

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit f définie par $f : x \mapsto e^{\cos(x)}$. On rappelle que $2 < e < 3$.

A Réduction de l'intervalle d'étude

1. Donner deux fonctions g et h telles que $f = h \circ g$ en précisant leurs ensembles de définition et de dérivabilité. En déduire D_f l'ensemble de définition et de dérivabilité de f .
2. Montrer que f est périodique et en donner une période. Quel intervalle d'étude peut-on alors choisir pour f ?
3. Étudier la parité de f . Proposer alors un intervalle d'étude optimal pour f . On le notera I .

B Étude

4. Pour tout $x \in D_f$, calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f .
5. Résoudre $f(x) = 1$ sur l'intervalle I .
6. Tracer une allure de la courbe représentative de f sur I et (sur le même dessin) la prolonger sur un domaine pertinent en précisant les manipulations effectuées.

C Précisions

7. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[0, \pi]$.
8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\pi - x) = f(\pi + x)$. Quelle propriété géométrique peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?
9. Avec un minimum de calculs et en expliquant, tracer (sur le même dessin) la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{e^{\cos(x)}}$.

Problème 2

A Inégalité arithmético-géométrique

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité suivante¹.

Théorème 1 (*Inégalité arithmético-géométrique*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n nombres $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\prod_{k=1}^n a_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^n.$$

1. Expliquer pourquoi cette inégalité est vraie dans les deux cas particuliers suivants :

- (a) pour $n = 1$,
- (b) pour n quelconque lorsqu'un des nombres a_k est nul.

On supposera donc désormais que $n > 1$ et que $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

2. On note $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{m} - 1 \right) = 0$.

3. Montrer de la manière de votre choix que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(t) \leq t - 1$.

4. En déduire que $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{a_k}{m} \right) \leq 0$.

5. En déduire l'inégalité souhaitée.

B Inégalité de Carleman

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité suivante².

Théorème 2 (*Inégalité de Carleman*)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et n nombres $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\sum_{n=1}^N \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq e \sum_{n=1}^N x_n.$$

6. Expliquer pourquoi cette inégalité est vraie dans le cas où $N = 1$

1. Son nom provient des deux types de moyennes qu'elle compare. Étant donnés $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels positifs, la quantité $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ est leur **moyenne arithmétique** tandis que $\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}}$ est leur **moyenne géométrique**

2. Torsten Carleman, mathématicien suédois de la première moitié du XX^e siècle, était reconnu comme un génie et un bon gymnaste, mais il a aussi été reconnu comme un individu taciturne, xénophobe et antisémite. Souvent cynique, il disait qu'il faudrait abattre les professeurs à l'âge de 50 ans. C'est à une jaunisse qu'il a succombé à 56 ans, alors qu'il était professeur à Lund et à Stockholm, directeur de l'institut Mittag-Leffler et membre de l'Académie royale des sciences de Suède.

On supposera donc désormais que $N > 1$. Pour tout $1 \leq n \leq N$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n kx_k \quad \text{et} \quad U_n = \prod_{k=1}^n x_k.$$

7. Montrer que pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$U_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n kx_k.$$

8. En déduire que pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$U_n \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{T_n}{n} \right)^n.$$

9. (a) Montrer de la manière de votre choix que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

10. À l'aide des questions précédentes, montrer que

$$\forall 1 \leq n \leq N, \quad U_n \leq \left(\frac{eT_n}{n(n+1)} \right)^n.$$

11. En déduire que

$$\sum_{n=1}^N (U_n)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \frac{kx_k}{n(n+1)}.$$

12. Donner deux réels a et b tels que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ et montrer que

$$\sum_{n=1}^N (U_n)^{1/n} \leq e \sum_{k=1}^n kx_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right).$$

13. Conclure.

14. Application : à l'aide d'un choix judicieux des nombres x_k , démontrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N (n!)^{1/n} \leq e$.