TD B2. Nombres réels et suites numériques

1 Suites usuelles

Exercice B2.1

Soit $C, N \in \mathbb{R}_+^*$. Donner dans chacun des cas l'expression de la suite (u_n) définie par les propriétés ci-dessous.

1. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{N} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = C(1 - u_n) \end{cases}$.

Exercice B2.2

Donner dans chacun des cas l'expression de la suite (u_n) définie par les propriétés ci-dessous. Si nécessaire on distinguera les cas réel et complexe.

1. $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$,
2. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$,
3. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$,
4. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$,

Exercice B2.3

Déterminer l'expression de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans chacun des cas suivants.

1. $\begin{cases} u_0 = 0,\ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + v_n + 3 \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n - 1 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} u_0 = 0,\ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = -u_n - v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{4}{3}u_n + \dfrac{5}{3}v_n \end{cases}$.

Exercice B2.4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = \lambda \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$. Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $(|u_n|)$ soit bornée.

Exercice B2.5 ⚙⚙

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{5} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lfloor 2u_n \rfloor + \dfrac{3}{5} \end{cases}$. Déterminer u_n en fonction de n.

2 Borne sup, borne inf

Exercice B2.6 ⚙

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leqslant \varepsilon) \Leftrightarrow a = 0$.

Exercice B2.7 ⚙

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure le minimum et le maximum des ensembles suivants.

1. $[1,5[\cup]6,8[$,
2. $\left\{\dfrac{x^2+1}{x^2+2} \mid x \in \mathbb{R}_+\right\}$,
3. $\left\{1+\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
4. $\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m} \mid (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$,
5. $\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
6. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2-3x+2<0\}$.

Exercice B2.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $E_n = \left\{k+\dfrac{n}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Montrer que $\inf(E_n) \geqslant 2\sqrt{n}$.
2. À quelle condition a-t-on $\min(E_n) = 2\sqrt{n}$?

Exercice B2.9 ⚙

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = \dfrac{4}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+2} = 2u_{n+1}+u_n \end{cases}$.

1. Déterminer l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. L'ensemble $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est-il borné ? Si oui déterminer $\sup E$ et $\inf E$.

Exercice B2.10 ⚙

Soit A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit

$$A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Montrer que $A+B$ est majoré et que $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$.

Exercice B2.11 ⚙

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A\cup B$ est majorée et que $\sup(A\cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
2. Énoncer un énoncé analogue pour $\inf(A\cup B)$.
3. Que peut-on dire de $A\cap B$?

Exercice B2.12 ⚙⚙

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Soit $E = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure notée b.
2. Montrer que $f(b) = b$. *(on pourra étudier les cas $f(b) < b$ et $f(b) > b$)*

Exercice B2.13 ⚙⚙

On considère l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 0 \text{ et } x^2 \leqslant 2\}$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et la déterminer.
2. Soit M un nombre rationnel majorant de A. On pose $h = \dfrac{1}{2}\left(u+\dfrac{2}{u}\right)$.
   (a) Montrer qu'on a $M^2 > 2$, $0 < h < M$ puis $h^2 > 2Mh - M^2$ et enfin $h^2 > 2$.
   (b) Montrer que h est un nombre rationnel majorant de A.
   (c) En déduire que A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

cc BY NC SA

3 Suites

Exercice B2.14

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Vrai ou faux ? (Justifier)

1. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
2. Si (u_n) diverge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
3. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
4. Si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors (u_n) est convergente.
5. Si (u_n) est convergente, alors $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice B2.15

Montrer à l'aide de la définition de la limite que

1. $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,
2. $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
3. $\dfrac{n^2+1}{n^2-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice B2.16 ⚙

Établir la convergence ou la divergence de chacune des suites définies par les expressions ci-dessous.

(a) $\dfrac{\sin n}{n}$,
(b) $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n}$,
(c) $\dfrac{n^2 - n\ln n}{n^2 + n(\ln n)^2}$,
(d) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,
(e) $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$,
(f) $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$,
(g) $n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice B2.17 *Critère de d'Alembert* ⚙⚙

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Dans le cas où $\ell = 1$, donner trois exemples de suite (u_n) tels que
   (a) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
   (b) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,
   (c) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 28$.

Exercice B2.18 ⚙

Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire.

Exercice B2.19 ⚙

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$.

1. Montrer que si l'une de ces suites converge alors l'autre converge aussi.
2. En déduire que ces deux suites sont divergentes.

CC BY NC SA

Exercice B2.20 *(Moyenne de Cesàro)* ✪✪✪

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n}\right)$ converge vers 0 également.
2. Même question dans le cas d'une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$ quelconque.
3. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers ℓ, alors $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ converge également vers ℓ.

Exercice B2.21 ✪

Soit (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Montrer que (S_n) converge.

Exercice B2.22 ✪

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 6$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 2 \\ 0 \leqslant v_n \leqslant 3 \end{cases}$.

Que dire des suites (u_n) et (v_n) ? Le montrer.

Exercice B2.23 ✪✪

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $x^n + nx - 1 = 0$ possède une unique solution réelle. On note x_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est convergente vers 0.

Exercice B2.24 ✪✪

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $b_0 > a_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$.
2. Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ.

Exercice B2.25 ✪

Étant donné un nombre $x \in \mathbb{R}$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers x. Quel théorème cela permet-il de démontrer ?

Exercice B2.26 ✪

Montrer que de toute suite réelle non majorée on peut extraire une suite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice B2.27 ✪

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Vrai ou faux ? (Justifier)

1. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, alors (u_n) converge.
2. Si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.

Exercice B2.28 ✪✪✪

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(f(x)) = 6x - f(x)$.

Exercice B2.29 ✪

Soit $A = \left\{ \dfrac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N},\ k \in [\![0, 2^n]\!] \right\}$. Montrer que A est dense dans $[0, 1]$.

cc BY NC SA