

MPSI – Physique-Chimie – Correction du devoir surveillé 1

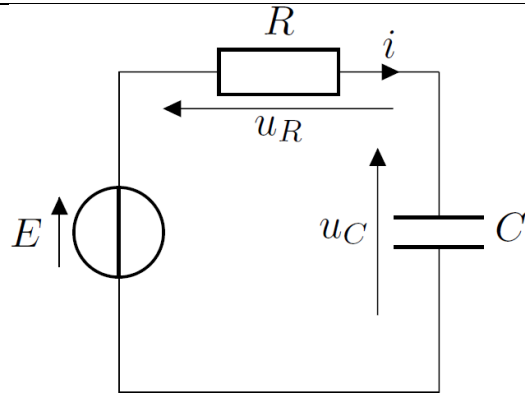
Exercice 1 : Étude d'un circuit RC

On étudie un circuit série constitué d'un générateur basses fréquences (GBF) de tension notée $e(t)$, d'une résistance $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et d'un condensateur idéal de capacité $C = 4,7 \cdot 10^2 \text{ nF}$. L'intensité i du circuit est définie de telle sorte que le GBF soit représenté en convention générateur. On soumet ce circuit à un échelon de tension de valeur $E = 3,0 \text{ V}$ à partir de l'instant initial $t_0 = 0$. Le condensateur est initialement déchargé.

1. Quel est l'ordre de grandeur de la résistance de sortie du GBF ? Expliquer pourquoi celle-ci peut être négligée.

La résistance de sortie r_s du GBF a pour ordre de grandeur $\underline{50 \Omega}$. Placée en série avec la résistance R , la résistance équivalente est $R + r_s$. Or puisque r_s est négligeable par rapport à R , la résistance équivalente peut être approximée par R , et ainsi cela revient à négliger l'effet de la résistance de sortie.

2. On rappelle que certaines grandeurs doivent obligatoirement être introduites à l'aide d'un schéma. Pour $t > t_0$, établir l'équation différentielle sous forme canonique vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur, définie de telle sorte que le condensateur soit représenté en convention récepteur.



Appliquons la loi d'additivité des tensions :

$$\begin{aligned} E &= u_R + u_C \\ u_R &= Ri = RC \frac{du_C}{dt} \\ E &= u_C + RC \frac{du_C}{dt} \\ \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}}_H \end{aligned}$$

3. En déduire la constante de temps τ du circuit et vérifier l'homogénéité de sa formule.

Par identification on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} &= RC \\ [U] &= [R] \cdot I \\ I &= [C] \frac{[U]}{T} \\ [U] &= [RC] \cdot \frac{[U]}{T} \\ [RC] &= T \end{aligned}$$

L'équation est bien homogène.

4. Déterminer $u_C(t = 0^+)$.

Le condensateur est initialement déchargé :

$$u_C(t = 0^-) = 0$$

La tension aux bornes du condensateur est continue :

$$\underline{\underline{u_C(t = 0^+) = 0}}$$

5. Exprimer $u_C(t)$.

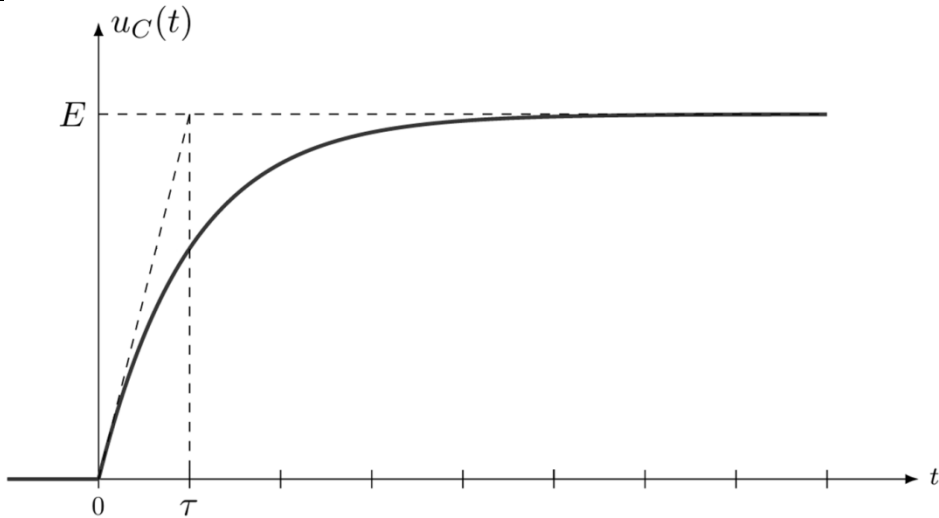
La solution générale de l'équation différentielle est :

$$u_C = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

$$u_C(t = 0^+) = A + E \Rightarrow A = -E$$

$$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \Big|_H$$

6. Représenter $u_C(t)$ ainsi que sa tangente à l'origine.



7. Évaluer un ordre de grandeur du régime transitoire Δt_{tr} .

$$\Delta t_{tr} = 5\tau$$

$$\underline{\underline{\Delta t_{tr} = 5RC}}$$

$$\Delta t_{tr} = 5.1.0.10^3.4.7.10^{-7}$$

$$\underline{\underline{\Delta t_{tr} = 2.4.10^{-3}s}}$$

8. Exprimer $i(t)$ en fonction de E , R et τ .

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \Big|_H$$

9. On rappelle qu'il est obligatoire d'indiquer à quoi correspondent les notations que vous introduisez. Établir la formule de bilan de puissance pour le circuit. Commenter.

$$E \cdot i = Ri \cdot i + u_C \cdot i$$

$$E \cdot i = Ri^2 + C \frac{du_C}{dt} u_C$$

$$E \cdot i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)$$

On note $\mathcal{P}_G$ la puissance fournie par le générateur, $\mathcal{P}_{Joule}$ la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance, et $E_{elec} = \frac{1}{2} C u_C^2$ l'énergie stockée dans le condensateur.

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_{Joule} + \frac{dE_{elec}}{dt} \Big|_H$$

Cette expression traduit la conservation de l'énergie.

Une partie de la puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule, et le reste est fourni au condensateur pour qu'il stocke de l'énergie.

10. Établir séparément les expressions des différents termes du bilan d'énergie pour le circuit entre l'instant initial et le régime permanent. Commenter.

L'énergie ΔE_G fournie par le générateur est telle que :

$$\Delta E_G = \int_0^\infty Ei \, dt = \int_0^\infty EC \frac{du_C}{dt} \, dt$$

$$\Delta E_G = EC [u_C]_0^\infty$$

$$\underline{\underline{\Delta E_G = CE^2}} \Big|_H$$

La variation d'énergie stockée dans le condensateur est :

$$\Delta E_{elec} = E_{elec}(\infty) - E_{elec}(0) = \frac{1}{2} C E^2 - \frac{1}{2} C 0^2$$

$$\boxed{\Delta E_{elec} = \frac{1}{2} C E^2}_H$$

L'énergie dissipée par effet Joule ΔE_J est telle que :

$$\Delta E_J = \int_0^\infty R i^2 dt = R \int_0^\infty \frac{E^2}{R^2} e^{-2\frac{t}{\tau}} dt$$

$$\Delta E_J = \frac{E^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} \right]_0^\infty$$

$$\boxed{\Delta E_J = \frac{1}{2} C E^2}_H$$

On a bien :

$$\Delta E_G = \Delta E_{elec} + \Delta E_J$$

Ce qui traduit la conservation de l'énergie.

La moitié de l'énergie est perdue par effet joule, et ce quelles que soient les valeurs de résistance et de capacité.

11. À partir d'un instant $t_1 > t_0 + \Delta t_{tr}$, on impose un régime libre au circuit RC. Établir $u_C(t)$ pour $t > t_1$.

Pour le régime libre, on a $e(t) = 0$, ainsi en utilisant le résultat de la question 2, on obtient, pour $t > t_1$:

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle est, pour $t > t_1$:

$$u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Avant t_1 , le régime permanent a été atteint, ainsi $u_C(t = t_1^-) = E$.

Or la tension aux bornes du condensateur est continue, donc $u_C(t = t_1^+) = E$.

$$u_C(t = t_1^+) = A \cdot e^{-\frac{t_1}{\tau}} \Rightarrow A = E e^{\frac{t_1}{\tau}}$$

Ainsi, pour $t > t_1$:

$$\boxed{u_C(t) = E \cdot e^{\frac{1}{\tau}(-t+t_1)}}_H$$

[La forme $u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$ est mieux mais les deux résultats sont acceptés]

12. Exprimer la condition d'application de l'approximation des régimes quasi-stationnaires en fonction de la taille caractéristique $L = 1 \text{ m}$ du circuit et de la durée caractéristique τ du phénomène étudié. Celle-ci est-elle respectée ?

Pour que l'ARQS soit respecté, il faut que le temps de parcours des ondes électromagnétiques à travers le circuit soit bien plus faible que la durée caractéristique du phénomène étudié :

$$\boxed{\frac{L}{c} \ll \tau}_H$$

$$\frac{L}{c} = \frac{1}{3,00 \cdot 10^8}$$

$$\frac{L}{c} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

$$\tau = 1,0 \cdot 10^3 \cdot 4,7 \cdot 10^{-7}$$

$$\tau = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

$$\frac{L}{c} \ll \tau, \text{ la condition de d'application de l'ARQS est respectée.}$$

À partir de l'exercice suivant, les données sont fournies en fin d'exercices.

Exercice 2 : Structure d'entités chimiques

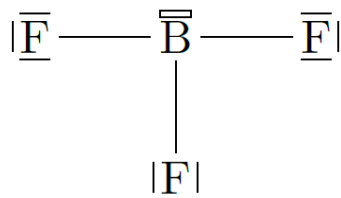
13. Quel est le nombre d'électrons de valence du bore ?

Le bore se situe dans la première colonne du bloc p, il a donc 3 électrons de valence.

14. Quel est le nombre d'électrons de valence de la molécule du trifluorure de bore BF_3 ? Représenter son schéma de Lewis.

Le fluor a 7 électrons de valence, la molécule BF_3 a donc $3 + 3 * 7 = 24$ électrons de valence.

La molécule présente donc 12 doublets d'électrons.



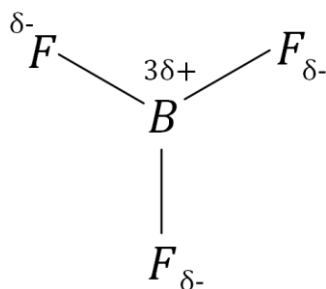
15. Quelle est la géométrie de cette molécule ? Expliquer la raison énergétique de cette géométrie.

L'atome de bore central présente 3 liaisons simples, la molécule est trigonale plane.

La molécule adopte cette géométrie car il s'agit de celle qui permet que les doublets d'électrons soient les plus éloignés possibles afin de minimiser l'énergie d'interaction entre les électrons.

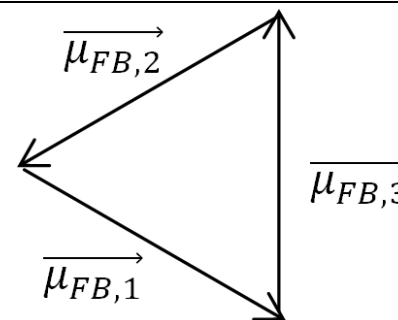
16. Représenter les charges partielles présentes sur le trifluorure de bore.

Le fluor est plus à droite dans le tableau périodique que le bore, ainsi il est plus électronégatif.



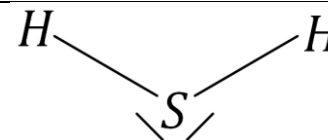
17. Faire un schéma permettant la détermination du moment dipolaire du trifluorure de bore. Commenter.

On représente la somme des moments dipolaires de chaque liaison. Un vecteur moment dipolaire est dans le sens de la charge négative vers la charge positive.



La somme est égale au vecteur nul, ainsi la molécule est apolaire.

18. Sans justification, représenter le schéma de Lewis du sulfure d'hydrogène SH_2 .

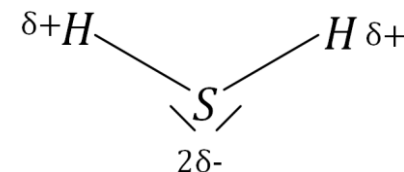


19. Quelle est la géométrie de cette molécule ?

L'atome de soufre central possède deux liaisons simples et deux doublets non liants. La molécule SH_2 est donc coudée.

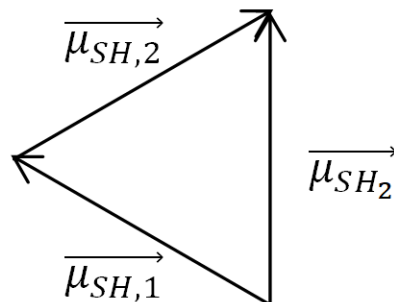
20. Représenter les charges partielles présentes sur le sulfure d'hydrogène.

L'électronégativité du soufre est plus grande que l'électronégativité de l'hydrogène.



21. Faire un schéma permettant la détermination du moment dipolaire du sulfure d'hydrogène. Comment nomme-t-on ce dernier ? Commenter.

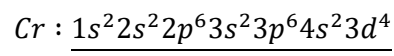
On représente la somme des moments dipolaires de chaque liaison.



Le moment dipolaire $\overrightarrow{\mu_{SH_2}}$ de la molécule n'est pas égal au vecteur nul, on le nomme alors moment dipolaire permanent. La molécule est donc polaire.

22. Le chrome *Cr* a un numéro atomique égal à 24. Donner sa configuration électronique.

D'après la règle de Klechkowski, on a :



23. Le molybdène *Mo* est en dessous du chrome dans le tableau périodique des éléments. Quel est son numéro atomique ?

Pour passer du chrome à l'élément qui est en dessous de lui dans le tableau périodique, il faut ajouter à 24 les nombres d'électrons dans les couches s, p et d.

$$Z_{Mo} = 24 + 2 + 6 + 10$$

$$\underline{\underline{Z_{Mo} = 42}}$$

Données pour l'exercice « Structure d'entités chimiques » :

On donne ci-après les trois premières lignes du tableau périodique.

H							He
Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar

On donne les électronégativités suivantes : $\chi(H) = 2,2$; $\chi(S) = 2,6$.

Exercice 3 : Observation du Fort Boyard

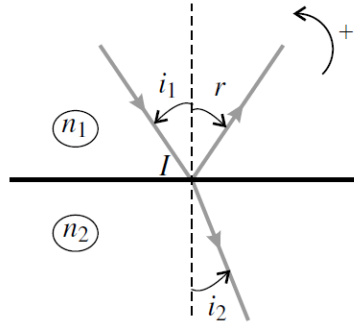
Situé au large de la Charente-Maritime, le Fort Boyard est édifié sous l'impulsion de Napoléon afin de protéger la rade, l'embouchure de la Charente, le port et surtout le grand arsenal de Rochefort des assauts de la marine anglaise. Construit entre 1804 et 1857, il est transformé en prison quelques années à peine après son achèvement. Cet imposant vaisseau de pierre est dorénavant connu dans le monde entier grâce au jeu télévisé du même nom, tourné depuis 1990, dans lequel une équipe généralement constituée de six candidats réalise diverses épreuves physiques et intellectuelles afin de gagner un trésor en boyards. Ce sujet s'intéresse à certains aspects du jeu.



Figure 1 – Fort Boyard

Avant de se lancer à l'assaut du Fort, les candidats l'observent depuis l'Île d'Aix à l'aide de jumelles, sommairement modélisées par une paire de lunettes de Galilée. Chaque lunette comprend deux lentilles, l'une plan convexe, l'autre plan concave.

24. Rappeler les lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction uniquement, au moyen d'un schéma faisant apparaître les grandeurs utiles.



D'après les lois de Snell-Descartes, le rayon réfracté appartient au plan d'incidence, défini par le rayon incident et la normale au dioptre, et on a :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

25. La figure 2 représente les lentilles plan convexe et plan concave, taillées dans un verre d'indice optique $n > 1$ et plongées dans l'air d'indice optique $n_{air} = 1$. Recopier la figure et tracer qualitativement le suivi des rayons au travers du dioptre air/verre, puis du dioptre verre/air. Bien qu'aucun calcul ne soit attendu, détailler la démarche adoptée en utilisant la réponse à la **question précédente**.

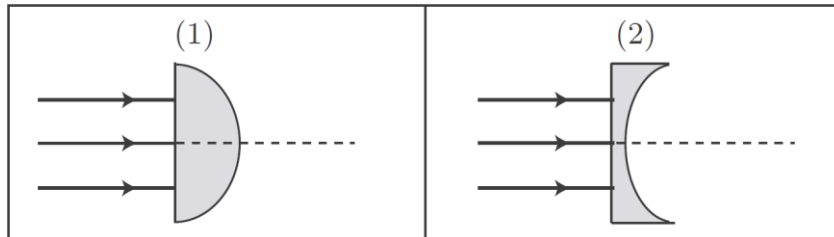
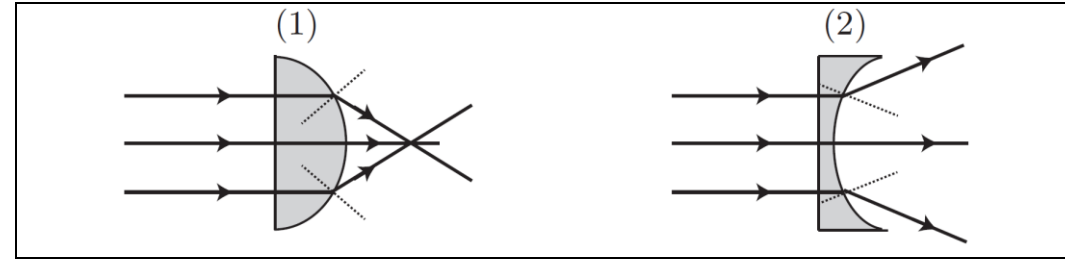


Figure 2 – Lentilles plan convexe (1) et plan concave (2)

Les rayons ne sont pas déviés au dioptre air/verre car ils arrivent en incidence normale ($i_2 = 0$). Au dioptre verre/air, on suppose qu'il n'y a pas de réflexion totale, l'angle de réfraction est plus grand que l'angle d'incidence car l'indice de l'air est plus faible que celui du verre. Les normales aux dioptres sont représentées en pointillés sur la figure ci-dessous.



26. En déduire la nature, convergente ou divergente, de chaque lentille.

La lentille (1) fait converger les rayons, elle est donc convergente. La lentille (2) fait diverger les rayons, elle est donc divergente.

Dans la suite, les lentilles sont supposées minces et utilisées dans les conditions de Gauss. Chaque lunette de Galilée est composée d'une lentille (L_1) de distance focale $f'_1 > 0$ constituant l'objectif de la lunette, et d'une lentille (L_2) de distance focale $f'_2 < 0$, telle que $|f'_2| < f'_1$, constituant l'oculaire (voir figure 3). On note respectivement O_1 , F_1 et F'_1 le centre optique, le foyer principal objet et le foyer principal image de l'objectif. De même, on note respectivement O_2 , F_2 et F'_2 le centre optique, le foyer principal objet et le foyer principal image de l'oculaire.

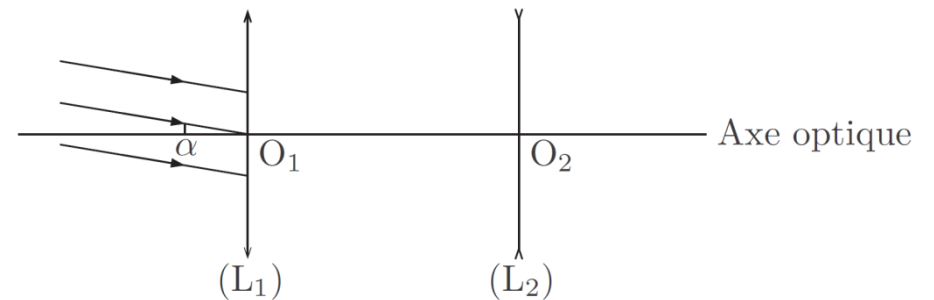


Figure 3 – Schéma optique de la lunette de Galilée

La lunette est réglée de façon à donner une image à l'infini d'un objet à l'infini, ce qui permet à l'observateur d'éviter toute fatigue. Dans ces conditions, la lunette est dite afocale.

27. Préciser et justifier la position relative des foyers des lentilles. En déduire l'encombrement $\ell = O_1O_2$ en fonction de f'_1 et de $|f'_2|$. [Attention, une erreur classique est d'oublier qu'une lentille divergente n'a pas les mêmes caractéristiques qu'une lentille convergente.]

Pour que la lunette donne d'un objet à l'infini une image à l'infini, il faut que le foyer principal image de la lentille convergente et le foyer principal objet de la lentille divergente soient confondus : $F'_1 = F_2$.

$$\ell = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2}$$

$$\overline{F_2O_2} = \overline{O_2F'_2} = f'_2$$

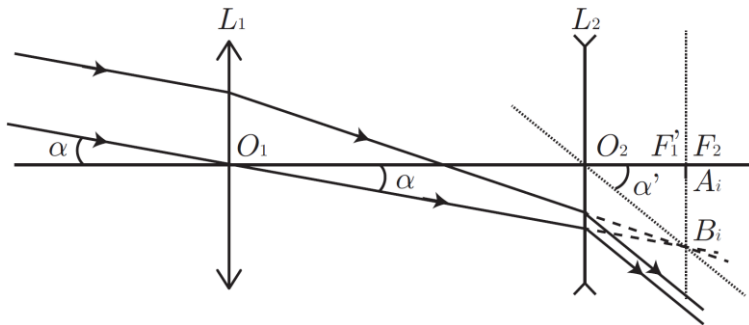
$$\ell = f'_1 + f'_2$$

$$\boxed{\ell = f'_1 - |f'_2|}_H$$

[On peut aussi donner directement cette expression en ayant tracé un schéma avec O_1 , O_2 , et F'_1 et F_2 au même point.]

28. Recopier le schéma de la figure 3 et poursuivre le tracé des rayons incidents parallèles faisant un angle α avec l'axe optique et émergeant sous un angle α' avec l'axe optique.

On note A_iB_i l'image du Fort par la lentille (L_1).



[Il manque le troisième rayon au schéma, sa construction est la même que les deux autres.]

29. L'image du Fort à travers les jumelles apparaît-elle droite ou renversée par rapport au Fort observé à l'œil nu? Justifier.

En utilisant le tracé de rayons précédent, on constate qu'en sortie de lunette, les rayons sont dirigés vers le bas, comme les rayons incidents. Observée à l'œil nu, l'image est droite.

30. En se plaçant dans les conditions de Gauss, les angles α et α' sont petits ; déterminer l'expression du grossissement de la lunette $G = \alpha'/\alpha$ en fonction de f'_1 et de $|f'_2|$.

On note encore A_iB_i l'image du Fort par la lentille (L_1).

$$\tan(\alpha') = \frac{A_iB_i}{O_2A_i} = \frac{A_iB_i}{|f'_2|}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{A_iB_i}{O_1A_i} = \frac{A_iB_i}{f'_1}$$

Dans les conditions de Gauss $\alpha \ll \frac{\pi}{2}$ et $\alpha' \ll \frac{\pi}{2}$, on a $\tan(\alpha) = \alpha$ et $\tan(\alpha') = \alpha'$.

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

$$\boxed{G = \frac{f'_1}{|f'_2|}}_H$$

31. Compte tenu des valeurs de grossissement et d'encombrement précisées en fin de partie, calculer la valeur des distances focales f'_1 et f'_2 .

$$\ell = f'_1 - |f'_2|$$

$$\ell = (G - 1)|f'_2|$$

$$\boxed{f'_2 = -\frac{\ell}{G - 1}}_H$$

$$f'_2 = -\frac{0,25}{20 - 1}$$

$$\underline{\underline{f'_2 = -1,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}}}$$

$$f'_1 = G|f'_2| = \frac{G \ell}{G - 1}$$

$$\boxed{f'_1 = \frac{G \ell}{G - 1}}_H$$

$$f'_1 = \frac{20 \cdot 0,25}{20 - 1}$$

$$\underline{\underline{f'_1 = 2,6 \cdot 10^{-1} \text{ m}}}$$

On observe le Fort, de hauteur h , depuis l'Île d'Aix située à une distance d .

32. Sous quel angle le Fort est-il observé à l'œil nu? Sous quel angle est-il observé à travers les jumelles? Vérifier la validité des conditions de Gauss. [On donne $\arctan(\theta) = \theta$ pour $|\theta| \ll \frac{\pi}{2}$.]

L'angle sous lequel le Fort est observé à l'œil nu correspond à α :

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{d}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{d}\right)$$

Puisque $\frac{h}{d} \approx 6.10^{-3} \ll \frac{\pi}{2}$ on a :

$$\boxed{\alpha = \frac{h}{d}}_H$$

[Que ce soit pour la fonction tangente ou arc tangente, à proximité de l'origine la courbe est presque confondue avec la fonction identité.]

$$\alpha = \frac{20}{3.10^3}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 6.7.10^{-3} \text{ rad}}}$$

L'angle sous lequel le Fort est observé à travers les jumelles correspond à α' :

$$\boxed{\alpha' = G \alpha}_H$$

$$\alpha' = 20.6.7.10^{-3}$$

$$\underline{\underline{\alpha' = 1.3.10^{-1} \text{ rad}}}$$

Les angles α et α' sont bien très petits par rapport à $\frac{\pi}{2}$, ce qui valide la condition de Gauss de faibles angles des rayons avec l'axe optique.

Données pour la partie « Observation du Fort Boyard »

Hauteur du Fort Boyard : $h = 20 \text{ m}$

Distance Île d'Aix-Fort Boyard : $d = 3,0 \text{ km}$

Caractéristiques de la lunette de Galilée :

- grossissement : $G = 20$

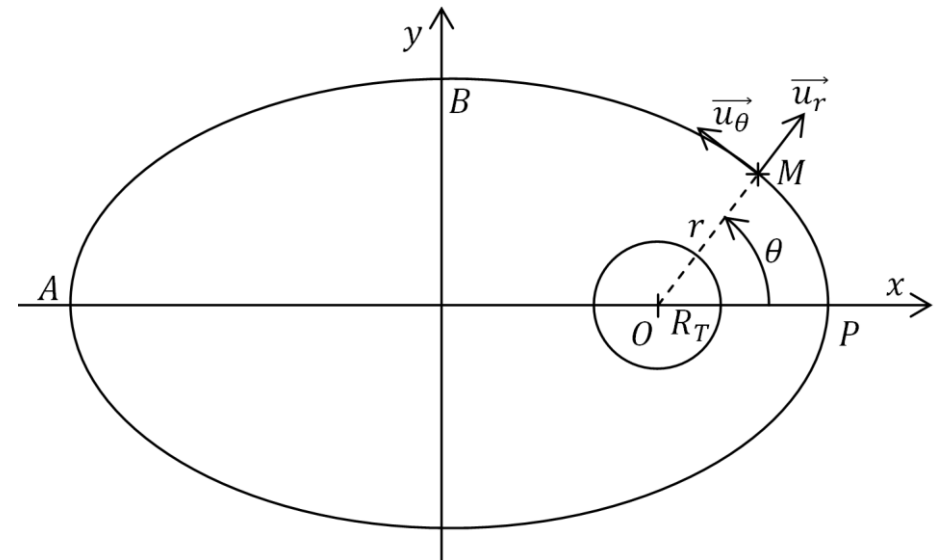
- encombrement : $\ell = 25 \text{ cm}$

Exercice 4 : Étude d'une trajectoire elliptique

Un satellite modélisé par un point M gravite autour de la Terre sur une orbite elliptique dont l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires d'origine O (où O est le centre de la Terre) est :

$$r(\theta) = \frac{\alpha R_T}{2 + \cos(\theta)}$$

Avec α une constante positive et R_T le rayon terrestre. Les points A et P se trouvent sur l'axe (Ox) défini sur le schéma ci-après, dont on précise qu'il ne respecte pas les proportions. Dans le schéma, M tourne dans le sens trigonométrique.



33. Pour quelles valeurs de θ la distance entre le centre de la Terre et le satellite est-elle minimale ? Maximale ? Exprimer en fonction de α et de R_T les valeurs minimale et maximale de r , r_{min} et r_{max} .

$r(\theta)$ est minimal si $2 + \cos(\theta)$ est maximal, soit $\cos(\theta) = 1$, donc si $\underline{\underline{\theta \equiv 0 [2\pi]}}$. On

a alors $\underline{\underline{r_{min} = \frac{\alpha R_T}{3}}}_H$.

$r(\theta)$ est maximal si $\cos(\theta) = -1$, donc si $\underline{\underline{\theta \equiv \pi [2\pi]}}$. On a alors $\underline{\underline{r_{max} = \alpha R_T}}_H$.

[On peut aussi répondre en écrivant $\theta = p2\pi$ et $\theta = p2\pi + \pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$]

34. Calculer r_A et r_P , les valeurs de r lorsque M est en A et P.

$$r_A = r_{max} \Rightarrow \underline{\underline{r_A = \alpha R_T}}$$

$$r_A = 3,8.6,4.10^6$$

$$\underline{\underline{r_A = 2,4.10^7 m}}$$

$$r_P = r_{min} \Rightarrow \boxed{r_P = \frac{\alpha R_T}{3}}_H$$

$$r_P = \frac{3,8.6,4.10^6}{3}$$

$$\underline{\underline{r_P = 8,1.10^6 m}}$$

35. On note $\vec{a}$ le vecteur accélération de M. Montrer que : $\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = [(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta] \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 2\dot{r}r\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)}_H$$

36. En sachant que $\vec{a}$ n'a de composante que selon $\vec{u}_r$, montrer que $r^2\dot{\theta}$ est une constante, que l'on notera C.

$$\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

$r^2\dot{\theta}$ est donc constant.

37. Dédurre l'expression de la vitesse du satellite dans la base polaire en fonction de r , $\dot{r}$ et C et des vecteurs unitaires.

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + \frac{C}{r} \vec{u}_\theta}_H$$

38. A l'aide de la question précédente, montrer que le vecteur vitesse dans la base polaire peut s'écrire :

$$\vec{v} = \frac{C \sin(\theta)}{\alpha R_T} \vec{u}_r + \frac{C(2 + \cos(\theta))}{\alpha R_T} \vec{u}_\theta$$

$$r = \alpha R_T (2 + \cos(\theta))^{-1}$$

$$\dot{r} = -(-\dot{\theta} \sin(\theta)) \alpha R_T (2 + \cos(\theta))^{-2} = \frac{\alpha R_T \sin(\theta) \dot{\theta}}{(2 + \cos(\theta))^2}$$

Ainsi puisque $C = r^2 \dot{\theta} = \left(\frac{\alpha R_T}{2 + \cos(\theta)} \right)^2 \dot{\theta}$; on a :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{C \sin(\theta)}{\alpha R_T} \vec{u}_r + \frac{C(2 + \cos(\theta))}{\alpha R_T} \vec{u}_\theta}_H$$

39. Préciser les expressions de ce vecteur pour les points A et P dans la base $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. Quelle formule relie $\vec{v}(A)$ et $\vec{v}(P)$?

$$\vec{v}(A) = \vec{v}(\theta = \pi)$$

$$\vec{v}(A) = \frac{C}{\alpha R_T} \vec{u}_\theta(\theta = \pi)$$

$$\vec{u}_\theta(\theta = \pi) = -\vec{u}_y$$

$$\boxed{\vec{v}(A) = -\frac{C}{\alpha R_T} \vec{u}_y}_H$$

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(\theta = 0)$$

$$\vec{v}(P) = \frac{3C}{\alpha R_T} \vec{u}_\theta(\theta = 0)$$

$$\vec{u}_\theta(\theta = 0) = \vec{u}_y$$

$$\boxed{\vec{v}(P) = \frac{3C}{\alpha R_T} \vec{u}_y}_H$$

$$\underline{\underline{\vec{v}(P) = -3 \vec{v}(A)_H}}$$

40. Donner les expressions de $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. En déduire l'expression de la vitesse du point M dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ en fonction de α , R_T , θ et C.

$$\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta) \overrightarrow{u_x} + \sin(\theta) \overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta) \overrightarrow{u_x} + \cos(\theta) \overrightarrow{u_y}$$

$$\vec{v} = \left[\frac{C \sin(\theta) \cos(\theta)}{\alpha R_T} + \frac{C(2 + \cos(\theta))(-\sin(\theta))}{\alpha R_T} \right] \overrightarrow{u_x} + \dots$$

$$\dots + \left[\frac{C \sin(\theta)^2}{\alpha R_T} + \frac{C(2 + \cos(\theta)) \cos(\theta)}{\alpha R_T} \right] \overrightarrow{u_y}$$

$$\vec{v} = \frac{C}{\alpha R_T} (-2 \sin(\theta) \overrightarrow{u_x} + 1 + 2 \cos(\theta) \overrightarrow{u_y})$$

$$\left[\vec{v} = -\frac{2C \sin(\theta)}{\alpha R_T} \overrightarrow{u_x} + \frac{C(1 + 2 \cos(\theta))}{\alpha R_T} \overrightarrow{u_y} \text{ est accepté} \right]$$

41. Sachant qu'au point B le vecteur vitesse est colinéaire à $\overrightarrow{u_x}$, déterminer un angle θ lorsque M est en B.

$$\vec{v}(B) \cdot \overrightarrow{u_y} = 0$$

$$1 + 2 \cos(\theta(B)) = 0 \Rightarrow \cos(\theta(B)) = -\frac{1}{2}$$

En prenant $\theta(B) \in [0, \pi]$, on a :

$$\theta(B) = \frac{2\pi}{3}$$

42. Montrer alors que $r_B = \frac{r_A + r_P}{2}$.

Comme $\cos(\theta(B)) = -\frac{1}{2}$, on a :

$$r_B = \frac{\alpha R_T}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2\alpha R_T}{3}$$

$$\frac{r_A + r_P}{2} = \frac{\alpha R_T \left(1 + \frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{4\alpha R_T}{2 \times 3} = \frac{2\alpha R_T}{3}$$

$$r_B = \frac{r_A + r_P}{2}$$

Données pour l'exercice « Étude d'une trajectoire elliptique » :

$$R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$\alpha = 3,8$$

$$M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

FIN