

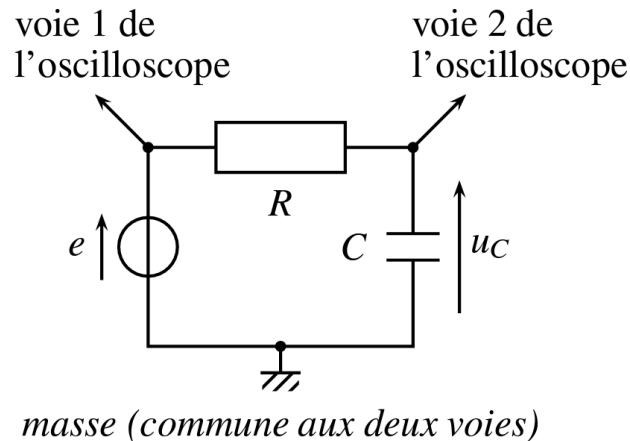
Électrocinétique 2 : Évolution temporelle de circuits linéaires

Attention, il est régulier qu'après le chapitre de mécanique, les élèves mettent des flèches de vecteur sur les tensions.

I. Étude expérimentale

Dans les flashes ou les systèmes start and stop des voitures, on utilise le principe de charge et décharge d'un circuit RC.

On étudie le circuit RC, qui est une modélisation d'un flash d'appareil photographique ou d'un défibrillateur.



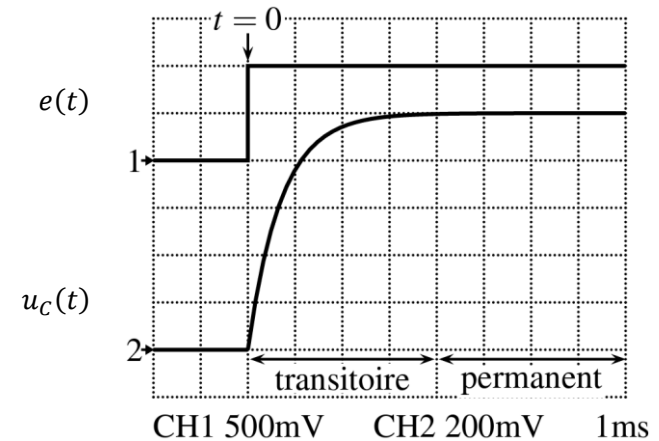
Tout d'abord on soumet ce circuit à un échelon de tension.

On nomme **échelon** de tension une fonction de la forme suivante :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Le condensateur est déchargé pour $t < 0$.

On observe les signaux suivants :



On constate tout d'abord de la tension aux bornes du condensateur est continue. On rappelle que cela est dû au fait que l'énergie électrique stockée par le condensateur dépend de la tension u_C , ainsi si cette tension était discontinue cela correspondrait à une puissance reçue ou fournie par le condensateur infinie, ce qui n'est pas possible.

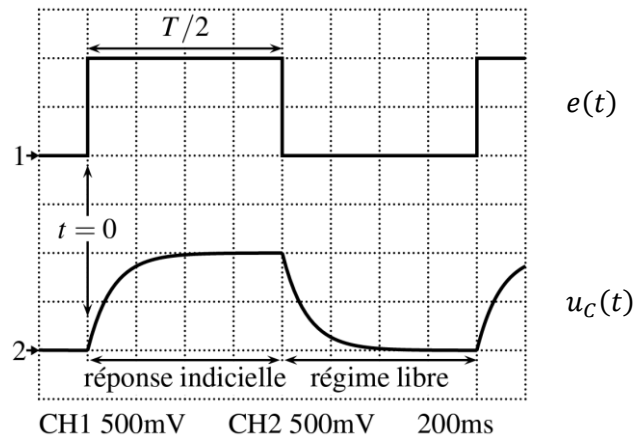
$$\mathcal{P}_{re\acute{c}ue} = \frac{dE_{stock\acute{e}e}}{dt}$$

Lorsqu'il y a une discontinuité, $dE_{stock\acute{e}e}$ est finie, c'est-à-dire non infinitésimale, alors que dt est infinitésimale, donc est infinie.

Au bout d'un certain temps, la tension u_C est égale à E et ne varie plus. On dit alors que le régime stationnaire est atteint. En **régime stationnaire**, cas particulier des régimes permanents, les grandeurs électrocinétiques sont constantes, ne varient pas au cours du temps. Le régime stationnaire est aussi appelé régime continu.

Par opposition, entre deux régimes permanents se déroule un **régime transitoire**. Au cours de celui-ci, les grandeurs électrocinétiques ne peuvent pas être considérées comme constantes.

On étudiera deux réponses d'un circuit RC à un changement de tension du générateur.



La **réponse à un échelon** de tension ou **réponse indicielle** d'un circuit est son comportement quand il est soumis à un échelon de tension.

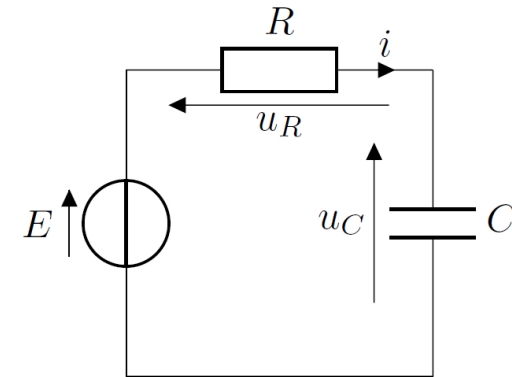
Le **régime libre** d'un est circuit est son comportement quand le subit ne subit aucun apport d'énergie après l'instant initial. Dans le cas du circuit RC, cela correspond à une situation où l'on impose $e(t) = 0$.

II. Modélisation et mise en équation

II. 1. Montage simplifié

Le GBF présente une résistance de sortie r , en série avec la résistance R . L'ensemble forme une unique résistance $R_{\text{eq}} = r + R$. Or on choisit R telle que r est très inférieure à R , donc $R_{\text{eq}} \approx R$.

Pour tout $t \geq 0$, on a $e(t) = E$. Ainsi le schéma du modèle est le suivant :



On peut s'intéresser à une ou plusieurs grandeurs en fonction du temps : $u_C(t)$, $u_R(t)$, $i(t)$, ou à la charge accumulée à l'une des bornes du condensateur.

II. 2. Équation différentielle vérifiée par la tension du condensateur

On cherche à établir l'équation différentielle à coefficients constants vérifiée par u_C , ce qui nous permettra de déterminer $u_C(t)$.

Appliquons la loi d'additivité des tensions :

$$E = u_C + u_R$$

On ne peut pas s'arrêter là puisqu'il y a deux fonctions différentes qui dépendent du temps dans cette expression. On souhaite exprimer u_R en fonction de u_C .

$$u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}$$

$$E = u_C + RC \frac{du_C}{dt}$$

On écrit cette équation différentielle sous sa forme canonique :

$$\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = \frac{E}{RC}}$$

On rappelle qu'une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre est de la forme :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} x = c(t)$$

Par **identification**, c'est-à-dire par comparaison entre la forme canonique d'une équation différentielle du premier ordre et l'équation différentielle qui a été établie, on en déduit que la durée caractéristique τ du circuit est :

$$\underline{\underline{\tau = RC}}$$

Cette durée est appelée **constante de temps** du circuit. Elle est liée à la durée du régime transitoire.

II. 3. Homogénéité de l'équation différentielle

On souhaite vérifier l'homogénéité de l'équation différentielle. Pour cela, on doit s'assurer que :

$$\left[\frac{du_c}{dt} \right] = \left[\frac{1}{RC} u_c \right] = \left[\frac{E}{RC} \right]$$

On a $[E] = [u_c]$, ainsi il nous reste à prouver que :

$$\frac{[u_c]}{T} = \left[\frac{1}{RC} u_c \right]$$

Soit :

$$[RC] = T$$

On ne peut pas se contenter de dire que RC est une durée d'après le nom, il faut le démontrer.

La méthode consistant à trouver les dimensions de R et de C est longue puisqu'il y a plusieurs étapes pour trouver la dimension d'une capacité. On privilégiera la démonstration suivante :

$$\begin{aligned} [U] &= [R] \cdot I \\ I &= [C] \frac{[U]}{T} \end{aligned}$$

Soit :

$$[U] = [RC] \frac{[U]}{T}$$

Ainsi :

$$\underline{\underline{[RC] = T}}$$

La dimension de RC est à connaître pour pouvoir facilement vérifier l'homogénéité de certaines formules.

II. 4. Autres équations différentielles du circuit

Il existe d'autres équations différentielles associées à ce circuit. Pour simplifier leur détermination, on utilise l'équation déjà trouvée :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = \frac{E}{RC}$$

Pour trouver l'équation différentielle vérifiée par i , on cherche à transformer les u_c en $\frac{du_c}{dt}$ pour pouvoir injecter la formule $i = C \frac{du_c}{dt}$.

Pour cela, on dérive l'équation obtenue par la loi d'additivité des tensions.

La méthode de calcul consistant à **dériver une équation pour faire apparaître une grandeur recherchée** est à connaître.

On obtient :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_c}{dt} = 0$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{du_c}{dt} &= \frac{1}{C} i \Rightarrow \frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{1}{C} \frac{di}{dt} \\ \frac{1}{C} \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} \frac{1}{C} i &= 0 \\ \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i} &= 0_H \end{aligned}$$

Pour trouver l'équation différentielle vérifiée par q , la charge à la borne du condensateur connectée à la résistance, on utilise :

$$q = C u_c \Rightarrow u_c = \frac{1}{C} q$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{du_c}{dt} &= \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} \\ \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} \frac{1}{C} q &= \frac{E}{RC} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}}_H$$

$\frac{E}{R}$ est homogène à une intensité, de même pour $\frac{dq}{dt}$.

Pour trouver l'équation différentielle vérifiée par u_R , on peut dériver la loi d'additivité des tensions :

$$E = u_C + u_R \Rightarrow 0 = \frac{du_C}{dt} + \frac{du_R}{dt}$$

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

Or $i = \frac{u_R}{R}$:

$$\boxed{\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0}_H$$

III. Solution analytique du problème

III. 1. Rappels mathématiques

On rappelle que pour une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x = c(t)$$

l'équation homogène associée est sans second membre :

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x = 0$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soit $x_p(t)$ une solution particulière de l'équation différentielle. La forme générale des solutions de l'équation différentielle est :

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + x_p(t)$$

Si le second membre de l'équation différentielle est une constante, la solution particulière est constante, et on la détermine en utilisant que $\frac{dx_p}{dt} = 0$.

III. 2. Résolution de l'équation différentielle dans le cas d'un échelon

Dans le cas d'un échelon de tension, l'équation différentielle à résoudre pour $t > 0$ est :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

L'équation homogène associée est :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0$$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, avec A une constante.

Puisque le second membre est constant pour $t > 0$, une solution particulière $u_{C,P}$ de l'équation différentielle est une constante, on a donc :

$$\frac{du_{C,P}}{dt} = 0$$

Ainsi :

$$\frac{1}{RC}u_{C,P} = \frac{E}{RC}$$

$$u_{C,P} = E$$

La solution générale de l'équation différentielle est donc :

$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

Il est possible de faire ces étapes sur brouillon et de donner directement la solution générale de l'équation différentielle.

Pour trouver la solution du problème, il faut déterminer A . Pour cela, il faut utiliser une condition initiale.

On note $t = 0^-$ un instant strictement inférieur à 0 et aussi proche de 0 que l'on souhaite. On note $t = 0^+$ un instant fictif strictement supérieur à 0 et aussi proche de 0 que l'on souhaite. On utilise ces notations puisqu'une grandeur ne prend pas forcément les mêmes valeurs pour ces deux instants. Par exemple, $e(t = 0^-) = 0$ et $e(t = 0^+) = E$.

Pour le circuit, on sait qu'à $t = 0^-$ le condensateur est déchargé, soit $u_C(t = 0^-) = 0$.

Comme la tension aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps, ou plus simplement dit, **la tension aux bornes du condensateur est continue**, on a :

$$u_C(t = 0^+) = 0$$

Nous verrons plus tard la méthode à suivre si cette information n'est pas donnée.

Or :

$$u_C(t = 0^+) = A \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} + E = A + E$$

$$A + E = 0 \Rightarrow A = -E$$

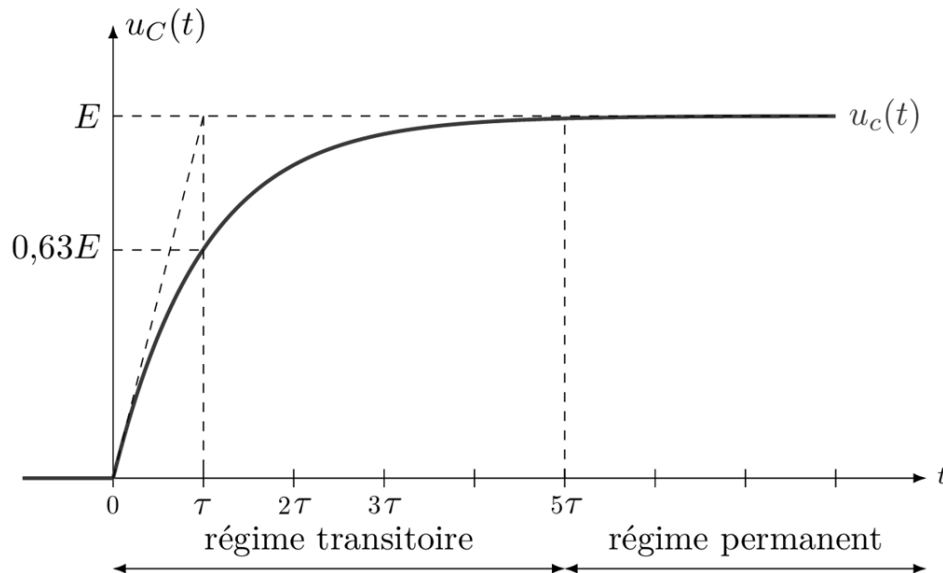
On a donc, pour $t \geq 0$:

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Il est autorisé d'écrire la solution en utilisant τ lorsque cette grandeur n'est pas donnée dans l'énoncé, mais dans ce cas il est **obligatoire d'encadrer son expression**.

III. 3. Représentation graphique de la solution et identification de la constante de temps

Traçons à présent la représentation graphique de cette solution.



Ce résultat correspond bien avec les relevés expérimentaux.
On peut faire des interprétations physiques de ces résultats :

- * Lorsque le circuit RC est soumis à un échelon de tension, le condensateur se charge.
- * La charge du condensateur est exponentielle. Il se charge facilement au départ, puis au fur et à mesure qu'il se charge, cette dernière devient de plus en plus difficile.
- * La charge du condensateur est plus longue si le produit RC est plus grand. Plus la résistance et la capacité sont grandes, plus elles s'opposent à la charge du condensateur. Une façon d'interpréter cela est de dire que la résistance a tendance à diminuer l'intensité et donc la charge du condensateur ; la capacité

Comme ordre de grandeur de la durée du régime transitoire Δt_{tr} , on choisit généralement $\Delta t_{tr} = 5\tau$, puisque pour cette valeur est facile à retenir et permet d'obtenir $u_C > 0,99 E$. Cette durée du régime transitoire est aussi appelée **temps de réponse** du système, le système étant le circuit RC.

On peut déterminer un ordre de grandeur du temps de réponse d'un circuit RC dans une activité expérimentale. On prend par exemple $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 1.10^2 \text{ nF}$.

$$\Delta t_{tr} = 5 RC$$

$$\Delta t_{tr} = 5.1.10^3.100.10^{-9}$$

$$\Delta t_{tr} = 5.10^{-4} \text{ s} \quad (0,5 \text{ ms})$$

On souhaite déterminer l'équation de la tangente à l'origine et on la note $U(t)$.

Pour déterminer la tangente à l'origine y d'une fonction f on utilise la formule :

$$y(x) = \frac{df}{dx}(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

Ainsi on calcule la dérivée temporelle de u_C en 0^+ :

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{du_C}{dt}(t = 0^+) = \frac{E}{\tau}$$

Or $u_C(t = 0^+) = 0$ donc l'équation de la tangente est :

$$U = \frac{E}{\tau} t$$

Cette tangente prend la valeur $U = E$ quand $t = \tau$. Elle croise donc l'asymptote de la courbe en (τ, E) .

Pour déterminer le temps de réponse du circuit, il est nécessaire de déterminer la constante de temps τ .

Il est possible de déterminer graphiquement une constante de temps τ sur un relevé expérimental par deux méthodes.

La première méthode utilise la tangente à l'origine, il faut alors :

- * Tracer la tangente à l'origine à la courbe.
- * Tracer l'asymptote à la courbe.
- * L'abscisse du point d'intersection de la tangente et de l'asymptote est en $t = \tau$.

On privilégiera cette méthode même si elle n'est pas très précise.

La deuxième méthode utilise la valeur prise par la courbe à $t = \tau$:

$$u_C(t = \tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,63 E$$

Il faut alors :

Déterminer la valeur de la grandeur finale E atteinte au bout d'un temps très long.

Calculer la valeur $u_C(\tau) = 0,63 E$.

Déterminer l'abscisse τ du point de la courbe d'ordonnée **0,63 E**.

On rappelle que ce n'est pas parce que $u_C(t = 0^+) = 0$ que l'on a $\frac{du_C}{dt}(t = 0^+) = 0$, cela n'est notamment pas le cas pour la situation :

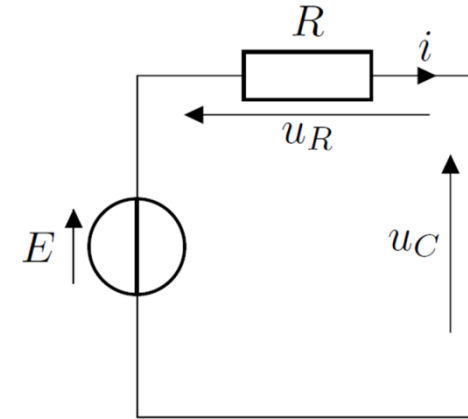
$$\begin{aligned} u_C(t = 0^+) &= 0 \\ \frac{du_C}{dt}(t = 0^+) &= \frac{E}{\tau} \end{aligned}$$

III. 4. Comportement du condensateur en régime permanent stationnaire

Lorsqu'un temps suffisant s'est écoulé, le régime est permanent, et puisque la source de tension est continue, on peut supposer que ce régime est stationnaire.

On rappelle que l'on a vu une méthode qui démontre qu'en régime stationnaire, un condensateur se comporte comme un fil coupé.

Ainsi le schéma électrique équivalent en régime stationnaire est :



On a alors $i = 0$, soit $u_R = 0$.

On en déduit que $E = u_C + 0$, soit $u_C = E$, ce qui correspond à l'asymptote trouvée.

Parfois est utilisé la notation $t = \infty$ pour symboliser le régime permanent stationnaire : $i(t = \infty) = 0, u_C(t = \infty) = E$.

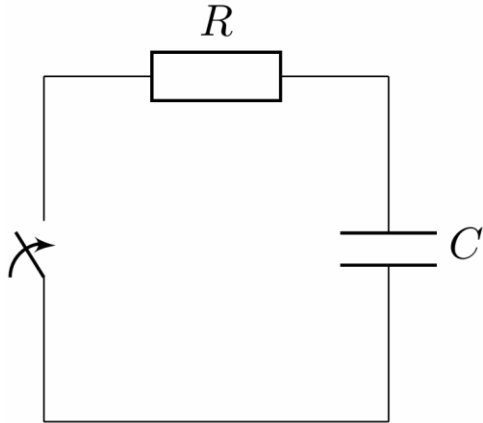
IV. Régime libre

IV. 1. Observations expérimentales

On étudie à présent le régime libre du circuit RC, qui correspond au cas où l'on a appliqué un échelon de tension, laissé le régime stationnaire s'établir, puis imposé brutalement $e(t) = 0$ pour $t > t_1$, pour que l'énergie apportée par le générateur soit nulle. Comme on a $e(t) = 0$, le générateur est équivalent à un fil.

Dans le cas où un énoncé indique qu'un système électrique a été laissé tel quel pendant un long moment, et que vous constatez qu'il n'y a pas de générateur de tension périodique dans le circuit, on écrira « D'après l'énoncé, on peut supposer que le régime stationnaire est établi. »

La situation correspond aussi au cas du circuit ci-après où l'on a initialement chargé un condensateur $u_C = E$, et pour laquelle on ferme l'interrupteur à $t = t_1$.



	$t < t_1$	$t > t_1$
Propriété du générateur	intensité nulle	$e(t) = 0$
Modélisation possible	interrupteur ouvert	interrupteur fermé

Expérimentalement, on observe que la tension aux bornes du condensateur est une exponentielle décroissante.

IV. 2. Équation différentielle et solution de l'équation

Pour obtenir l'équation différentielle de ce circuit, soit on utilise la même méthode que pour l'échelon de tension, et on obtient, pour $t > t_1$:

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0$$

Soit on remarque que le circuit est le même que précédemment, mais avec $e(t) = 0$, et on obtient la même équation différentielle.

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Avant t_1 , le condensateur est tel que : $u_C(t = t_1^-) = E$

Or la tension aux bornes d'un condensateur est continue, donc $u_C(t = t_1^+) = E$.

$$u_C(t = t_1^+) = A.e^{-\frac{t_1}{\tau}}$$

On a donc $A = Ee^{\frac{t_1}{\tau}}$

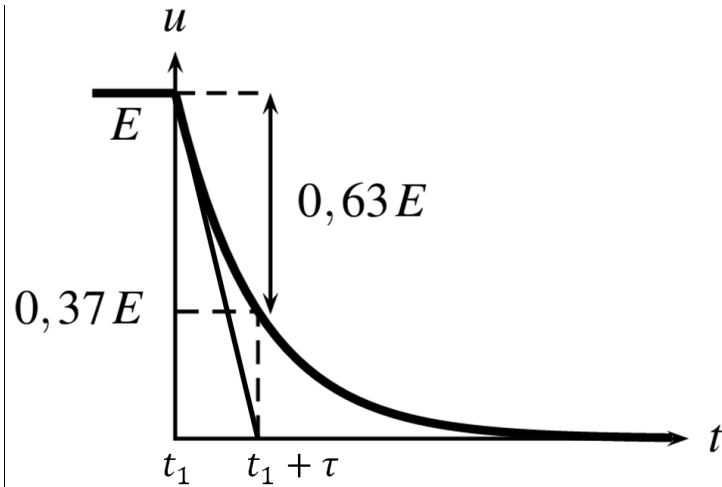
Ainsi :

$$u_C(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau} + \frac{t_1}{\tau}}$$

$$u_C(t) = E.e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

H

On préférera écrire le résultat sous la dernière forme car on fait alors apparaître le terme $t - t_1$, qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant t_1 .



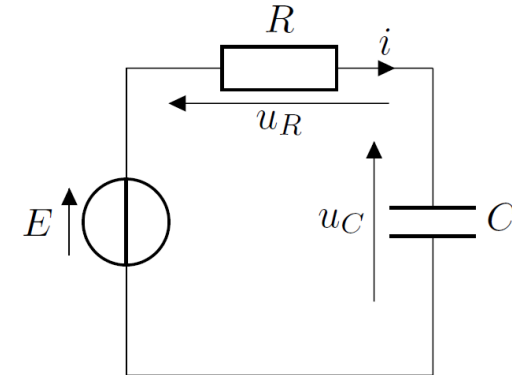
Attention ! Pour déterminer à l'aide du graphique la valeur de τ en utilisant la méthode de l'abscisse à 0,63 de la valeur finale qui fonctionne pour la charge du condensateur, il faut cette-fois ci repérer la valeur à 0,37 de la valeur initiale.

V. Aspects énergétiques

Il est également possible et utile d'aborder le problème de la charge du condensateur en termes d'échange d'énergie entre les différents composants du circuit.

V. 1. Bilan de puissance

En électrocinétique, pour réaliser un **bilan de puissance**, le but est de faire apparaître les puissances fournies ou reçues par les composants $\mathcal{P} = u \cdot i$. Pour cela, il faut généralement **multiplier la loi d'additivité des tensions par l'intensité** traversant le générateur.



Dans le cas du circuit RC soumis à un échelon de tension, on a :

$$E \cdot i = Ri \cdot i + u_C \cdot i$$

$$\text{Or } i = C \frac{du_C}{dt} :$$

$$E \cdot i = Ri^2 + C \frac{du_C}{dt} u_C$$

$$\text{On rappelle que } \frac{d\left(\frac{1}{2}u_C(t)^2\right)}{dt} = u_C \frac{du_C}{dt}$$

$$E \cdot i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)$$

On reconnaît $\mathcal{P}_G = Ei$ la puissance fournie au reste du circuit par le générateur.

$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = Ri^2$ est la puissance perdue par effet Joule dans la résistance.

$E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u_C^2$ l'énergie électrique stockée dans le condensateur.

On rappelle que l'on sait si les puissances sont fournies ou reçues par un dipôle en regardant la convention utilisée (générateur/récepteur).

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \frac{dE_{\text{elec}}}{dt}}_H$$

La conclusion de ce bilan de puissance est la suivante.

Une partie de la puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule, et le reste est fourni au condensateur pour qu'il stocke de l'énergie.

Lorsqu'un bilan de puissance ou d'énergie est demandé, il faut bien penser à mettre en valeur les grandeurs qui ont été introduites.

V. 2. Bilan d'énergie

On souhaite faire un bilan d'énergie entre l'état initial et le régime permanent. On utilise la notation $t = \infty$ qui désigne un instant très grand par rapport à la durée du régime transitoire. Le bilan d'énergie se fera donc entre les instants $t = 0$ et $t = \infty$.

On rappelle que l'énergie électrique fournie ou reçue par un dipôle est liée à la puissance instantanée par la relation :

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt$$

Ainsi pour réaliser un **bilan d'énergie**, il faut **intégrer par rapport au temps le bilan de puissance**.

L'énergie ΔE_G fournie par le générateur est telle que :

$$\begin{aligned} \Delta E_G &= \int_0^{\infty} E i \, dt = \int_0^{\infty} E C \frac{du_C}{dt} \, dt \\ \Delta E_G &= EC \int_0^{\infty} \frac{du_C}{dt} \, dt = EC [u_C]_0^{\infty} \end{aligned}$$

On sait que $u_C(0) = 0$ et $u_C(\infty) = E$

$$\underline{\underline{\Delta E_G = C E^2}}_H$$

La formule est bien homogène car elle présente les mêmes dimensions que la formule $E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u_C^2$.

La variation d'énergie stockée dans le condensateur est :

$$\Delta E_{\text{elec}} = E_{\text{elec}}(\infty) - E_{\text{elec}}(0) = \frac{1}{2} C E^2 - \frac{1}{2} C 0^2$$

$$\boxed{\Delta E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C E^2}_H$$

On remarque qu'il n'y a pas besoin de faire une intégration temporelle, **la variation d'énergie est directement la valeur finale moins la valeur initiale**.

Pour exprimer l'énergie dissipée par effet Joule ΔE_J , il va falloir calculer l'équation temporelle de i .

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du_C}{dt} \\ u_C &= E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = E - E e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i &= \frac{EC}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Cette dernière formule est bien homogène.

[On remarque que la méthode d'utiliser la dérivée temporelle de u_C pour déterminer i est plus rapide que de repasser par une équation différentielle.]

$$\begin{aligned} \Delta E_J &= \int_0^{\infty} R i^2 \, dt = R \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R^2} e^{-2\frac{t}{\tau}} \, dt \\ \Delta E_J &= \frac{E^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} \right]_0^{\infty} = \frac{E^2}{R} \left(-\frac{\tau}{2} \cdot 0 + \frac{\tau}{2} \cdot 1 \right) \end{aligned}$$

Pour rappel, après avoir déterminé une primitive, vérifiez impérativement que celle-ci est correcte en la dérivant.

$$\begin{aligned} \Delta E_J &= \frac{E^2}{R} \left(-\frac{\tau}{2} \cdot 0 + \frac{\tau}{2} \cdot 1 \right) = \frac{\tau E^2}{2 R} \\ \boxed{\Delta E_J = \frac{1}{2} C E^2}_H \end{aligned}$$

Ainsi on a bien :

$$\underline{\underline{\Delta E_G = \Delta E_{elec} + \Delta E_J}}_H$$

On retrouve que l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule et stockée dans le condensateur. Cette formule traduit la conservation de l'énergie. Elle aurait pu être obtenue par intégration par rapport au temps du bilan de puissance, ce qui aurait permis de calculer plus vite ΔE_J à partir de cette expression et des expressions de ΔE_G et ΔE_{elec} .

On constate que la moitié de l'énergie est perdue par effet joule, et ce quelles que soient les valeurs de résistance et de capacité. On pourrait dire que le rendement de ce système est de 0,5.

Dans le cas du régime libre, on aura :

$$\Delta E_J = -\Delta E_{elec} = \frac{1}{2} C E_0^2$$

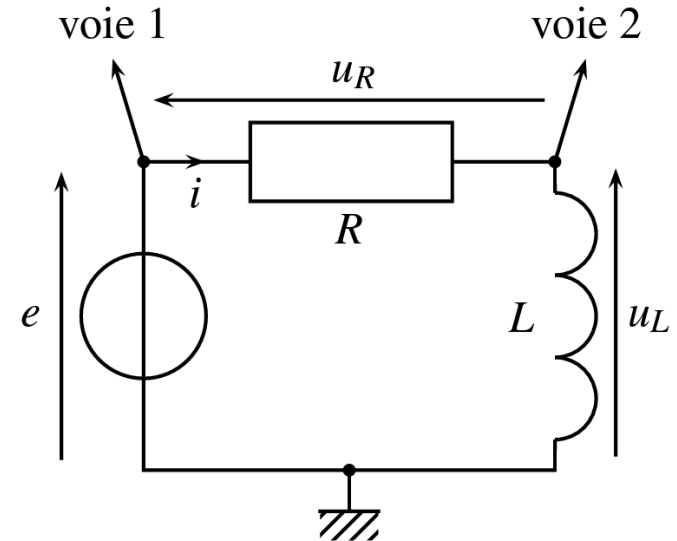
Toute l'énergie stockée dans le condensateur est dissipée par effet Joule.

VII. Circuit RL

VII. 1. Équation différentielle

Dans certains circuits de filtrage de signal et dans les convertisseurs de courant continu, les circuits RL sont utilisés. C'est aussi un circuit utilisé dans diverses modèles de systèmes de conversion de puissance mécanique-électrique.

Le circuit RL est composé d'une résistance et d'une bobine en série.



On cherche à déterminer l'équation différentielle vérifiée par u_L .

Appliquons la loi d'additivité des tensions :

$$e = u_L + u_R = u_L + Ri$$

Pour un échelon de tension, on a $e(t) = E$; pour le régime libre, on a $e(t) = 0$.

Dans les deux cas, on a $\frac{de}{dt} = 0$.

On dérive l'expression par rapport au temps :

$$\frac{du_L}{dt} + R \frac{di}{dt} = 0$$

Or $u_L = L \frac{di}{dt}$:

$$\boxed{\frac{du_L}{dt} + \frac{R}{L} u_L = 0}$$

Cette équation différentielle est correcte pour un échelon de tension et pour le régime libre.

On identifie pour déterminer la constante de temps :

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{\tau}$$

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

On vérifie l'homogénéité :

$$[U] = [R] \cdot I$$

$$[U] = [L] \frac{I}{T}$$

Donc :

$$[R] = \frac{[L]}{T} \Rightarrow \left[\frac{L}{R} \right] = T$$

La solution générale de l'équation différentielle est :

$$u_L(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

VII. 2. Conditions initiales

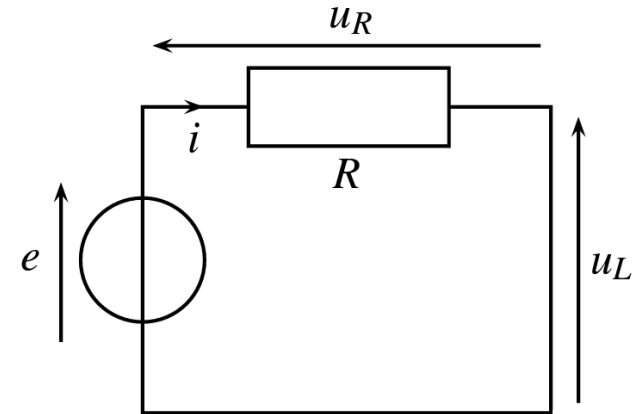
Les conditions initiales sont moins directes que pour le circuit RC. On veut déterminer $u_L(0^+)$.

On suppose qu'avant d'appliquer l'échelon de tension, le régime stationnaire était établi.

On rappelle que pour un régime stationnaire, on a démontré qu'une bobine se comporte comme un fil.

Ainsi on a $u_L(0^-) = 0$. Cependant la tension aux bornes d'une bobine n'est pas continue.

Le schéma électrique équivalent en régime stationnaire est pour $t < 0$ est :

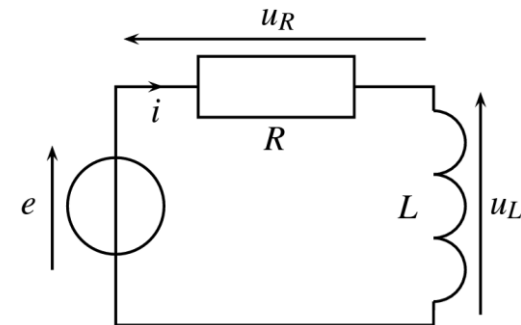


Pour un échelon de tension, on a $e(0^-) = 0$.

On a donc $u_R(0^-) = 0$; soit $i(0^-) = 0$.

L'intensité qui traverse une bobine est une fonction continue, ainsi $i(0^+) = 0$

L'étape suivante pour déterminer $u_L(0^+)$ est de se placer à $t = 0^+$ et appliquer la loi d'additivité des tensions. Puisque l'instant $t = 0^+$ est un instant du régime transitoire, le circuit n'est plus en régime stationnaire, il faut revenir au schéma général du circuit.



On en déduit $u_R(0^+) = 0$. Or $e(0^+) = E$.

D'après la loi d'additivité des tensions, on a donc $u_L(0^+) = E$.

Récapitulons. Pour déterminer les conditions initiales d'un circuit, il faut :

- * Déterminer les valeurs des intensités à travers les bobines et tensions aux bornes des condensateurs **avant** le changement brutal dans le circuit, par exemple avant que $e(t)$ ne change de valeur, à $t = 0^-$ par exemple. Si l'énoncé ne donne pas de raccourci, il faudra écrire que « **D'après l'énoncé, on peut supposer que le circuit est en régime stationnaire avant $t = 0$, ainsi**

le circuit équivalent à $t = 0^-$ est : ». Puis il faudra faire un schéma en remplaçant les condensateurs par des fils coupés ($i = C \frac{du_C}{dt} = 0$) et les bobines par des fils ($u_L = L \frac{di}{dt} = 0$).

- * Utiliser la continuité de la tension aux bornes des condensateurs (ou de sa charge) et de l'intensité du courant à travers les bobines pour déterminer ces valeurs juste après le changement brutal dans le circuit, par exemple à $t = 0^+$.
- * Si l'on a besoin d'une autre grandeur que celles déterminées précédemment, on utilise les lois d'additivité des tensions et des nœuds, en faisant attention au fait que, puisque le circuit est en régime transitoire à $t = 0^+$, on réutilise le circuit dans le cas général, sans dipôles équivalents. Il n'est cependant pas demandé de retracer ce schéma.

Pour remarque, on aurait pu démontrer que pour le circuit RC soumis à un échelon de tension, le condensateur est bien initialement déchargé.

Nous avons démontré que $u_L(0^+) = E$.

$$u_L(0^+) = A \cdot e^{-\frac{0}{\tau}} = A$$

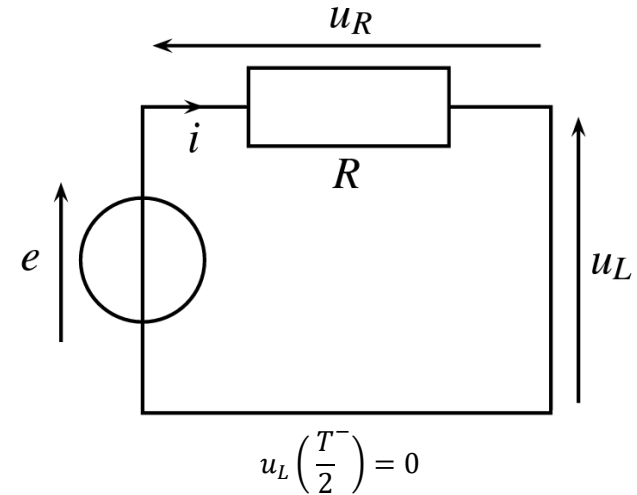
On en déduit $A = E$.

Pour l'échelon de tension, on a donc, pour $t > 0$:

$$\boxed{u_L(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}_{H}$$

On change de situation en laissant d'abord le régime permanent stationnaire s'établir, et à l'instant $\frac{T}{2}$, on passe en régime libre. On cherche alors la condition initiale $u_L\left(\frac{T}{2}^+\right)$.

Le schéma équivalent à $t = \frac{T}{2}^-$ est :



$$\text{Soit } u_R\left(\frac{T}{2}^-\right) = e\left(\frac{T}{2}^-\right).$$

$$\text{Avant le régime libre, } e\left(\frac{T}{2}^-\right) = E$$

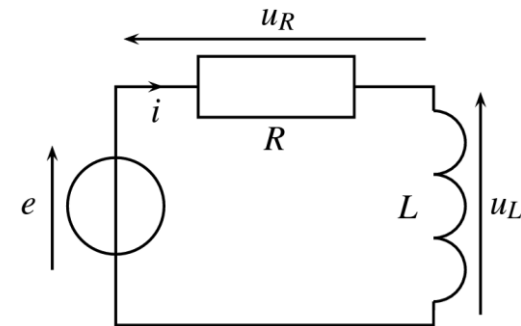
Ainsi :

$$i\left(\frac{T}{2}^-\right) = \frac{E}{R}$$

L'intensité qui traverse la bobine est continue :

$$i\left(\frac{T}{2}^+\right) = \frac{E}{R}$$

Ensuite on réutilise le schéma général :



Pour le régime libre, on a : $e = 0$, soit $u_L = -u_R$.

$$u_L\left(\frac{T}{2}^+\right) = -R \cdot i\left(\frac{T}{2}^+\right)$$

$$u_L\left(\frac{T^+}{2}\right) = -E$$

Nous avons vu que l'équation différentielle est inchangée pour cette nouvelle situation :

$$\frac{du_L}{dt} + \frac{R}{L}u_L = 0$$

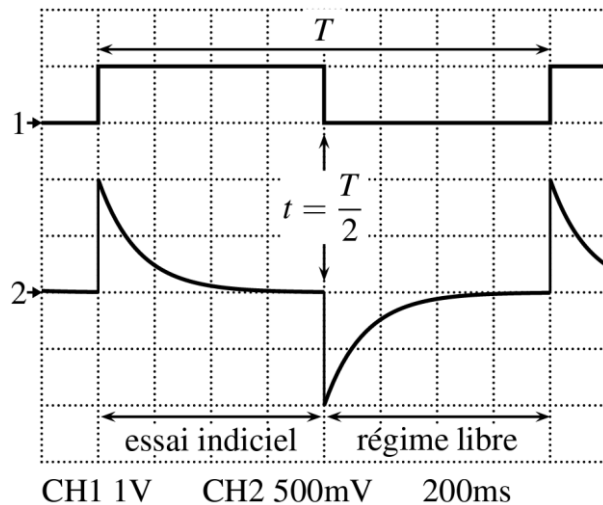
Les solutions sont donc, pour $t > \frac{T}{2}$:

$$u_L(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$-E = A \cdot e^{-\frac{\frac{T}{2}}{\tau}} \Rightarrow A = -E e^{\frac{T}{2\tau}}$$

Et ainsi :

$$u_L(t) = -E \cdot e^{-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau}}$$



À nouveau, le régime permanent est atteint au bout d'une durée de l'ordre de 5τ .

VII. 3. Aspects énergétiques

Comme pour le circuit RC, la puissance fournie par le générateur est utilisée pour stocker de l'énergie dans la bobine, et est dissipée par effet Joule.

Il y a cependant une différence notable : même en régime stationnaire, une puissance continue d'être délivrée puisque l'intensité est non nulle.

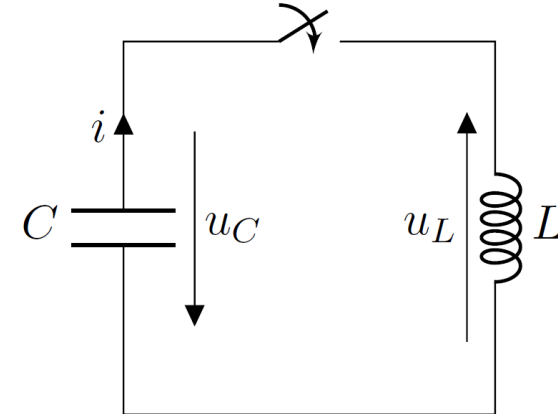
L'énergie $E_{magn} = \frac{1}{2}Li^2$ stockée dans la bobine est constante, ainsi toute la puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule.

VIII. Circuit LC

VIII. 1. Équation différentielle de l'oscillateur harmonique

Le circuit LC est utilisé dans les circuits de filtrage de signal, notamment les tuners qui sélectionnent une bande de fréquence, et les mélangeurs de fréquences. Par conséquent, son utilisation est répandue dans les transmissions sans fil en radiodiffusion, autant pour l'émission que la réception.

On considère le système représenté ci-après, un circuit LC série dont le condensateur C a été préalablement chargé sous la tension E .



À $t < 0$, l'interrupteur est ouvert. À $t \geq 0$, l'interrupteur est fermé.

Nous verrons que le modèle prédit que l'énergie stockée dans le condensateur va être transmis à la bobine, puis inversement, et ce périodiquement.

On choisit d'étudier l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur C. Pour simplifier l'étude, on a représenté les deux tensions pour pouvoir utiliser les équations des dipôles en convention récepteur.

Appliquons la loi des mailles à ce circuit constitué d'une seule maille :

$$u_L + u_C = 0 \Rightarrow L \frac{di}{dt} + u_C = 0$$

Or $i = C \frac{du_C}{dt}$, ainsi $\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2}$.

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

On rappelle que la forme canonique de l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique** est :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Pour $t > 0$, l'équation différentielle sous forme canonique est alors :

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0}$$

La tension aux bornes d'un condensateur dans le circuit LC a donc le comportement d'un oscillateur harmonique.

Par identification, on a :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

On choisit d'avoir $\omega_0 > 0$:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Il s'agit de la **pulsation propre**.

Pour vérifier la cohérence de l'équation différentielle trouvée, on vérifie en premier la cohérence des signes. Puisqu'il n'y a pas d'apport d'énergie extérieur au circuit, la tension u_C est bornée, elle ne peut pas diverger vers l'infini. Ainsi, il faut que les signes dans l'équation différentielle soient positifs, ce qui est le cas.

Ensuite faisons une analyse dimensionnelle.

$$\begin{aligned} [U] &= [L] \frac{I}{T} \\ I &= [C] \frac{[U]}{T} \\ [U].I &= [LC] \frac{[U]I}{T^2} \Rightarrow \left[\frac{1}{LC} \right] = \frac{1}{T^2} \\ \left[\frac{1}{\sqrt{LC}} \right] &= T^{-1} \end{aligned}$$

On obtient bien que la formule de la pulsation propre a la dimension de l'inverse d'une durée.

VIII. 2. Résolution

La solution générale de l'équation différentielle homogène trouvée est, pour $t > 0$:

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

On sait que $u_C(0^-) = E$. Puisque la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue, $u_C(0^+) = E$.

$$u_C(0^+) = A \cos(0) + B \sin(0) = A$$

On en déduit que $A = E$.

Pour trouver B , il va nous falloir trouver une condition initiale sur $\frac{du_C}{dt}$.

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

Le circuit est ouvert avant l'instant initial : $i(0^-) = 0$.

L'intensité qui traverse une bobine est continue, ainsi $i(0^+) = 0$.

Donc :

$$\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$$

Or :

$$\frac{du_C}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0 + B\omega_0$$

Donc $B\omega_0 = 0$, soit $B = 0$.

Attention, il est très fréquent que dans les cas où $B \neq 0$, les élèves oublient le ω_0 en voulant aller trop vite.

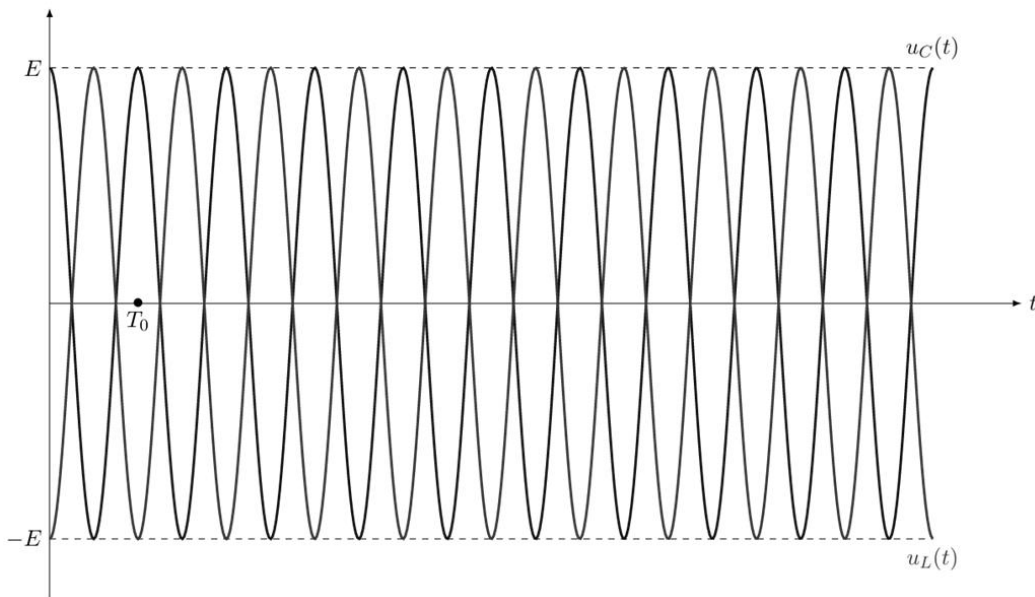
On a donc, pour $t > 0$:

$$\boxed{u_C = E \cos(\omega_0 t)}_H$$

Il est autorisé d'écrire la solution en utilisant ω_0 lorsque cette grandeur n'est pas donnée dans l'énoncé, mais dans ce cas il est **obligatoire d'encadrer son expression**.

En utilisant la loi des mailles, on en déduit :

$$\underline{\underline{u_L = -E \cos(\omega_0 t)}}$$



L'amplitude crête à crête d'un signal est la différence entre sa valeur maximale et sa valeur minimale. L'amplitude crête à crête des tensions est donc ici de $2E$. L'amplitude est la moitié de l'amplitude crête à crête. L'amplitude est donc de E .

La tension u_C revient à l'état initial au bout d'une période T_0 lorsque $\omega_0 T_0 = 2\pi$.

On a donc :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}_H$$

Ainsi la fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$ du signal est :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}_H$$

On précise que l'on a également :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

Cette dernière équation est analogue au cas circulaire uniforme où la vitesse angulaire ω est égale à $2\pi f$, avec f le nombre de tours effectués par unité de temps.

IX. Étude énergétique du circuit LC

IX. Bilan de puissance

On multiplie la loi des mailles par l'intensité i :

$$u_L \cdot i + u_C \cdot i = 0$$

$$L \frac{di}{dt} \cdot i + u_C C \frac{du_C}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) = 0$$

On a donc :

$$\frac{dE_{magn}}{dt} = - \frac{dE_{elec}}{dt}_H$$

Lorsque l'énergie E_{elec} stockée dans le condensateur diminue, l'énergie E_{magn} stockée dans la bobine augmente, et inversement.

IX. 2. Bilan d'énergie

On peut définir une énergie stockée totale $E_{tot} = E_{magn} + E_{elec}$. On a alors :

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \frac{dE_{magn}}{dt} + \frac{dE_{elec}}{dt}$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = 0$$

Ainsi l'énergie stockée totale est une constante C_E homogène à une énergie. On utilise une condition initiale pour la déterminer :

$$E_{tot}(0) = \frac{1}{2} L i(0^+)^2 + \frac{1}{2} C u_C(0^+)^2 = 0 + \frac{1}{2} C E^2$$

$$E_{tot}(t) = \frac{1}{2} C E^2_H$$

On a également :

$$E_{elec} = \frac{1}{2} C u_C^2$$

$$E_{elec} = \frac{1}{2} C E^2 \cos(\omega_0 t)^2_H$$

Aussi :

$$E_{magn} = \frac{1}{2} Li^2$$

Pour déterminer E_{magn} soit on utilise $E_{tot} = E_{magn} + E_{elec}$ et les expressions des deux autres énergies. Il est cependant utile de connaître la méthode pour déterminer $i(t)$:

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$i = -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$i = -E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_0 t)$$

Pour vérifier l'homogénéité, on doit démontrer que $\sqrt{\frac{C}{L}}$ a la dimension de l'inverse d'une résistance.

$$I = [C] \frac{[U]}{T}$$

$$[U] = [L] \frac{I}{T}$$

$$\frac{I}{[U]} = \left[\frac{C}{L} \right] \frac{[U]}{I} \Rightarrow \frac{1}{[R]^2} = \left[\frac{C}{L} \right]$$

Ainsi on a bien $\left[\sqrt{\frac{C}{L}} \right] = \frac{1}{[R]}$.

On remplace i dans l'expression de E_{magn} :

$$E_{magn} = \frac{1}{2} L \left(-E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_0 t) \right)^2$$

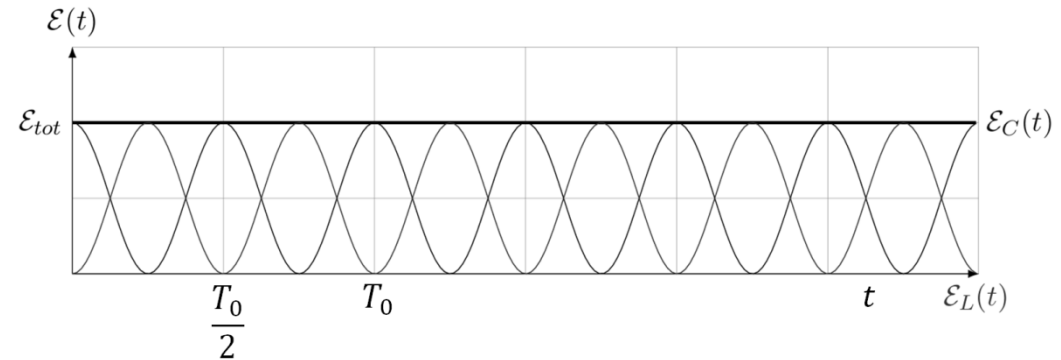
$$E_{magn} = \frac{1}{2} L E^2 \frac{C}{L} \sin(\omega_0 t)^2$$

$$E_{magn} = \frac{1}{2} C E^2 \sin(\omega_0 t)^2$$

On a $E_{magn} + E_{elec} = \frac{1}{2} C E^2 [\sin(\omega_0 t)^2 + \cos(\omega_0 t)^2] = \frac{1}{2} C E^2$

Ainsi on retrouve que $E_{magn} + E_{elec} = \frac{1}{2} C E^2 = E_{tot}$.

Pour tracer les énergies, on rappelle qu'il est utile de placer plusieurs points bien choisis et d'en déduire la courbe.



Les deux énergies stockées oscillent deux fois plus vite que les fonctions u_C ou i . Leur période T est telle que $T = \frac{T_0}{2}$.

On remarque que le condensateur cède l'intégralité de son énergie à la bobine, puis l'inverse se produit, et ainsi de suite.

Annexe A. Réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation quelconque

Pour le circuit RC, nous avons déterminé u_C dans le cas d'un échelon de tension et du régime libre ; ainsi, nous connaissons la forme de u_C lorsque $e(t)$ est un signal crêteau symétrique de valeur maximale E , de valeur minimale 0, et de période T telle que $\frac{T}{2}$ est plus grande de la durée du régime transitoire $\Delta t_{tr} = 5\tau$.

On aimerait à présent savoir quelle est la fonction u_C si la période est plus petite que la durée du régime transitoire. Il nous est possible de résoudre ce problème, cependant les calculs seraient longs et il y aurait de trop nombreuses équations de parties de courbe.

A. 1. Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est un algorithme permettant de résoudre, par approximation, des équations différentielles à partir de conditions initiales.

L'algorithme calcule pas à pas, au cours du temps, les valeurs prises par la grandeur étudiée, à partir des valeurs précédentes et de l'équation différentielle.

On cherche à exprimer $x(t + dt)$ en utilisant $x(t)$ et $\frac{dx}{dt}(t)$, ce dernier pouvant être déduit de $x(t)$ grâce à l'équation différentielle.

En physique-chimie, puisque la durée infinitésimale dt est aussi petite que l'on souhaite, on a :

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt}$$

Au passage, on rappelle que la variation infinitésimale dx de la grandeur x est alors telle que :

$$dx = x(t + dt) - x(t)$$

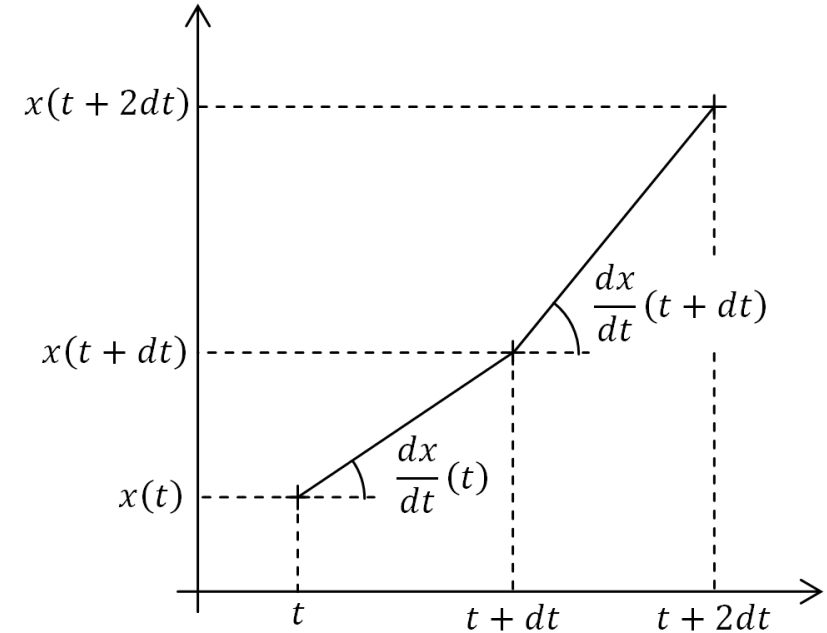
On a :

$$x(t + dt) - x(t) = \frac{dx}{dt}(t) \cdot dt$$

$$x(t + dt) = x(t) + \frac{dx}{dt}(t) \cdot dt$$

Ainsi, l'algorithme a le fonctionnement suivant : on choisit une valeur dt assez faible pour que l'approximation soit correcte, et on part d'une condition initiale.

Ensuite, on calcule les valeurs suivantes en calculant la grandeur $x(t) + \frac{dx}{dt}(t) \cdot dt$. Pour obtenir $\frac{dx}{dt}(t)$, on utilise l'équation différentielle et $x(t)$.



Si on pose i la variable qui permet de repérer le temps dans l'algorithme, dt le pas de temps, et deriv la fonction qui donne la valeur de la dérivée de x en fonction des autres paramètres, on a alors, pour $i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ avec n le nombre de points :

$$x[i+1] = x[i] + \text{deriv}(x[i], t[i]) \cdot dt$$

Dans le cas d'une équation d'ordre 2, il faudra également une condition initiale pour $\frac{dx}{dt}$, et appliquer la formule $\frac{dx}{dt}(t + dt) = \frac{dx}{dt}(t) + \frac{d^2x}{dt^2}(t) \cdot dt$

Le pas de temps dt ne doit cependant pas être trop petit pour que la simulation ne soit pas trop longue et prenne trop de place dans la mémoire vive.

Dans le cas du circuit RC, puisque l'on a :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{e(t)}{RC}$$

On a alors :

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C + \frac{e(t)}{RC}$$

A. 2. Algorithme Python

On se place dans le cas $T = \tau$, avec $\tau = 1 \text{ ms}$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# méthode Euler
def euler(f,x0,t):
    n = len(t)
    h = t[1]-t[0]
    x = np.zeros(n)
    x[0] = x0
    for i in range(n-1):
        x[i+1] = x[i] + h * f(x[i],t[i])
    return x

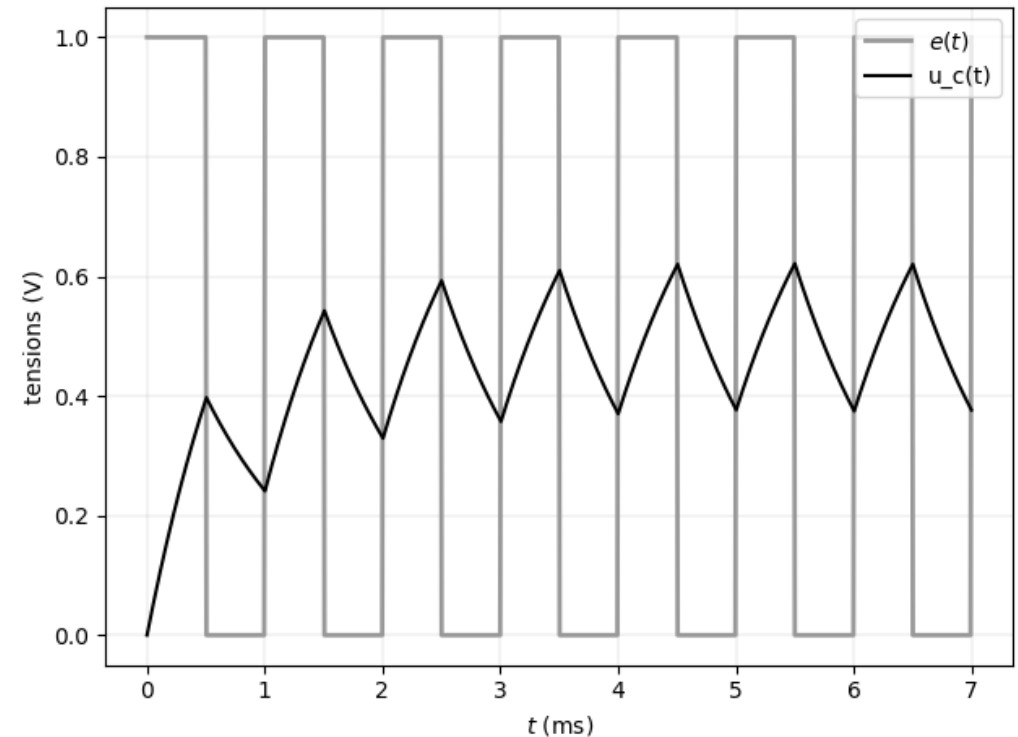
# Circuit RC soumis à un signal créneau (période T, rapport cyclique D)
# Fonction créneau
T = 0.001 #secondes
D = 0.5 # rapport cyclique entre 0 et 1
def creneau(t):
    if t%T < D * T:
        return 1
    else :
        return 0

# équation différentielle : du/dt = -u/tau + e(t)/tau, u(0) = u0
tau = 1*T
def f(u,t) :
    return -u/tau + creneau(t)/tau

# résolution de l'équation différentielle
t0 = 0
t1 = 7*T
n = 1000
t = np.linspace(t0,t1,n)
u0 = 0#V
u = euler(f,u0,t)

#Graphe
```

```
e = np.array([creneau(temps) for temps in t])
plt.figure()
plt.plot(t*1000,e,color='0.6', label = '$e(t)$',linewidth=2 )
plt.plot(t*1000,u,'k',label = 'u_c(t)')
plt.xlabel('$t$ (ms)')
plt.ylabel('tensions (V)')
plt.legend(loc=1)
plt.tight_layout()
plt.grid(linewidth=0.2)
plt.show()
```



À chaque demi-période on peut reconnaître le début d'une forme exponentielle. On constate qu'au bout d'un moment le signal adopte un comportement périodique semblable à un signal triangulaire. Il est stable. On dit alors que le **régime permanent** est atteint, aussi appelé **régime établi**.