

CHAPITRE A4

NOMBRES COMPLEXES

« [...] ce miracle de l'Analyse, prodige du monde des idées, objet presque amphibie entre l'Être et le non-Être, que nous appelons racine imaginaire. »

— Gottfried Wilhelm Leibniz

Objectifs

- Nombres complexes, formes algébrique et trigonométrique.
- Résolution d'équations.
- Représentation de notions et transformations géométriques.

1 Forme algébrique

1.1 Introduction

Définition A4.1

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$ dont les éléments sont appelés **nombres complexes** et qui vérifie les propositions suivantes :

- (i) $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ et les opérations d'addition et de multiplication y sont préservées.
- (ii) $\mathbb{C}$ contient un élément i dont le carré vaut -1 .
- (iii) Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$.

Définition A4.2

Étant donné un nombre complexe z , l'écriture $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ s'appelle **forme algébrique** de z . x s'appelle **partie réelle** de z et y est sa **partie imaginaire**, notées respectivement $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$.

Les nombres complexes de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$ sont appelés **imaginaires purs**. On note $i\mathbb{R}$ leur ensemble.



1.2 Calculs, conjugaison, module

Proposition A4.3

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Alors

- $z = z' \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$,
- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$,
- $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$,
- $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$.

Dém. A4.3

- On a

$$\begin{aligned}
 z = z' &\Rightarrow a + ib = a' + ib' \\
 &\Rightarrow a - a' = i(b' - b) \\
 &\Rightarrow (a - a')^2 = -(b' - b)^2 \text{ en élevant au carré.} \\
 &\Rightarrow a - a' = b' - b = 0 \text{ (seul nombre réel positif et négatif)} \\
 &\Rightarrow a = a' \text{ et } b = b'.
 \end{aligned}$$

La réciproque est inhérente à la définition de $\mathbb{C}$.

- $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$.
- $zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.
- Reformulation du deuxième point.

Définition A4.4

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Proposition A4.5

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\bar{\bar{z}} = z$.

Étant donné deux nombres complexes z et z' , on a

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$,
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$,

Dém. A4.5

On pose à nouveau $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

- $\bar{\bar{z}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.
- $\overline{z + z'} = \overline{(a + a') - i(b + b')} = (a + a') + i(b + b') = \bar{z} + \bar{z}'$.
- D'une part, d'après ce qui précède, $\overline{zz'} = \overline{(aa' - bb') - i(ab' + a'b)}$.

D'autre part, $\overline{zz'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' + i^2bb' - ia'b - iab' = (aa' - bb') - i(ab' + a'b).$

Proposition A4.6

- On peut exprimer les parties réelle et imaginaire de z par :

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

- Cela a pour conséquence que

- z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$,
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$,

Dém. A4.6

- $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ et $\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$ donc $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ et $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$.
- ➤ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

🔗 Exercice A4.2.

Définition A4.7

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **module** de z le nombre *réel positif*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Proposition A4.8

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \in \mathbb{R}_+$. Et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- $\forall z \in \mathbb{C}, z\bar{z} = |z|^2$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |zz'| = |z||z'|$,

Dém. A4.8

- $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+$ et $|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$.
- $|zz'|^2 = (zz')(\overline{zz'}) = zz'\bar{z}\bar{z}' = z\bar{z}z'\bar{z}' = |z|^2|z'|^2$.
Or $|zz'|$ et $|z||z'|$ sont des réels positifs, dont les carrés sont égaux. Donc $|zz'| = |z||z'|$.

Utilisation. Pour exprimer un nombre sous forme algébrique, il faut commencer par se débarrasser des imaginaires au dénominateur en multipliant par le conjugué :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

**Proposition A4.9**

Tout nombre complexe non nul possède un inverse : si $z = a + ib \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Dém. A4.9

$z\bar{z} = |z|^2$ implique, pour $z \neq 0$, que $z \times \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$, ce qui donne l'inverse de z .

Remarque. Une formule souvent utile : $\frac{1}{i} = -i$.

☞ Exercices A4.1, A4.3.

Théorème A4.10 (Inégalité triangulaire)

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a

- (i) $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$,
- (ii) $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z$.

Dém. A4.10

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ dans $\mathbb{C}$.

- Montrons que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Comme ces deux nombres sont des réels positifs, on va comparer leurs carrés

- D'une part, $(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$.
- D'autre part,

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\ &= (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 + \underbrace{z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'}}_{2 \operatorname{Re}(z\bar{z}')} + |z'|^2. \end{aligned}$$

Or $\operatorname{Re}(z\bar{z}') \stackrel{(*)}{\leq} |z\bar{z}'| = |z||z'|$.

Finalement, $|z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$ donc $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

(*) : si $Z = x + iy$, $\operatorname{Re} Z = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |Z|$.

- Partie gauche : même stratégie que dans $\mathbb{R}$.

- $|z| = |z + z' + (-z')| \leq |z + z'| + |-z'| = |z + z'| + |z'|$ donc $|z| - |z'| \leq |z + z'|$.
- En échangeant les rôles de z et z' , $|z'| - |z| \leq |z + z'|$, i.e. $-(|z| - |z'|) \leq |z + z'|$.

La propriété est vraie pour le réel $|z| - |z'|$ et son opposé, elle est donc vraie pour sa valeur absolue : $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$.

- On a égalité si et seulement si les inégalités sont des égalités dans la démonstration ci-dessus. La seule inégalité est celle marquée (*).
Si on en examine le détail, on a

$$\operatorname{Re} Z = |Z| \Leftrightarrow \begin{cases} x = |x| \\ \sqrt{x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+ \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_+.$$

C'est là l'essentiel. Le reste est de la petite manipulation pour retrouver exactement la forme élémentaire de la condition donnée.

On a donc égalité si et seulement si $z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+$, i.e., en notant α ce réel, $z\bar{z}' = \alpha z'$, soit encore $z|z'|^2 = \alpha z'$. Enfin $|z'|^2$ étant un réel positif, cela équivaut à $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z$.

✎ Exercice A4.4.

1.3 Interprétation géométrique

Définition A4.11

On appelle **plan complexe** le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. À tout complexe $z = x + iy$, on peut associer un point du plan ayant pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ainsi qu'un vecteur du plan, de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Proposition A4.12

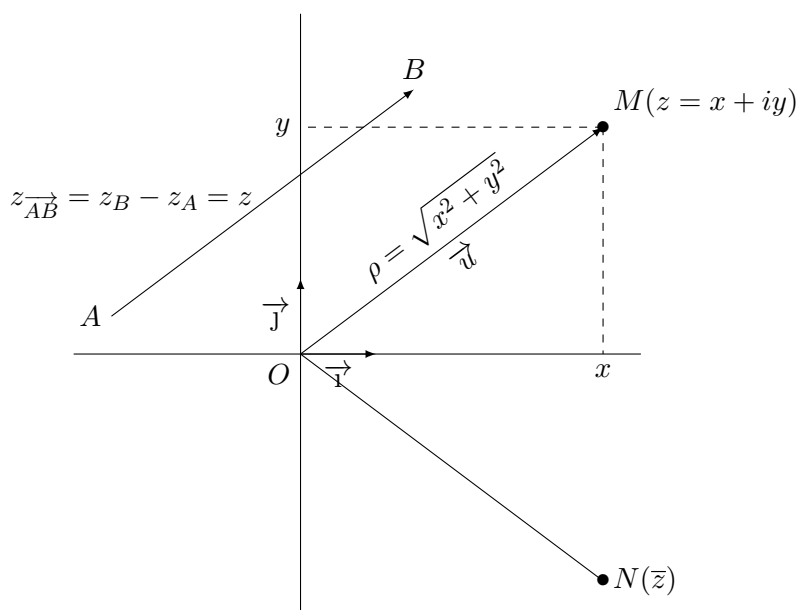
- Soient A et B deux points du plan d'afixes respectives z_A et z_B . Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'afixes respectives z et z' et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\lambda \vec{u}$ ont pour affixes respectives $z + z'$ et λz .
- Le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique du point d'affixe z par rapport à l'axe des abscisses.

Remarque. La relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ traduit la relation $z_C - z_A = (z_C - z_B) + (z_B - z_A)$.

Proposition A4.13

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si M est le point d'affixe z , alors $|z| = OM$.
- Si $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe z , alors $|z| = \|\vec{u}\|$.
- Si A et B sont deux points du plan, alors $AB = |z_B - z_A|$.



☞ Exercices A4.5, A4.6, A4.7, A4.8.

1.4 Résolution d'équations du second degré

Proposition A4.14

Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées distinctes et opposées.

Dém. A4.14

Soit $z = a + ib \neq 0$.

Analyse Soit $w = x + iy$ tel que $w^2 = z$.

$$\text{Alors } x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib, \text{ soit } \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (L_1) \\ 2xy = b & (L_2) \end{cases}.$$

$$\text{De plus } |w^2| = |w|^2 = |z|, \text{ soit } x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (L_3).$$

$$\text{Puis } (L_1) \text{ et } (L_3) \text{ donnent } x^2 \text{ et } y^2 : x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \text{ et } y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}.$$

$$\text{Donc } x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \text{ et } y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}. \text{ Notons } x = \pm \alpha \text{ et } y = \pm \beta.$$

Enfin (L_2) nous apprend le signe relatif de x et y :

$$\text{➤ si } b > 0, \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -\beta \end{cases} ;$$

$$\text{➤ si } b < 0, \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \beta \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\beta \end{cases} ;$$

➤ si $b = 0$, x ou y est nul et l'autre a les 2 valeurs possibles.

Synthèse On vérifie que ces valeurs, élevées au carré, donnent bien z .

Remarque. Résolution alternative (mais un peu plus longue) dans l'analyse :

$(L_2) \Rightarrow x^2 y^2 = \frac{b^2}{4}$. Ceci et (L_3) permettent de déterminer $\{x^2, y^2\}$ (système somme-produit).

(L_1) permet de déterminer laquelle des deux valeurs est x^2 , laquelle est y^2 .

Puis de même (L_2) permet de connaître les signes relatifs de x et y .

Théorème A4.15

Étant donné trois nombres complexes $a \neq 0$, b et c , on étudie l'équation

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (\text{A4.1})$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

(i) Si $\Delta = 0$, l'équation (A4.1) a une unique solution : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.

(ii) Si $\Delta \neq 0$, on appelle δ une racine carrée de Δ . Alors l'équation (A4.1) a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Dém. A4.15

Classique mise sous forme canonique : $az^2 + bz + c = a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)$.

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\delta}{2a} \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

Remarque. Si a , b et c sont réels, Δ l'est aussi. L'équation (A4.1) a alors des solutions réelles si $\Delta \geq 0$ et complexes conjuguées si $\Delta < 0$.

Proposition A4.16

Avec les notations ci-dessus (z_1 et z_2 éventuellement confondues),

- on a la factorisation

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

- on a les relations

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

📖 Exercices A4.9, A4.10.



2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

2.1 Exponentielle complexe

Définition A4.17

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, appelé **cercle unité** ou **cercle trigonométrique** :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Proposition A4.18

- $1 \in \mathbb{U}$,
- Si $z, z' \in \mathbb{U}$, alors $zz' \in \mathbb{U}$.
- Si $z \in \mathbb{U}$, alors $z^{-1} \in \mathbb{U}$.

Dém. A4.18

- $|1| = 1$,
- Si $z, z' \in \mathbb{U}$, alors $|zz'| = |z||z'| = 1$.
- Si $z \in \mathbb{U}$, alors $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = 1$.

Définition A4.19

Soit $z \in \mathbb{U}$ et M le point d'affixe z dans le plan complexe.

- L'angle orienté $(\vec{1}, \overrightarrow{OM})$ s'appelle **un argument** de z , noté $\text{Arg}(z)$.
- Si θ désigne un argument de z , alors on note $e^{i\theta} = z$.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit le **cosinus** et le **sinus** de θ par

$$\cos(\theta) = \text{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \text{Im}(e^{i\theta}).$$

Définition A4.20

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit l'**exponentielle complexe** de z par

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b).$$

Proposition A4.21

- Étant donné deux nombres complexes z et z' , on a $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.
- Étant donné θ et μ deux réels, on a
 - (i) $e^{i\theta} = e^{i\mu}$ si et seulement si $\theta = \mu \bmod{2\pi}$,
 - (ii) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

Dém. A4.21

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

- Tout d'abord on montre que $e^{i(b+b')} = e^{ib} e^{ib'}$.

D'une part,

$$\begin{aligned} e^{i(b+b')} &= \cos(b+b') + i \sin(b+b') \\ &= \cos(b) \cos(b') - \sin(b) \sin(b') + i(\sin(b) \cos(b') + \cos(b) \sin(b')). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} e^{ib} e^{ib'} &= (\cos(b) + i \sin(b))(\cos(b') + i \sin(b')) \\ &= \cos(b) \cos(b') - \sin(b) \sin(b') + i(\sin(b) \cos(b') + \cos(b) \sin(b')). \end{aligned}$$

Il reste à utiliser les propriétés de l'exponentielle réelle :

$$\begin{aligned} e^{z+z'} &= e^{a+a'} e^{i(b+b')} \\ &= e^a e^{a'} e^{i(b+b')} \\ &= e^a e^{a'} e^{ib} e^{ib'} \\ &= e^z e^{z'}. \end{aligned}$$

Proposition A4.22 (Formules d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Dém. A4.22

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}} = 2 \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = 2 \cos(\theta). \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}} = 2i \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = 2i \sin(\theta). \end{aligned}$$


Proposition A4.23 (Formule de De Moivre)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Dém. A4.23

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

☞ Exercices A4.17, A4.18, A4.19, A4.21.

2.2 Argument et forme trigonométrique

Théorème et définition A4.24

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique** (ou **forme exponentielle**) de z . Et alors

- (i) ρ est unique : c'est le module de z ,
- (ii) θ est un argument de z .

Proposition A4.25

Étant donné deux nombres complexes non nuls z et z' , on a (à 2π près) les égalités suivantes :

- $\operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z$,
- $\operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} z'$ et $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$,
- $\operatorname{Arg} \left(\frac{z}{z'} \right) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} z'$.

☞ Exercices A4.11, A4.12, A4.13, A4.14, A4.15, A4.22, A4.24, A4.25.

2.3 Interprétation géométrique

Proposition A4.26

Soit $z \in \mathbb{C}$.

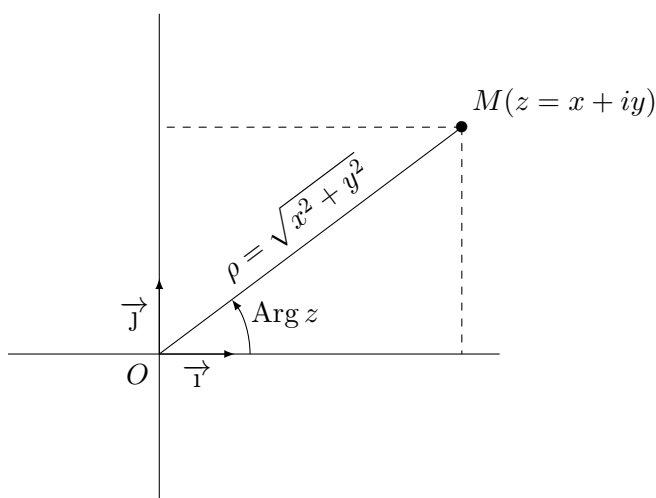
- Si M est le point d'affixe z , alors $\text{Arg } z$ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
- Si $\vec{u}$ est le vecteur d'affixe z , alors $\text{Arg } z$ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$.
- Si A et B sont deux points du plan, alors $\text{Arg}(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{AB})$.
- Si A, B, C et D sont deux points du plan, alors $\text{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Proposition A4.27

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes z et z' . Alors

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z}{z'}$ est réel. De plus, ils sont de même sens si et seulement si ce quotient est positif.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z}{z'}$ est imaginaire pur.

Géométrie	Complexes (algébrique)	Complexes (trigonométrique)
Plan	Nombres complexes	
Point M	Affixe $z = x + iy$	Affixe $z = \rho e^{i\theta}$
Abscisse x	Partie réelle	
Ordonnée y	Partie imaginaire	
Axe (Ox)	Nombres réels	
Axe (Oy)	Imaginaires purs	
Symétrique / (Ox)	Complexe conjugué	
$OM = \ \overrightarrow{OM}\ $	$\sqrt{x^2 + y^2}$	$ z $
AB		$ z_B - z_A $
Cercle unité	$x^2 + y^2 = 1$	$ z = 1$
$(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$		$\text{Arg}(z)$
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$		$\text{Arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$



2.4 Racines n -ièmes de l'unité

Soit $n \geq 1$ un entier.

Définition A4.28

Dans $\mathbb{C}$, on appelle **racine n -ième de l'unité** tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

Notation. L'ensemble des racines n -ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Théorème A4.29 (Expression des racines de l'unité)

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ est fini, comporte exactement n éléments et

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{k}{n}2\pi} \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}.$$

Remarque. En notant $\omega = e^{2i\pi/n}$,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}.$$

Dém. A4.29

On cherche z sous la forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = 1 \\ &\Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = 1e^{i0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{n}} \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition A4.30

Pour tout $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$, $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.

Dém. A4.30

- Si $z = 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = n$
- Sinon, $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1 - 1}{1 - z} = 0$.

Proposition A4.31

Tout nombre complexe non nul a possède exactement n racines n -ièmes. Si $a = \rho e^{i\theta}$, ce sont les nombres

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Dém. A4.31

On a déjà $a = \rho e^{i\theta} = \left(\rho^{1/n} e^{i\theta/n}\right)^n$.

Puis $z^n = a \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\rho^{1/n} e^{i\theta/n}}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{\rho^{1/n} e^{i\theta/n}} \in \mathbb{U}_n$.

Donc $z^n = a \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \frac{z}{\rho^{1/n} e^{i\theta/n}} = e^{i\frac{k}{n}2\pi}$.

🔗 Exercices A4.16, A4.20, A4.23.

3 Transformations du plan

3.1 Généralités et transformations usuelles

On notera $\mathcal{P}$ le plan complexe.

Étant donnée une application

$$\begin{array}{ccc} F : \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ M & \mapsto & M' \end{array},$$

on appelle **représentation (analytique) complexe** de F l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à l'affixe z de M associe l'affixe z' de son image M' par F . On note en général $z' = f(z)$.

**Proposition A4.32**

- (i) La représentation complexe de la symétrie orthogonale d'axe (Ox) (respectivement (Oy)) est

$$z' = \bar{z} \quad (\text{resp. } z' = -\bar{z}).$$

- (ii) Étant donné un $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{P}$ d'affixe b , la représentation complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ est

$$z' = z + b.$$

- (iii) Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$ et Ω un point de $\mathcal{P}$ d'affixe ω , la représentation complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport λ est

$$z' - \omega = \lambda(z - \omega), \text{ i.e. : } z' = \omega + \lambda(z - \omega).$$

- (iv) Étant donné un angle $\theta \in \mathbb{R}$ et Ω un point de $\mathcal{P}$ d'affixe ω , la représentation complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega), \text{ i.e. : } z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

Remarques.

- On peut aussi écrire la représentation complexe d'une homothétie sous la forme

$$z' = \lambda z + (1 - \lambda)\omega,$$

et celle d'une rotation sous la forme

$$z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega.$$

- En particulier une homothétie de centre O s'écrit $z' = \lambda z$ et une rotation de centre O s'écrit $z' = e^{i\theta}z$.

3.2 Similitudes**Définition A4.33**

On appelle **similitude directe** une application $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ qui a une représentation complexe de la forme

$$z' = az + b, \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

Proposition A4.34

- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- Étant donné quatre points M_1, M_2, M'_1 et M'_2 du plan tels que $M_1 \neq M_2$, il existe une unique similitude directe S telle que $S(M_1) = M'_1$ et $S(M_2) = M'_2$.

Proposition A4.35

Soit S la similitude directe de représentation complexe $z' = az + b$ et $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b .

- Si $a = 1$, alors S est la translation de vecteur $\vec{u}$.
- Si $a \neq 1$, alors S possède un unique point fixe Ω . On peut alors écrire

$$S = h \circ r = r \circ h$$

avec h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda = |a|$ et r la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = \arg a[2\pi]$.

✎ Exercice A4.26.

Méthodes

- Passer d'une forme à une autre pour un nombre complexe.
- Interpréter géométriquement le module et l'argument d'un complexe.
- Utiliser l'exponentielle complexe pour des problèmes de trigonométrie.
- Résoudre des équations
 - à l'aide de la conjugaison,
 - détermination de racines carrées,
 - équations du second degré,
 - à l'aide des racines n -ièmes de l'unité.
- Associer une similitude directe à sa représentation complexe.