Problème 1

3. $z, z' \in \mathbb{U}_n \Rightarrow \begin{cases} z^n = 1 \\ z'^n = 1 \end{cases} \Rightarrow (zz')^n = 1 \Rightarrow \boxed{zz' \in \mathbb{U}_n}$ et $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n}$.

4. Soit $u = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{11}}$. On pose $S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9$ et $T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$.

   (a) u est une racine onzième de l'unité donc $\boxed{u^{11} = 1}$ et que $\overline{u} = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{11}}$ donc $\boxed{\overline{u} = \frac{1}{u}}$.

   (b) D'après la question précédente, on a $u^{10} = \frac{1}{u} = \overline{u}$ et de même, $u^8 = \overline{u^3}$, $u^7 = \overline{u^4}$, $u^6 = \overline{u^5}$ et $u^2 = \overline{u^9}$. Finalement, $\boxed{S = \overline{T}}$.

   (c) $\mathrm{Im}(u^3 + u^9) > 0$ car $\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{11}\right) > 0$. De plus $\mathrm{Im}(u + u^4 + u^5) > 0$ car chaque terme a une partie imaginaire positive. Finalement $\boxed{\mathrm{Im}\, S > 0}$.

   (d) $1 + S + T = 0$ car il s'agit de la somme des racines onzièmes de l'unité. Donc $\boxed{S + T = -1}$.
   Pour le produit $S \times T$, on développe en utilisant $u^{11} = 1$. On obtient 25 termes parmi lesquels deux fois $(S + T)$ (en tout 20 termes) et 5 fois $u^{11} = 1$.
   Finalement $ST = -2 + 5$ donc $\boxed{ST = 3}$. (pour ceux qui veulent vérifier le développement : $ST = u^3+u^7+u^8+u^9+1+u^5+u^9+u^{10}+1+u^2+u^6+u^{10}+1+u+u^3+u^7+1+u+u^2+u^4+1+u^4+u^5+u^6+u^8$).

   (e) D'après ce qui précède, S et T sont les deux racines de $z^2 + z + 3$, à savoir $\frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}$. Comme $\mathrm{Im}\, S > 0$, on a $\boxed{S = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \text{ et } T = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}}$

5. (a) $i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = i\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{11}} - \mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{11}}}{\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{11}} - \mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{11}}} = \frac{\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{11}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{11}}} \frac{\mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{11}} - 1}{\mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{11}} - 1} = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1}$.

   Par ailleurs, $\sum_{k=1}^{10} (-u^3)^k = \frac{-u^3 - (-u^3)^{11}}{1 - (-u^3)} = \frac{1 - u^3}{1 + u^3}$.

   Conclusion : $\boxed{i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = -\sum_{k=1}^{10} (-u^3)^k}$.

   (b) $\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{11}} - \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{11}}}{2i} = \frac{u - u^{10}}{2i}$.

   Donc $\boxed{2i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = (u - u^{10})}$.

   (c) D'après les résultats précédents,

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) &= i\left(\sum_{k=1}^{10} (-u^3)^k + 2u - 2u^{10}\right) \\ &= i(-u^3 + u^6 - u^9 + u - u^4 + u^7 - u^{10} + u^2 - u^5 + u^8 - 2u - 2u^{10}) \\ &= i(T - S) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}}$.

Problème 2

A Fonctions hyperboliques classiques

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} - \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \boxed{1}$.
   Et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \boxed{\mathrm{e}^{-x}}$. De même, $\boxed{\mathrm{e}^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$.
2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
   - $\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) = \mathrm{e}^{-(x+y)} = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y} = \boxed{(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)}$.
   - $\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) == \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$ $\boxed{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)}$.
3. En faisant la somme et la différence de ces deux équations, on obtient
   - $\operatorname{ch}(x+y) = \dfrac{1}{2}\left((\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y) + (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y)\right) = \boxed{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}$.
   - $\operatorname{sh}(x+y) = \dfrac{1}{2}\left((\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) - (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)\right) = \boxed{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y}$.

B Tangente hyperbolique

On définit la fonction tangente hyperbolique (notée th) par l'expression $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

4. Par quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, comme ch ne s'annule pas, th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On a $\operatorname{th}' = \dfrac{\operatorname{sh}'\operatorname{ch} - \operatorname{ch}'\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2}$, qui est toujours positive, donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$ donc $\boxed{\operatorname{th} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$ donc $\boxed{\operatorname{th} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1}$.
   Ces limites donnent deux asymptotes horizontales, d'équations $y = -1$ et $y = 1$, respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.
   La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.
5. th est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante.
   Donc elle réalise une $\boxed{\text{bijection, de } \mathbb{R} \text{ dans } \operatorname{Im}(\operatorname{th}) =]-1, 1[}$.

6. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} &= \frac{\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} + \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y}}{1 + \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}}{\frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}} \\ &= \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y} \\ &= \frac{\operatorname{sh}(x+y)}{\operatorname{ch}(x+y)} \\ &= \boxed{\operatorname{th}(x+y)}.\end{aligned}$$

C Argument tangente hyperbolique

On a mis au jour dans la partie précédente le caractère bijectif de la fonction th. On appelle argth : $I \to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

7. argth est définie sur $]-1, 1[$, centré en 0.
   Soit $y \in]-1, 1[$. Soit $x = \operatorname{argth}(y)$, *i.e.* $y = \operatorname{th}(x)$.
   Par imparité de th, $\operatorname{argth}(-y) = \operatorname{argth}(-\operatorname{th}(x)) = \operatorname{argth}(\operatorname{th}(-x)) = -x = -\operatorname{argth}(y)$.
   Donc $\boxed{\text{argth est impaire}}$.
   De plus les limites de th donnent $\lim\limits_{x \to -1} \operatorname{argth}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1} \operatorname{argth}(x) = \infty$.
   th est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc argth est dérivable sur $I =]-1, 1[$.
   Et $\forall x \in I$, $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))}$.
   En utilisant $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$, on obtient $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{1 - \operatorname{th}(\operatorname{argth}(x))^2} = \boxed{\dfrac{1}{1-x^2}}$.
8. Soit $x \in I$ et $y = \operatorname{argth}(x)$.
   $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1+\operatorname{th}(y)}{1-\operatorname{th}(y)} = \dfrac{\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(y)}{\operatorname{ch}(y)-\operatorname{sh}(y)} = \dfrac{2\mathrm{e}^{y}}{2\mathrm{e}^{-y}} = \boxed{\mathrm{e}^{2y}}$.
9. Ainsi $\boxed{\operatorname{argth}(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$.
   Cette expression est celle d'une fonction dérivable sur I par composition, car $\forall x \in I$, $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$.
   Soit $v : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$, définie et dérivable sur I. On a $\forall x \in I$, $v'(x) = \dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$.
   Donc $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{v'(x)}{v(x)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(1+x)(1-x)} = \boxed{\dfrac{1}{1-x^2}}$.
10. On considère maintenant la fonction

$$u : x \mapsto \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch} - 1}{\operatorname{ch} + 1}}\right).$$

    (a) u est définie sur $\mathbb{R}$ par composition. En effet :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$ donc $\mathrm{ch}(x)-1 \geqslant 0$, donc $\dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{\mathrm{ch}(x)+1} \geqslant 0$. Donc $x \mapsto \sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{\mathrm{ch}(x)+1}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par composition.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \mathrm{ch}(x)-1 \leqslant \mathrm{ch}(x)+1$, donc $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{\mathrm{ch}(x)+1} \leqslant 1$, d'où $\sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{\mathrm{ch}(x)+1}} \in I$. Donc par composition, u est bien définie $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}}$.

(b) Soit $x \in \mathcal{D}_u$. On pose $t = \mathrm{ch}(x)$. D'après l'expression de 9,
$u(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}}{1-\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}}\right)$. On multiplie par la quantité conjuguée pour avoir finalement : $u(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{(\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1})^2}{2}\right)$.
En développant le carré, $\boxed{u(x) = \dfrac{1}{2}\ln(t+\sqrt{t^2-1})}$.

(c) On utilise $t = \mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.
On a alors $t^2 - 1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + e - 2x + 2}{4} - 1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + e - 2x - 2}{4} = \mathrm{sh}^2(x)$.
Ainsi $\sqrt{t^2-1} = \sqrt{\mathrm{sh}^2(x)} = |\mathrm{sh}(x)|$. Donc $\boxed{u(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{ch}(x) + |\mathrm{sh}(x)|\right)}$.
On utilise que $\mathrm{sh}(x)$ est positif si $x > 0$, négatif ou nul sinon.
- Si $x > 0$, $u(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}^x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$.
- Si $x \leqslant 0$, $u(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{-x}}{2}\right) = -\dfrac{x}{2}$.

Cela donne dans tous les cas $\boxed{u(x) = \dfrac{|x|}{2}}$.

11. Soit $x, y \in I$.

(a) On observe que $1 + xy - (x+y) = (x-1)(y-1)$.
Comme $x < 1$ et $y < 1$, on a $x - 1 < 0$ et $y - 1 < 0$, d'où $(x-1)(y-1) > 0$.
Cela montre $1 + xy - (x+y) > 0$, soit $1 + xy > x + y$.
Comme $1 + xy > 0$, on a $\dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.
De même on a $1 + xy + (x+y) = (x+1)(y+1) > 0$ qui permet de montrer que $\dfrac{x+y}{1+xy} > -1$.
Finalement, $\boxed{\dfrac{x+y}{1+xy} \in I}$.
Pour tous $x, y \in I$, posons $a = \mathrm{argth}(x)$ et $b = \mathrm{argth}(y)$. On a montré en question 3 que $\mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)} = \dfrac{x+y}{1+xy}$.
Ainsi $\mathrm{argth}\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right) = \mathrm{argth}(\mathrm{th}(a+b)) = a + b = \boxed{\mathrm{argth}(x) + \mathrm{argth}(y)}$.

12. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On applique ce qui précède à $x = \dfrac{1}{k+1}$ et $y = -\dfrac{1}{k+2}$, qui sont bien des éléments de $]-1, 1[$.

Or $\dfrac{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}}{1-\frac{1}{k+1}\frac{1}{k+2}} = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)-1} = \dfrac{1}{k^2+3k+1}$.

Donc $\operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k+1}\right) + \operatorname{argth}\left(-\dfrac{1}{k+2}\right) = \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right)$ et par imparité de argth, on a exactement $\boxed{\operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right) = \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k+1}\right) - \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k+2}\right)}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right)$.

Par télescopage, on obtient $S_n = \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{2}\right) - \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$.

(c) Par imparité (ou en calculant $\operatorname{th}(0)=0$), on sait que $\operatorname{argth}(0)=0$. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \operatorname{argth}\left(\dfrac{1}{2}\right)}$.

Si on le souhaite, on peut calculer cette valeur en résolvant l'équation $\operatorname{th}(x) = \dfrac{1}{2}$. On obtient $\mathrm{e}^{2x} = 3$, soit la valeur de la limite : $\boxed{\dfrac{\ln(3)}{2}}$.

Problème 3

A Deux exemples, études classiques

1. Soit A, B deux points du plan complexe d'affixes respectives a et b.
   (a) $\dfrac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$, privé de B (voir cours).
   (b) $\dfrac{d-a}{d-b} = i \Leftrightarrow AD = BD$ et $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}) = \dfrac{\pi}{2}$. De même $AF = BF$ et $(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA}) = -\dfrac{\pi}{2}$. Donc ABF et ABD sont les deux triangles rectangles isocèles portés par l'hypoténuse $[AB]$. Ils forment un quadrilatère aux quatre côtés de même longueur et quatre angles droits. Donc $\boxed{ADBF \text{ est un carré}}$.
2. ABC est équilatéral si et seulement s'il est isocèle avec un angle de $\pm\dfrac{\pi}{3}$. Ceci équivaut à $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\dfrac{\pi}{3}$, *i.e.* $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1$ et $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \pm\dfrac{\pi}{3}$, soit encore $\boxed{\dfrac{c-a}{b-a} \in \{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\}}$.

B Autour de l'inégalité triangulaire

3. **Initialisation :** pour $n=2$, l'inégalité est vérifiée, c'est l'inégalité triangulaire classique.
   Hérédité : soit $n \geqslant 2$. Supposons que

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n|$$

Pour tous $z_1, \ldots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$, on applique l'inégalité triangulaire avec $z = z_1 + \ldots + z_n$ et $z' = z_{n+1}$. Ainsi,

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| \leqslant |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}|.$$

Puis on applique l'hypothèse de récurrence au premier de ces deux termes. D'où

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

$\boxed{\text{CQFD}}$.

4. Cas d'égalité dans le cas $n = 2$.

   (a)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\Leftrightarrow |z_1|^2 + \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2) = |z_1||z_2| \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \text{ si et seulement si } \mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2) = |z_1||z_2|}$.

   (b) On a donc $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2) = |\overline{z_1}z_2|$.
   Or pour $Z \in \mathbb{C}$, $|Z| = \mathrm{Re}\, Z$ si et seulement si $\sqrt{x^2 + y^2} = x$ (en posant $Z = x + iy$), ce qui équivaut à $y = 0$ et $x \geqslant 0$, soit $Z \in \mathbb{R}_+$.
   Donc on a

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow \overline{z_1}z_2 \in \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Arg}(\overline{z_1}z_2) \equiv 0\,[2\pi] \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Arg}(\overline{z_1}) + \mathrm{Arg}(z_2) \equiv 0\,[2\pi] \\ &\Leftrightarrow -\mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \equiv 0\,[2\pi] \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Arg}(z_1) \equiv \mathrm{Arg}(z_2)\,[2\pi]. \end{aligned}$$

5. On suppose la propriété vraie au rang n, c'est à dire :

$$|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n| \text{ si et seulement si } \mathrm{Arg}(z_1) \equiv \ldots \equiv \mathrm{Arg}(z_n)[2\pi].$$

   Soient $z_1, \ldots, z_{n+1}$ des nombres complexes tels que

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|.$$

   (a) On a, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| \leqslant |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|$$

   Les deux termes extrémaux étant égaux, toutes les inégalités sont des égalités.
   Ainsi $|z_1+\ldots+z_n+z_{n+1}| \leqslant |z_1+\ldots+z_n|+|z_{n+1}|$ et $|z_1+\ldots+z_n|+|z_{n+1}| \leqslant |z_1|+\ldots+|z_n|+|z_{n+1}|$.
   Donc $\boxed{|z_1 + \ldots + z_n + z_{n+1}| \leqslant |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}| \text{ et } |z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n|}$.

   (b) D'après l'hypothèse de récurrence, la deuxième de ces égalités montre que $\mathrm{Arg}(z_1) \equiv \ldots \equiv \mathrm{Arg}(z_n)[2\pi]$. Tous ces arguments étant égaux, l'argument de la somme de ces nombres est aussi le même, on a alors $\mathrm{Arg}(z_1 + \ldots + z_n) \equiv \mathrm{Arg}(z_1)\,[2\pi]$ (géométriquement, les vecteurs associés sont colinéaires).
   D'après la question (4b), la première des deux égalités précédentes donne $\mathrm{Arg}(z_1 + \ldots + z_n) \equiv \mathrm{Arg}(z_{n+1})\,[2\pi]$.
   Finalement $\boxed{\mathrm{Arg}(z_1) \equiv \ldots \equiv \mathrm{Arg}(z_{n+1})[2\pi]}$.
   On a donc démontré par récurrence une condition nécessaire et suffisante au cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :
   $\boxed{\text{on a égalité si et seulement si les arguments des nombres considérés sont égaux modulo } 2\pi}$.

C Caractérisation d'un polygone régulier

6. Supposons tout d'abord que le polygone $M_1 \dots M_n$ est régulier et posons $z_1 = \rho e^{i\theta}$.

   (a) Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\boxed{|z_k| = \rho}$.

   La relation $(\overrightarrow{OM_{k-1}}, \overrightarrow{OM_k}) = \dfrac{2\pi}{n}$, se traduit par $\text{Arg}\left(\dfrac{z_k}{z_{k-1}}\right) = \text{Arg}(z_k) - \text{Arg}(z_{k-1}) = \dfrac{2\pi}{n}$. Donc les arguments des z_k suivent une progression arithmétique.

   D'où $\boxed{\text{Arg}(z_k) = \theta + (k-1)\dfrac{2\pi}{n}}$.

   (b) Sous forme exponentielle, cela donne $z_k = \rho e^{i(\theta+(k-1)\frac{2\pi}{n})}$, soit $z_k = z_1\omega^{k-1}$.

   Donc pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $\omega^{n+1-k}z_k = \omega^n z_1 = z_1$.

   Finalement, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k}z_k = nz_1}$.

7. On suppose maintenant réciproquement que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k}z_k = nz_1$.

   (a) On a alors $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k}z_k\right| = |nz_1| = \boxed{n\rho}$.

   On constate alors que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega^{n+1-k}z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\omega^{n+1-k}z_k|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

   D'après la partie précédente, les arguments de tous les termes de cette somme sont égaux, à savoir

   $$\forall k \in \{1 \dots n\},\ \text{Arg}(\omega^{n+1-k}z_k) \equiv \text{Arg}(z_1)\,[2\pi].$$

   (b) Cette relation donne, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\text{Arg}(\omega^{n+1-(k+1)}z_{k+1}) - \text{Arg}(\omega^{n+1-k}z_k) \equiv 0\,[2\pi]$.

   D'où $\text{Arg}(z_{k+1}) - \text{Arg}(z_k) \equiv \text{Arg}(\omega) = \dfrac{2\pi}{n}$.

   D'où, en termes d'angles, $\boxed{(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \dfrac{2\pi}{n}}$.

   De plus on a bien $\boxed{(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_1}) = \dfrac{2\pi}{n}}$ car $\text{Arg}(\omega z_n) = \text{Arg}(z_1)$. Le polygone est bien régulier.

D Le cas d'un triangle équilatéral

Soient A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. On rappelle la notation $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Le but de cette partie est de montrer que ABC est un polygone régulier (un triangle équilatéral dans le cas de trois points) si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.

8. $1, j$ et j^2 sont les racines troisièmes de l'unité, donc leur somme vaut $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

9. On suppose tout d'abord que $a + jb + j^2c = 0$.

   En écrivant $1 = -j - j^2$, on obtient $a(-j - j^2) + jb + j^2c = 0$.

   Alors $j(b-a) + j^2(c-a) = 0$, d'où $\dfrac{c-a}{b-a} = -\dfrac{1}{j} = -j^2$.

Le module nous donne $\boxed{AC = AB}$ et l'argument $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{Arg}(-j^2) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$.

Le triangle ABC est isocèle avec un angle de $\pi/3$. Il est donc $\boxed{\text{équilatéral}}$.

10. Réciproquement, on suppose maintenant que le triangle ABC est équilatéral.

(a) Comme ABC est régulier, la condition nous donne, avec $n = 3$, $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = j$, $z_1 = a$, $z_2 = b$ et $z_3 = c$, $a + j^2 b + jc = 3a$. De même, on obtient $b + j^2 c + ja = 3b$ et $c + j^2 a + jb = 3c$ comme suggéré par l'indication. On combine ces trois équations :
$3(a + jb + j^2 c) = (a + j^2 b + jc) + j(b + j^2 c + ja) + j^2(c + j^2 a + jb) = 3(1 + j + j^2)(a + b + c) = 0$.
Donc $\boxed{a + jb + j^2 c = 0}$.

(b) On a $a' + jb' + j^2 c' = a + jb + j^2 c - \dfrac{a+b+c}{3}\underbrace{(1 + j + j^2)}_{=0} = a + jb + j^2 c$.

Donc $\boxed{a' + jb' + j^2 c' = 0 \text{ si et seulement si } a + jb + j^2 c = 0}$.

$\dfrac{a+b+c}{3}$ est l'affixe de G, centre de gravité du triangle ABC. Ce triangle est équilatéral donc $GA = GB = GC$. C'est-à-dire $\boxed{|a'| = |b'| = |c'|}$.

Pour finir, sous notre hypothèse (ABC équilatéral), on remarque que a', b', c' sont les affixes des sommets A', B', C' d'un triangle équilatéral également, image de ABC par la translation d'un vecteur d'affixe $\dfrac{a+b+c}{3}$.

De plus, $|a'| = |b'| = |c'|$. On peut donc leur appliquer la question (10a) et en déduire que $a' + jb' + j^2 c' = 0$, ce qui implique, d'après le début de cette question (10b), que $\boxed{a + jb + j^2 c = 0}$.