

Problème 1

Soit f définie par $f : x \mapsto e^{\cos(x)}$. On rappelle que $2 < e < 3$.

A Réduction de l'intervalle d'étude

1. Avec $g : x \mapsto \cos(x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h : x \mapsto \exp(x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f = h \circ g$.
 f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition car :
 - g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \in \mathbb{R}$, ensemble de définition et de dérivabilité de h .
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = e^{\cos(x+2\pi)} = e^{\cos(x)} = e^x$.
 Donc f est périodique de période 2π . On peut alors étudier f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in D_f$ et $f(-x) = e^{\cos(-x)} = e^{\cos(x)} = f(x)$.
 Donc f est paire, en particulier $f|_{[-\pi, \pi]}$ également et on peut alors étudier f sur l'intervalle $I = [0, \pi]$.

B Étude

4. $f = h \circ g$ donc $f' = g' \times (h' \circ g)$. Donc pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$.
5. $\sin$ est positive sur $I = [0, \pi]$ et pour tout $x \in I$, $e^{\cos(x)} > 0$ donc f' est négative sur I et ainsi f est décroissante sur I .
6. Pour $x \in I$, $f(x) = 1 \Leftrightarrow e^{\cos(x)} = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$. (La solution est unique car $\cos$ est bijective sur $[0, \pi]$).
7. Après avoir tracé la courbe sur $[0, \pi]$ (décroissante, à valeurs dans $\left[\frac{1}{e}, e\right]$, avec une demi-tangente horizontale en 0 et en π car $f'(0) = f'(\pi) = 0$), on complète par symétrie par rapport à l'axe vertical (du fait de la parité) puis par translations (du fait de la périodicité).

C Précisions

8. f est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, elle réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ dans $\left[\frac{1}{e}, e\right]$, qui contient la valeur 2.
 D'après le théorème de la bijection, $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $[0, \pi]$.
9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - x) = \cos(x - \pi) = \cos(\pi + x)$ (par parité puis par périodicité de $\cos$). Donc $f(\pi - x) = f(x + \pi)$.
 Cela se traduit pour la courbe représentative de f par une symétrie par rapport à la droite $x = \pi$.

Problème 2

A Inégalité arithmético-géométrique

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité suivante.

Théorème 1 (*Inégalité arithmético-géométrique*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n nombres $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\prod_{k=1}^n a_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^n.$$

1. Cette inégalité est vraie dans les deux cas particuliers suivants :

(a) pour $n = 1$, $\prod_{k=1}^1 a_k = a_1$ et $\left(\frac{1}{1} \sum_{k=1}^1 a_k \right)^1 = a_1$;

(b) lorsqu'un des nombres a_k est nul, on a $\prod_{k=1}^1 a_k = 0$ et $0 \leq \sum_{k=1}^n a_k$.

2. On note $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$. Ainsi, $n = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n a_k$ ($m > 0$ car les a_k le sont).

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{m} - 1 \right) = \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) - n = \boxed{0}.$$

3. **M1** Étudier la fonction $t \mapsto \ln(t) - t + 1$ et montrer qu'elle est négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

M2 Utiliser la concavité de $\ln$, $y = t - 1$ étant l'équation de sa tangente en 1.

M3 Utiliser l'inégalité $e^t \geq t + 1$ vue précédemment et appliquer $\ln$, croissante.

4. Pour tout k , $\ln\left(\frac{a_k}{m}\right) \leq \frac{a_k}{m} - 1$. Donc $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{a_k}{m}\right) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{m} - 1\right) \boxed{\leq 0}$.

5. Or $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{a_k}{m}\right) = \left(\sum_{k=1}^n \ln(a_k) \right) - n \ln(m)$. Donc $\sum_{k=1}^n \ln(a_k) \leq n \ln(m)$.

En composant avec $\exp$, on obtient $\prod_{k=1}^n a_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^n$.

B Inégalité de Carleman

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité suivante.

Théorème 2 (Inégalité de Carleman)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et n nombres $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\sum_{n=1}^N \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq e \sum_{n=1}^N x_n.$$

6. Cette inégalité est vraie dans le cas où $N = 1$ car alors $\sum_{n=1}^1 \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} = x_1$ et on a bien $x_1 \leq e x_1$.

On supposera désormais que $N > 1$. Pour tout $1 \leq n \leq N$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n k x_k \quad \text{et} \quad U_n = \prod_{k=1}^n x_k.$$

7. Pour tout $1 \leq n \leq N$, $\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n k x_k = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n k \prod_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n!} n! \prod_{k=1}^n x_k = U_n$.

8. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, $\prod_{k=1}^n k x_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k x_k \right)^n = \left(\frac{T_n}{n} \right)^n$.

Donc $U_n \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{T_n}{n} \right)^n$.

9. (a) $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$. Or d'après 3, $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}$.

Donc $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq \exp \left(n \times \frac{1}{n} \right) \leq e$.

(b) **Init.** Pour $n = 1$, on a bien $2 = \left(1 + \frac{1}{1} \right)$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k$.

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{(n+1)^n}{n!} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{1}{n!} \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)}.$$

On a bien $\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}$, ce qui achève la récurrence.

10. On a $U_n \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{T_n}{n} \right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!} \left(\frac{T_n}{n(n+1)} \right)^n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right) \left(\frac{T_n}{n(n+1)} \right)^n$.

Or pour tout k , $\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \leq e$. Donc $U_n \leq \left(\frac{e T_n}{n(n+1)} \right)^n$.

11. Donc $(U_n)^{1/n} \leq \frac{e T_n}{n(n+1)} = e \sum_{k=1}^n \frac{k x_k}{n(n+1)}$. Finalement $\sum_{n=1}^N (U_n)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \frac{k x_k}{n(n+1)}$.

12. On a $\boxed{\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}.$

Ainsi, $\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \frac{kx_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=k}^N \frac{kx_k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^N kx_k \sum_{n=k}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$

Par somme télescopique, $\boxed{\sum_{n=1}^N (U_n)^{1/n} \leq e \sum_{k=1}^n kx_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right)}.$

13. On a $kx_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right) = x_k \underbrace{\left(1 - \frac{k}{N+1} \right)}_{\leq 1} \leq x_k.$

Finalement, $\boxed{\sum_{n=1}^N \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq e \sum_{k=1}^N x_k},$ l'inégalité de Carleman.

14. En choisissant $x_k = k$ pour tout k , $U_n = n!$ et $S_N = \frac{N(N+1)}{2}$. Or $N \leq N^2$, donc $N^2 + N \leq 2N^2$ et donc $S_N \leq N^2$.

D'après l'inégalité de Carleman, $\sum_{n=1}^N (n!)^{1/n} \leq eS_N$ et finalement $\boxed{\frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N (n!)^{1/n} \leq e}.$