

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.

Les résultats devront être encadrés.

La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.

Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Partie obligatoire

Problème 1 (Une formule trigo de plus)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

- Donner explicitement les ensembles $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$, $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_6$ ainsi qu'une représentation graphique de leurs éléments.
- Montrer que si $z, z' \in \mathbb{U}_n$, alors $zz' \in \mathbb{U}_n$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$.
- Soit $u = e^{i\frac{2\pi}{11}}$. On pose $S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9$ et $T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$.
 - Justifier que $u^{11} = 1$ et que $\bar{u} = \frac{1}{u}$.
 - En déduire que S et T sont conjugués.
 - Montrer avec un minimum de calculs que la partie imaginaire de S est positive.
 - Montrer que $S + T = -1$ et $S \times T = 3$.
 - En déduire les valeurs de S et T .
- Montrer que $i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = -\sum_{k=1}^{10} (-u^3)^k$
 - Montrer que $2i \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = (u - u^{10})$.
 - En déduire que

$$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i(T - S) = \sqrt{11}.$$

Problème 2

Dans les deux premières parties de ce problème, et sauf indication contraire, même les questions portant sur des résultats de cours doivent naturellement faire l'objet d'une démonstration complète.

A Fonctions hyperboliques classiques

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ et $e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$. De même exprimer e^x en fonction de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.
- Démontrer (par exemple à l'aide de ce qui précède) pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, les formules

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) &= (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y) \\ \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) &= (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) \end{aligned}$$
- En déduire pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ une expression de $\operatorname{ch}(x+y)$ et de $\operatorname{sh}(x+y)$.

B Tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique (notée th) par l'expression $\text{th}(x) = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$.

4. Effectuer l'étude complète de la fonction th (notamment ensemble de définition, dérivée, variations, limites, asymptotes éventuelles et l'équation d'une tangente remarquable au choix, puis une allure de sa courbe représentative).
5. Dédire de ce qui précède que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans I avec I un intervalle à préciser.
6. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{th}(x + y) = \frac{\text{th } x + \text{th } y}{1 + \text{th } x \text{th } y}$.

C Argument tangente hyperbolique

On a mis au jour dans la partie précédente le caractère bijectif de la fonction th . On appelle $\text{argth} : I \rightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

7. Montrer que argth est impaire, dérivable et calculer sa dérivée.
8. Soit $x \in I$ et $y = \text{argth } x$. Montrer que $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$.
9. En déduire une expression de argth avec la fonction $\ln$ et retrouver ainsi la formule de sa dérivée.
10. On considère maintenant la fonction

$$f : x \mapsto \text{argth} \left(\sqrt{\frac{\text{ch } x - 1}{\text{ch } x + 1}} \right).$$

- (a) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .
- (b) On pose $y = \text{ch } x$. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) = \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.
- (c) En déduire que $f(x) = \frac{|x|}{2}$.
11. Montrer que si $x, y \in I$, alors $\frac{x+y}{1+xy} \in I$. En déduire que pour tous $x, y \in I$,

$$\text{argth } x + \text{argth } y = \text{argth} \left(\frac{x+y}{1+xy} \right).$$

12. (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{argth} \left(\frac{1}{k^2 + 3k + 1} \right) = \text{argth} \frac{1}{k+1} - \text{argth} \frac{1}{k+2}$.
- (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \text{argth} \left(\frac{1}{k^2 + 3k + 1} \right)$. Déterminer une expression simple de S_n .
- (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Problème facultatif

Problème 3 (Facultatif mais formateur. Si vous décidez de ne pas le chercher, faites au moins la partie A pour me faire plaisir et pour votre bien.)

Dans ce problème, on étudie une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone soit régulier. Après quelques classiques (partie A) et quelques variations autour de l'inégalité triangulaire (partie B), on en viendra à la condition proprement dite (partie C). On reviendra dans la partie D à l'étude du cas où le polygone en question est un triangle.

A Deux exemples, études classiques

- Soit A, B deux points du plan complexe d'affixes respectives a et b .
 - Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$.
 - Soit D d'affixe d tel que $\frac{d-a}{d-b} = i$ et F d'affixe f tel que $\frac{f-a}{f-b} = -i$. Montrer que $ADBF$ est un carré.
- Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c . Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$.

B Autour de l'inégalité triangulaire

On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité triangulaire :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|. \quad (1)$$

Le but de cette partie est d'étudier le cas de plus de deux nombres et les cas d'égalité. En particulier, on va montrer qu'il y a égalité si et seulement si les nombres considérés ont même argument.

- Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$ et tous nombres complexes $z_1, \dots, z_n$,

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n| \quad (2)$$

- Cas d'égalité pour $n = 2$.
 - Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2) = |z_1||z_2|$.
 - En déduire que l'on a l'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\arg(z_1) = \arg(z_2)[2\pi]$.
- On suppose que l'on a la propriété au rang n , c'est-à-dire :

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \text{ si et seulement si } \arg(z_1) = \dots = \arg(z_n)[2\pi].$$

Soit $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes tels que

$$|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

- Montrer que

$$|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \quad \text{et} \quad |z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| = |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}|.$$

Indication : on pourra poser $z = z_1 + \dots + z_n$, $z' = z_{n+1}$ et utiliser judicieusement (1) et (2).

- En déduire que $\arg(z_1) = \dots = \arg(z_{n+1})[2\pi]$. Conclure.

C Caractérisation d'un polygone régulier

Soit $n \geq 2$. On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient $M_1, \dots, M_n$ des points du plan d'affixes respectives $z_1, \dots, z_n$ vérifiant $|z_1| = \dots = |z_n| = \rho > 0$.

On dit que le polygone (parcouru dans le sens direct) $M_1 \dots M_n$ est **régulier** si

$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \dots = (\overrightarrow{OM_{n-1}}, \overrightarrow{OM_n}) = (\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_1}) = \frac{2\pi}{n}.$$

On va montrer que le polygone $M_1 \dots M_n$ est régulier si et seulement si

$$\sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k = n z_1.$$

6. Supposons tout d'abord que le polygone $M_1 \dots M_n$ est régulier et posons $z_1 = \rho e^{i\theta}$.

(a) Pour tout $1 \leq k \leq n$, déterminer le module et un argument de z_k .

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.

7. On suppose maintenant réciproquement que $\sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k = n z_1$.

(a) Calculer $\left| \sum_{k=1}^n \omega^{n+1-k} z_k \right|$. En déduire que

$$\forall k \in \{1 \dots n\}, \arg(\omega^{n+1-k} z_k) = \arg(z_1) + [2\pi].$$

(b) En déduire que le polygone est régulier.

D Le cas d'un triangle équilatéral

Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c . On rappelle la notation $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le but de cette partie est de montrer que ABC est un polygone régulier (un triangle équilatéral dans le cas de trois points) si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

8. Justifier que $1 + j + j^2 = 0$.

9. On suppose tout d'abord que $a + jb + j^2c = 0$. En déduire que le triangle ABC a deux côtés égaux et un angle de mesure $\pm \frac{\pi}{3}$. Conclure.

10. Réciproquement, on suppose maintenant que le triangle ABC est équilatéral.

(a) Dans le cas où $|a| = |b| = |c|$, montrer comment la condition de la partie C implique que $a + jb + j^2c = 0$. (*indication : on pourra appliquer cette condition à a, b et c , puis à b, c et a , et encore à c, a et b*)

(b) Dans le cas où a, b et c ne sont pas de même module, on pose

$$a' = a - \frac{a+b+c}{3}; b' = b - \frac{a+b+c}{3} \text{ et } c' = c - \frac{a+b+c}{3}.$$

Montrer que $a' + jb' + j^2c' = 0$ si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$. Montrer que $|a'| = |b'| = |c'|$ et conclure.