

Sol A3. Nombres complexes

Exercice A3.14

Soit t un réel non congru à π modulo 2π .

1. Technique de factorisation par l'angle moitié : $\arg(1) = 0$, $\arg(e^{it}) = t$. La moyenne est $t/2$. On factorise donc par $e^{i\frac{t}{2}}$, ce qui va naturellement faire apparaître des formules d'Euler.

$$1 + e^{it} = e^{i\frac{t}{2}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} + e^{i\frac{t}{2}} \right) = e^{i\frac{t}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

Attention : ceci n'est une forme exponentielle que si $2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$ pour jouer le rôle de module. Si ce n'est pas le cas, on multiplie par $-1 = e^{i\pi}$.

1^{er} cas : $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$. Alors son module est $2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ et son argument $\frac{t}{2}$.

2^e cas : $\cos\left(\frac{t}{2}\right) < 0$. Alors $1 + e^{it} = -2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{i(\frac{t}{2} + \pi)}$, donc son module est $-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ et son argument $\frac{t}{2} + \pi$.

Solution A3.15

1. $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $(1 + i)^n = \sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}}$.

On remarque que $(1 + i)^n = \overline{(1 - i)^n}$, donc $(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2 \operatorname{Re}\left(\sqrt{2}^n e^{in\frac{\pi}{4}}\right)$.

Donc $(1 + i)^n + (1 - i)^n = \sqrt{2}^n \times 2 \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$.

À distinguer suivant les valeurs de n (le reste de sa division par 8) :

- Si $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) > 0$, alors c'est le module et l'argument est nul,
 - Si $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) < 0$, alors le module est son opposé et l'argument vaut π ,
 - Si $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = 0$, le module est nul et il n'y a pas d'argument.
2. Avec $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, le nombre à calculer B vaut :

$$B = \frac{4e^{i\pi}}{2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}} + \frac{4e^{-i\pi}}{2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} + \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 2\sqrt{2}\cos(\pi/4) = 2.$$

Exercice A3.17

1. On utilise Euler puis la formule du binôme (puissance 4), enfin à nouveau Euler (avec $\cos(4t)$ et $\cos(2t)$).

$$f(t) = \frac{1}{8}\cos(4t) + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{3}{8}.$$

2. Même démarche : $g(t) = \frac{1}{16}\sin(5t) - \frac{5}{16}\sin(3t) + \frac{5}{8}\sin(t)$.

3. Tout d'abord $\sin^3(t) = -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)$. Puis on multiplie par $\cos(t)$ et on utilise les formules de linéarisation.

Ou bien on s'arrête aux exponentielles : $\sin^3(t)\cos(t) = -\frac{1}{16i}(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it})(e^{it} + e^{-it})$ et on développe puis on utilise Euler (avec $\sin(4t)$ et $\sin(2t)$).

Les deux voies mènent à $h(t) = -\frac{1}{8}\sin(4t) + \frac{1}{4}\sin(2t)$.



$$4. k(t) = -\frac{1}{8} \sin(9t) + \frac{3}{8} \sin(5t) + \frac{1}{8} \sin(3t) - \frac{3}{8} \sin(t).$$

Exercice A3.18

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer en fonction de $\cos(x)$:

(a) $\cos(5x) + i \sin(5x) = (\cos(x) + i \sin(x))^5$ et on développe avec la formule du binôme.

La partie réelle donne $\cos(5x) = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$. Puis on remplace $\sin^2$ par $1 - \cos^2$ (et donc bien sûr $\sin^4$ par $(1 - \cos^2)^2$).

Après regroupements : $\cos(5x) = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$.

(b) $\sin(6x) \sin(x) = -32 \cos^7 x + 64 \cos^5 x - 38 \cos^3 x + 12 \cos x$.

2. Exprimer en fonction de $\sin(x)$:

(a) Même chose en remplaçant cette fois $\cos^2$ par $1 - \sin^2$.

$\sin(7x) = -64 \sin^7 x + 12 \sin^5 x - 56 \sin^3 x + 7 \sin x$.

(b) $\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ et $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$.

D'où $\sin(3x) \cos(2x) = 8 \sin^5 x - 10 \sin^3 x + 3 \sin x$.