

TD A4. Nombres complexes

1 Forme algébrique, conjugué, module

Exercice A4.1

Donner la forme algébrique de

1. $\frac{3+5i}{5-3i},$
2. $(2-i)^3.$

Exercice A4.2

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b le nombre

$$A = (2a - b - i(a + b))(-a - i(a + b))$$

est-il un nombre réel ?

Exercice A4.3

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ tels que $1 + z_1 z_2 \neq 0$. Montrer que $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Exercice A4.4

Démontrer que si $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} - nz^n = 0$, alors $|z| \leq 1$.

Exercice A4.5

Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

1. $|z - 1| = 3,$
2. $|z + i| \leq 2,$
3. $|z| = |z - 4|$

Exercice A4.6

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

1. Montrer que $\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$.
2. Quel est le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0$.

Exercice A4.7

Trouver tous les complexes z tels que $z, \frac{1}{z}$ et $z - 1$ aient le même module.

Exercice A4.8

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on définit $z' = \frac{1+z}{1-z}$. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que

1. $|z'| = 1,$
2. $|z'| = 2,$
3. $z' \in \mathbb{R},$
4. $z' \in i\mathbb{R}.$

**Exercice A4.9**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $|z + 1| = |z| + 1$,

2. $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$

Exercice A4.10

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2 + (-2 + i)z - 1 + 5i = 0$,

3. $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$,

2. $z + \frac{1}{z} = 0$,

4. $2z^2 - 2(1 + \cos \theta)z + 1 + \cos \theta = 0$,

2 Forme trigonométrique

Exercice A4.11

Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z = (1 + i \tan t)^2$.

Exercice A4.12

Déterminer les parties réelle, imaginaire, module et argument de

1. $2 + 2i$,

3. $\frac{\sqrt{2}}{1 - i}$,

2. $\frac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/4}}$,

4. $-2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice A4.13

Calculer

$$\left(\frac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i}{2 - i} \right)^{17}$$

Exercice A4.14

Soit t un réel non congru à π modulo 2π . Déterminer le module et un argument de

1. $1 + e^{it}$,

3. $\frac{1 - i}{1 + e^{it}}$.

2. $i - e^{it}$,

Exercice A4.15

Déterminer le module et un argument de

1. $(1 + i)^n + (1 - i)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$,

2. $\frac{(1 + i)^4}{(1 - i)^3} + \frac{(1 - i)^4}{(1 + i)^3}$.

Exercice A4.16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1. $z^6 = -1$,

2. $z^4 + 4 = 0$,

3. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$,

4. $\bar{z}^7 = \frac{1}{z^2}$.

Exercice A4.17

Linéariser les fonctions suivantes.

1. $f : t \mapsto \cos^4 t$,

2. $g : t \mapsto \sin^5 t$,

3. $h : t \mapsto \sin^3 t \cos t$,

4. $k : t \mapsto \cos(3t) \sin^3(2t)$.

Exercice A4.18

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer en fonction de $\cos(x)$:

(a) $\cos(5x)$,

(b) $\sin(6x) \sin(x)$.

2. Exprimer en fonction de $\sin(x)$:

(a) $\sin(7x)$,

(b) $\sin(3x) \cos(2x)$.

Exercice A4.19 ⚙

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt}$ puis $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kt)$.

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kt) \cos^k t$.

Exercice A4.20 ⚙⚙

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

2. Simplifier $A = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1|$.

Exercice A4.21 ⚙⚙

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer, à l'aide des formules d'Euler, qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a \cos t + b \sin t = A \cos(t - \varphi).$$

Exercice A4.22 ⚙⚙

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ le nombre $z = \left(\frac{(1 + i\sqrt{3})^5}{(1 - i)^3} \right)^n$ est-il un nombre réel positif ?

**Exercice A4.23** ⚙

Le but est de calculer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. On pose $\omega = e^{2i\pi/5}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^4 \omega^k$.
2. En déduire que $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 = 0$.
3. À l'aide de formules trigonométriques, exprimer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
4. En déduire une équation du second degré dont $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution.
5. Conclure

Exercice A4.24

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module 1. Déterminer une forme trigonométrique de $1 + z + z^2$.

Exercice A4.25

Résoudre dans $\mathbb{C}$.

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| 1. $e^z = 1 + i$, | 3. $e^z + e^{-z} = 1$, |
| 2. $e^z = -5 - 12i$, | 4. $e^z + 2e^{-z} = i$. |

Exercice A4.26 ⚙⚙

Soit A , B et C trois points distincts dans le plan complexe d'affixes a , b et c . On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = j$ ou j^2 .
2. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.
3. Soit ABC un triangle quelconque. On construit trois triangles équilatéraux à l'extérieur de celui-ci, de bases $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Montrer que les centres de gravité I , J et K de ces triangles forment à leur tout un triangle équilatéral. *Remarque : le centre de gravité de 3 points d'affixes z_1, z_2 et z_3 est défini comme le point d'affixe $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.*