Travail en autonomie

Problème 1

Soit a, b, c trois nombres réels tels que a et b soient non nuls.
Étant donnée (u_n) une suite de nombres réels ou complexes, on s'intéresse à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0. \tag{$\mathcal{R}$}$$

On appelle (E) l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$.

Généralités

1. Soit (u_n) et (v_n) vérifiant la relation $\mathcal{R}$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ vérifie la relation $\mathcal{R}$.
2. Soit $q \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la suite (q^n) vérifie la relation $\mathcal{R}$ si et seulement si q est solution de l'équation (E).

Avec discriminant positif

On suppose dans cette partie que $b^2 - 4ac > 0$ et on appelle q_1 et q_2 les deux solutions de (E). On admet alors que toutes les suites réelles vérifiant la relation $\mathcal{R}$ sont de la forme $(\lambda q_1^n + \mu q_2^n)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. **Application :** Déterminer toutes les suites (v_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} + 6v_n$.
4. Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique suite réelle (u_n) vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = p,\ u_1 = q \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \end{cases}.$$

5. **Application :** Déterminer l'unique suite (v_n) vérifiant

$$\begin{cases} v_0 = 3,\ v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = v_{n+1} + 6v_n \end{cases}.$$

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

Avec discriminant nul

On suppose dans cette partie que $b^2 - 4ac = 0$ et on appelle r l'unique solution de (E), c'est-à-dire la racine double de $ax^2 + bx + c$.

6. Montrer que $2ar + b = 0$.
7. Montrer que la suite (nr^n) vérifie la relation $\mathcal{R}$.

On admet que toutes les suites réelles vérifiant la relation $\mathcal{R}$ sont de la forme $(\lambda r^n + \mu n r^n)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

8. **Application :** Déterminer toutes les suites (w_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = 4(w_{n+1} - w_n)$.
9. Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique suite réelle (u_n) vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = p,\ u_1 = q \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \end{cases}.$$

10. **Application :** Déterminer l'unique suite (w_n) vérifiant

$$\begin{cases} w_0 = 3,\ w_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 4(w_{n+1} - w_n) \end{cases}.$$

Avec discriminant négatif

On suppose dans cette partie que $b^2 - 4ac < 0$ et on appelle $q_1 = \rho e^{i\theta}$ et $q_2 = \rho e^{-i\theta}$ les deux solutions complexes conjuguées de (E), données sous forme exponentielle. On admet alors que toutes les suites **complexes** vérifiant la relation $\mathcal{R}$ sont de la forme $(\lambda q_1^n + \mu q_2^n)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On s'intéresse aux suites **réelles** qui la vérifient.

11. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et, pour tout n, $z_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$ tels que (z_n) vérifie la relation $\mathcal{R}$. Montrer que (z_n) est une suite réelle si et seulement si λ et μ sont conjugués.
12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n est de la forme $\rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$ avec A et B réelsà déterminer en fonction de λ et μ.
13. **Application :**
    (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ et donner les solutions sous les formes algébrique et exponentielle.
    (b) Déterminer toutes les suites réelles (x_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = 2(x_{n+1} - x_n)$.
    (c) Déterminer l'unique suite (x_n) vérifiant

$$\begin{cases} x_0 = 1,\ x_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = 2(x_{n+1} - x_n) \end{cases}.$$