Travail en autonomie

Problème 1

Généralités

1. Soit $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $aw_{n+2} + bw_{n+1} + cw_n = \lambda(au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n) + \mu(av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n) = 0$.
   Donc $\boxed{(\lambda u_n + \mu v_n) \text{ vérifie la relation } (\mathcal{R})}$.
2. Pour $q \in \mathbb{C}^*$, la suite (q^n) vérifie $(\mathcal{R})$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $aq^{n+2} + bq^{n+1} + cq^n = q^n(aq^2 + bq + c) = 0$. Comme $q \neq 0$, cela équivaut à $aq^2 + bq + c = 0$.
   Ainsi, $\boxed{(q^n) \text{ vérifie } (\mathcal{R}) \text{ si et seulement si } q \text{ est solution de } (E)}$.

Avec discriminant positif

3. L'équation associée est $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0$, de racines 3 et -2.
   Les suites cherchées sont donc $\boxed{\{(\lambda(-2)^n + \mu 3^n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}}$.
4. D'après le résultat admis, les suites réelles vérifiant $(\mathcal{R})$ sont les suites $(\lambda q_1^n + \mu q_2^n)$. Les conditions initiales donnent $\begin{cases} \lambda + \mu = p \\ \lambda q_1 + \mu q_2 = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{q - pq_2}{q_1 - q_2} \\ \mu = \dfrac{pq_1 - q}{q_1 - q_2} \end{cases}$, car $q_1 \neq q_2$. Ces valeurs déterminent une unique suite, qui convient puisque chacune des suites (q_1^n) et (q_2^n) vérifie $(\mathcal{R})$.
5. On sait que $v_n = \lambda(-2)^n + \mu 3^n$. Les conditions initiales donnent $\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ -2\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{8}{5} \\ \mu = \dfrac{7}{5} \end{cases}$.
   Ainsi pour tout n, $\boxed{v_n = \frac{8}{5}(-2)^n + \frac{7}{5}3^n}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par sommation géométrique, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{8}{5}\frac{1-(-2)^{n+1}}{3} + \frac{7}{5}\frac{1-3^{n+1}}{-2}$.
   D'où $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{8}{15}(1-(-2)^{n+1}) + \frac{7}{10}(3^{n+1}-1)}$.

Avec discriminant nul

6. La racine double de $ax^2 + bx + c$ est $r = -\dfrac{b}{2a}$, donc $\boxed{2ar + b = 0}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a(n+2)r^{n+2} + b(n+1)r^{n+1} + cnr^n = nr^n(ar^2 + br + c) + r^{n+1}(2ar + b) = 0$, puisque r est racine de (E) et $2ar + b = 0$.
   Donc $\boxed{(nr^n) \text{ vérifie } (\mathcal{R})}$.

8. L'équation associée est $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$. Sa racine double est 2.
Les suites cherchées sont $\boxed{\{((\lambda + \mu n)2^n) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}}$.

9. D'après le résultat admis, $u_n = (\lambda + \mu n)r^n$. Les conditions initiales donnent $\begin{cases} \lambda = p \\ r(\lambda + \mu) = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = p \\ \mu = \dfrac{q}{r} - p \end{cases}$. Or $r = -b/(2a) \neq 0$ puisque $b \neq 0$. Ces valeurs déterminent une unique suite, qui convient d'après les résultats précédents.

10. On sait que $w_n = (\lambda + \mu n)2^n$. Les conditions initiales donnent $\begin{cases} \lambda = 3 \\ 2(\lambda + \mu) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$.
Ainsi pour tout n, $\boxed{w_n = \left(3 - \frac{5n}{2}\right) 2^n}$.

Avec discriminant négatif

11. Supposons $\mu = \overline{\lambda}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \lambda q_1^n + \overline{\lambda}\,\overline{q_1}^n = 2\,\mathrm{Re}(\lambda q_1^n) \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, supposons (z_n) réelle. Comme $q_2 = \overline{q_1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda q_1^n + \mu q_2^n = \overline{\lambda} q_2^n + \overline{\mu} q_1^n$, soit $(\lambda - \overline{\mu})q_1^n + (\mu - \overline{\lambda})q_2^n = 0$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient un système homogène de déterminant $q_2 - q_1 \neq 0$. Donc $\lambda = \overline{\mu}$, soit $\boxed{\mu = \overline{\lambda}}$.

12. Lorsque (z_n) est réelle, $\mu = \overline{\lambda}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \rho^n(\lambda \mathrm{e}^{in\theta} + \overline{\lambda}\mathrm{e}^{-in\theta}) = \rho^n\big((\lambda + \overline{\lambda})\cos(n\theta) + i(\lambda - \overline{\lambda})\sin(n\theta)\big)$.
Ainsi, $\boxed{z_n = \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))}$, avec $A = 2\,\mathrm{Re}(\lambda)$ et $B = -2\,\mathrm{Im}(\lambda)$, qui sont réels.

13. (a) L'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -4 = (2i)^2$.
Ses solutions sont $\boxed{z = 1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}}$ et $\boxed{z = 1 - i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/4}}$.

(b) D'après la question précédente, les suites réelles solutions sont

$$\left\{\left((\sqrt{2})^n \left(A\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)\right) \mid A, B \in \mathbb{R}\right.$$

(c) Les conditions initiales donnent $\begin{cases} A = 1 \\ \sqrt{2}\left(A\cos(\frac{\pi}{4}) + B\sin(\frac{\pi}{4})\right) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$.
Donc pour tout n, $\boxed{x_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)}$.