DEVOIR MAISON N° 7

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être encadrés.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Étant donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction continue, on appelle (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Le but de ce problème est d'étudier une telle suite. Dans la partie A, on établit des propriétés de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction des informations que l'on a sur la fonction f. Dans la partie B, on examine deux exemples.

On rappelle ou on admet la propriété suivante sur la continuité :

Théorème 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite qui tend vers a. Alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

A Propriétés générales

On suppose dans toute cette partie que I est un intervalle **stable** par f, c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

1. On suppose $u_0 \in I$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
2. On suppose dans cette question que f est croissante.
   (a) Si $u_0 \leqslant u_1$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. En déduire le sens de variation de (u_n). Qu'en est-il si $u_0 \geqslant u_1$?
   (b) Dans le cas où $I = [a, b]$ est borné (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$), avec $u_0 \in I$ et toujours f croissante, justifier que (u_n) est convergente.
   (c) Sous les hypothèses précédentes, si on appelle alors ℓ sa limite, montrer que $\ell = f(\ell)$.
3. On suppose dans cette question que f est décroissante. On pose, pour tout n, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Montrer que I est aussi un intervalle stable par $f \circ f$.
   (b) Montrer que $f \circ f$ est croissante.
   (c) Établir une relation de récurrence vérifiée par (v_n) et (w_n).
   (d) En déduire que (v_n) et (w_n) sont monotones de monotonies contraires.
   (e) Montrer que si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, alors on a $\ell = f(f(\ell))$.
   On admettra qu'il en est de même pour $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

B Étude de deux exemples

Dans un souci de gain de temps et d'espace, on s'efforcera dans cette partie d'appliquer les résultats des questions précédentes, plutôt que de tout refaire dans les cas particuliers.

4. On pose $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$.
   (a) Résoudre $f(x) = x$.
   (b) Effectuer l'étude de f en précisant notamment son domaine de définition et ses variations. En déduire que $[0, 2[$ et $]2, +\infty[$ sont deux intervalles stables par f.
   (c) Donner le signe de $f(x) - x$ en fonction de x.
   (d) On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in [0, 2[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite. On précisera son sens de variation.
   (e) Étudier (u_n) si maintenant $u_0 \in]2, +\infty[$.
5. On pose $g : x \mapsto \cos(x)$ et $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (a) Justifier que I est un intervalle stable par g et par $g \circ g$.
   (b) Montrer que $g(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in I$ puis que $[0, \alpha]$ et $\left[\alpha, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sont des intervalles stables par $g \circ g$.
   (c) On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} x_0 \in [0, \alpha[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$. À l'aide de la question 3, décrire le comportement des suites $(v_n) = (x_{2n})$ et $(w_n) = (x_{2n+1})$ (sens de variation, convergence et limite éventuelles) et enfin celui de la suite (x_n).