

Exercice 1 Questions indépendantes

1. **Init.** $u_0 = 2$ et $2^0 + 0 + 1 = 1 + 1 = 2$. Donc $u_0 = 2^0 + 0 + 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = 2^n + n + 1$.

Alors $u_{n+1} = 2u_n - n = 2(2^n + n + 1) - n = 2^{n+1} + 2n + 2 - n = 2^{n+1} + (n + 1) + 1$, cqfd.

2. Soit N un entier supérieur ou égal à 1.

(a) Je ne détaille pas la technique calculatoire qui a été souvent menée à bien, je vous en indique une plus astucieuse et un peu plus économique.

M1 On met au même dénominateur, on développe et on identifie.

M2 Soit $f(k) = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ et $g(k) = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

- $kf(k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ et $kg(k) = a + \frac{bk}{k+1} + \frac{ck}{k+2}$. L'égalité de ces deux expressions donne $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = a + \frac{bk}{k+1} + \frac{ck}{k+2}$. Évaluée en $k = 0$, cette égalité donne alors $a = \frac{1}{2}$.
- On laisse au lecteur le soin de reproduire cette méthode avec $(k+1)f(k) = (k+1)g(k)$ et $(k+2)f(k) = (k+2)g(k)$ (en évaluant respectivement en $k = -1$ et $k = -2$) pour obtenir b et c .

Finalement, $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}$.

(b) Ainsi $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^N \frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}$. On écrit $\frac{1}{k+1} = \frac{1/2}{k+1} + \frac{1/2}{k+1}$.

Alors $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$.

Alors par télescopage : $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{N+2} \right)$.

Finalement, $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}$.

3. $S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2^{\min(i, j)} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i 2^j + \sum_{j=i+1}^n 2^i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2 - 2^{i+1}}{1 - 2} + (n - i)2^i \right)$.

On décompose : $S = -\sum_{i=1}^n 2 + \sum_{i=1}^n 2^{i+1} + \sum_{i=1}^n (n - i)2^i = -2n + (2^{n+2} - 4) + \sum_{j=0}^{n-1} j2^{n-j}$, à l'aide du

changement d'indice $j = n - i$. Il reste à exprimer $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{2^j}$, calcul encore non trivial pour lequel on

convoquera une astuce mise en œuvre en TD.

Résultat final : $\boxed{S = 6 \times 2^n - 4n - 6}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période n . Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} f(x+k)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x+1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x+1+k) = \sum_{k=1}^n f(x+k)$ par décalage d'indice.

Donc $g(x+1) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(x+k) \right) + f(x+n)$.

Or $f(x+n) = f(x)$, donc $g(x+1) = f(x) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} f(x+k) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x+k) = \boxed{g(x)}$. On a donc montré que $\boxed{g \text{ est 1-périodique}}$.

Problème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

Par télescopage, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$.

On réduit au même dénominateur.

$$S_{n+1} - S_n = \frac{2n+1+2(n+1)-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0.$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} - S_n > 0}$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$ (car $n+k > n$).

Ainsi, $S_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = n \times \frac{1}{n}$. Donc $\boxed{S_n < 1}$.

Les résultats précédents montrent que la suite (S_n) est croissante et majorée par 1. On peut en déduire qu'elle est convergente ; la suite du problème vise à déterminer sa limite.

2. (a) On étudie $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$, définie et dérivable sur $] -1, +\infty[$ (par composition).

$$\forall x \in] -1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1, \text{ positif sur }] -1, 0[, \text{ négatif sur }]0, +\infty[.$$

Donc f est décroissante sur $] -1, 0[$, croissante sur $]0, +\infty[$, avec un maximum en 0, égal à $f(0) = 0$.

Ainsi, $\forall x \in] -1, +\infty[, f(x) \leq 0$, i.e. $\boxed{\ln(1+x) \leq x}$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec $x = \frac{1}{n}$ qui appartient bien à $] -1, +\infty[$: $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

$$\text{Or } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec $x = -\frac{1}{n+1} \in]-1, +\infty[: \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$.

Or $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(n) - \ln(n+1)$.

Ainsi $\ln(n) - \ln(n+1) \leq -\frac{1}{n+1}$, soit $\boxed{\ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1}}$.

(d) Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité de la question 2b donne $\ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leq \frac{1}{n+k}$ tandis que celle de la question 2c donne $\frac{1}{n+k} \leq \ln(n+k) - \ln(n+k-1)$.

Finalement, $\boxed{\ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leq \frac{1}{n+k} \leq \ln(n+k) - \ln(n+k-1)}$.

3. (a) On effectue la somme pour k allant de 1 à n dans l'encadrement précédent. Les télescopes donnent $\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(2n) - \ln(n)$. Ce qui donne $\boxed{\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq S_n \leq \ln(2)}$.

(b) $\frac{2n+1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$ par propriété sur les limites de fractions rationnelles.

Donc par composition, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)}$.

(c) D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)}$.