m+1}{x}$. D'après la question précédente, $c_x(m)$ est le nombre d'entiers naturels non nuls strictement inférieurs à t . Par conséquent, $t - 1 \leq c_x(m) < t$. Si x est irrationnel, t ne peut pas être entier ; les entiers naturels non nuls strictement inférieurs à t sont alors $1, \dots, \lfloor t \rfloor$. Ainsi $c_x(m) = \left\lfloor \frac{m+1}{x} \right\rfloor$.
- Les ensembles $E_a \cap \llbracket 1, m \rrbracket$ et $E_b \cap \llbracket 1, m \rrbracket$ forment une partition de $\llbracket 1, m \rrbracket$. Leurs nombres d'éléments ont donc pour somme m , soit $c_a(m) + c_b(m) = m$.
- La question 3 donne $(m+1)\delta - 2 \leq c_a(m) + c_b(m) < (m+1)\delta$. Comme cette somme vaut m , on obtient $\frac{m}{m+1} < \delta \leq \frac{m+2}{m+1}$.
- La question précédente donne $1 - \frac{1}{m+1} < \delta \leq 1 + \frac{1}{m+1}$. Supposons $\delta \neq 1$.
 - Si $\delta < 1$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $1 - \delta < \frac{1}{m+1}$ d'après la première inégalité. Ceci impose $m+1 < \frac{1}{1-\delta}$, ce qui est faux pour un m assez grand.
 - Si $\delta > 1$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\delta - 1 \leq \frac{1}{m+1}$ d'après la seconde inégalité. Ceci impose $m+1 \leq \frac{1}{\delta-1}$, ce qui est faux pour un m assez grand.
 On a donc montré par l'absurde $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.
- Si $\frac{a}{b}$ est rationnel, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{a}{b} = \frac{q}{p}$, donc $pa = qb$. Dès lors, $\lfloor pa \rfloor = \lfloor qb \rfloor$ appartient à $E_a \cap E_b$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
- De $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, on tire $b = \frac{a}{a-1}$, puis $\frac{a}{b} = a - 1$. La question précédente montre que $a - 1$ est irrationnel, donc a aussi. Enfin, si b était rationnel, $\frac{a}{b} = \frac{b}{b-1}$ le serait également. Par conséquent, a et b sont irrationnels.
- Si $m \in E_a \cap E_b$, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $m = \lfloor pa \rfloor = \lfloor qb \rfloor$. Comme a et b sont irrationnels, pa et qb ne sont pas entiers. On a donc $m < pa < m + 1$ et $m < qb < m + 1$. En divisant respectivement par a et par b , puis en additionnant, il vient $m < p + q < m + 1$, ce qui est impossible puisque $p + q$ est entier. Ainsi $E_a \cap E_b = \emptyset$.
- Puisque a et b sont irrationnels, $\frac{m+1}{a}$ et $\frac{m+1}{b}$ ne sont pas entiers. De plus, leur somme vaut $m + 1$.

En posant $u = \frac{m+1}{a}$ et $v = \frac{m+1}{b}$, on a donc $u-1 < \lfloor u \rfloor < u$ et $v-1 < \lfloor v \rfloor < v$.

Ainsi $m-1 < \lfloor u \rfloor + \lfloor v \rfloor < m+1$, donc $\lfloor u \rfloor + \lfloor v \rfloor = m$.

11. D'après les questions 3 et 10, $c_a(m) + c_b(m) = m$. Comme E_a et E_b sont disjoints, leur réunion contient donc exactement m éléments dans $\llbracket 1, m \rrbracket$: elle contient tous les éléments de cet ensemble. Cela vaut pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, d'où $E_a \cup E_b = \mathbb{N}^*$.

12. Un calcul donne $\varphi^2 = \varphi + 1$. En divisant cette égalité par φ^2 , on obtient $\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = 1$.

13. Le nombre $\sqrt{5}$ est irrationnel, donc φ l'est aussi. De plus, $\varphi^2 = \varphi + 1$ est irrationnel et ces deux nombres sont supérieurs à 1. Le théorème démontré dans les parties précédentes s'applique : les ensembles E_φ et E_{φ^2} forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

Problème 4

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Elle est donc croissante sur $] -\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$, décroissante sur $[-1, 0[$ et $]0, 1]$. Elle admet un maximum local égal à $f(-1) = -2$ et un minimum local égal à $f(1) = 2$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -f(x)$: f est impaire. De plus, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x$, donc

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

3. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Par imparité, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. Sur $] -\infty, 0[$, la fonction croît de $-\infty$ à -2 sur $] -\infty, -1]$, puis décroît de -2 à $-\infty$ sur $[-1, 0[$. Sur $]0, +\infty[$, elle décroît de $+\infty$ à 2 sur $]0, 1]$, puis croît de 2 à $+\infty$ sur $[1, +\infty[$. Ces variations donnent le tableau demandé.

4. Comme $f(x) - x = \frac{1}{x}$, la courbe est sous la droite $y = x$ pour $x < 0$ et au-dessus pour $x > 0$. Cette droite est une asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$. De plus, $f'(1) = 0$ et $f(1) = 2$: la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 2$. On trace la courbe à l'aide de ces indications et du tableau précédent.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x)f(x^n) - f(x^{n-1}) = (x + x^{-1})(x^n + x^{-n}) - (x^{n-1} + x^{1-n}) = x^{n+1} + x^{-n-1}$. Ainsi $f(x^{n+1}) = f(x)f(x^n) - f(x^{n-1})$.

- (b) Posons P_n : « $f(x^n) \in \mathbb{Z}$ ». On a $f(x^0) = f(1) = 2 \in \mathbb{Z}$ et $f(x) \in \mathbb{Z}$ par hypothèse : P_0 et P_1 sont vraies. Si P_{n-1} et P_n sont vraies pour un $n \geq 1$, la relation précédente montre que $f(x^{n+1})$ est une différence de produits d'entiers ; P_{n+1} est donc vraie. Une récurrence double donne $\forall n \in \mathbb{N}, f(x^n) \in \mathbb{Z}$.

6. (a) La fonction f est continue et strictement décroissante de $]0, 1]$ sur $[2, +\infty[$, et continue et strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$. Ainsi, pour tout entier $p \geq 2$, elle possède exactement un antécédent dans chacun de ces deux intervalles : $\exists! x_p \in]0, 1], \exists! y_p \in [1, +\infty[, f(x_p) = f(y_p) = p$.

- (b) Puisque $f(1) = 2$, on a $x_2 = 1$. L'équation $f(x) = 3$ équivaut, pour $x > 0$, à $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Ses racines sont $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; la première appartient à $]0, 1]$. Donc $x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

- (c) Le réel $\frac{1}{x_p}$ appartient à $[1, +\infty[$ et vérifie $f\left(\frac{1}{x_p}\right) = f(x_p) = p$. Par unicité de y_p , $y_p = \frac{1}{x_p}$.
- (d) Pour tout $p \geq 2$, on a $f(x_{p+1}) = p+1 > p = f(x_p)$. Comme f est strictement décroissante sur $]0, 1]$, $x_{p+1} < x_p$. La suite (x_p) est donc strictement décroissante et convergente, car elle est minorée par 0. Puisque $y_p = \frac{1}{x_p}$, la suite (y_p) est strictement croissante.
- (e) La question précédente donne $x_p + y_p = f(x_p) = p$, donc $x_p + y_p = p$. Comme $0 < x_p \leq 1$, on a $y_p = p - x_p \geq p-1$, donc $y_p \rightarrow +\infty$. Puisque $x_p = \frac{1}{y_p}$, on en déduit $y_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ et $x_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.
- (f) Pour $x \neq 0$, l'équation $f(x) = p$ équivaut à $x^2 - px + 1 = 0$, de discriminant $p^2 - 4 \geq 0$. Ses racines sont $\frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}$ et $\frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}$. La plus petite est x_p , la plus grande est y_p :
- $$x_p = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad y_p = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}.$$

7. Posons $q = f(x_p^n)$. D'après la question 5.b, $q \in \mathbb{Z}$. Comme $x_p^n > 0$, on a $q \geq 2$. De plus, $0 < x_p^n \leq 1$ et $f(x_p^n) = q = f(x_q)$. L'unicité de l'antécédent de q dans $]0, 1]$ donne $x_p^n = x_q$, soit

$\left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}\right)^n = \frac{q - \sqrt{q^2 - 4}}{2}$
L'entier cherché est

$q = f(x_p^n) = \left(\frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}\right)^n + \left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}\right)^n$

car $1/x_p = y_p$. Pour $p = 4$, $x_4 = 2 - \sqrt{3}$ et $y_4 = 2 + \sqrt{3}$. Avec $n = 5$, $q = (2 - \sqrt{3})^5 + (2 + \sqrt{3})^5$, d'où $q = 724$.