TD C1. Systèmes linéaires

Exercice C1.1

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} (2-i)x+(3+i)y=1+2i \\ (3+2i)x+(1+5i)y=-2+3i \end{cases}$,
3. $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x+2y+z=1 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}$,
4. $\begin{cases} 2x-y+2z=2 \\ x+y+z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$,
5. $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x-3y+2z=2 \\ -x+y+4z=4 \end{cases}$,
6. $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases}$,
7. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-3y+2z=4 \end{cases}$,
8. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$.

Exercice C1.2 ⚙

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+5y-3z=1 \\ 3x+6y-z=1 \\ 4x+7y+z=1 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} x+3y+2z+t=-2 \\ 2x+7y+3z=-5 \\ 3x+8y+7z+11t=13 \\ -2x-8y-2z+6t=18 \end{cases}$,
3. $\begin{cases} x+y-z-s+t=0 \\ 2x+y-4z+4t=0 \\ x+2y-3z+s-t=0 \end{cases}$.

Exercice C1.3 ⚙

Résoudre les systèmes suivants, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} x+y=a \\ -x+ay=1 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \\ 2x+2y+3z=3 \end{cases}$,
3. $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+3y-4z=2 \\ 2x+3y-5z=a \end{cases}$,
4. $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x+3y-2z=2 \\ 7x-4y-a^2z=a-4 \end{cases}$,
5. $\begin{cases} x+ay+2z=a \\ -2x+y+(a-2)z=1 \\ ax+y+2z=2a-1 \end{cases}$,
6. $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=1 \\ x+y+z=a \end{cases}$.

Exercice C1.4 ⚙

1. Résoudre, en fonction de $a \in \mathbb{C}$, le système

$$\begin{cases} x & + & ay & + & a^2z & = & 0 \\ \overline{a}x & + & y & + & az & = & 0 \\ \overline{a}^2x & + & \overline{a}y & + & z & = & 0 \end{cases}.$$

2. Soit $a,b,c\in\mathbb{C}$ et $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. En exploitant la relation $1+j+j^2=0$, résoudre

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & jy & + & j^2z & = & b \\ x & + & j^2y & + & jz & = & c \end{cases}.$$

Exercice C1.5 ⚙⚙

Soit $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

1. Lorsque a,b,c,d sont deux à deux distincts, résoudre le système

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{cases}.$$

2. Que dire de ce système dans les autres cas ?

Exercice C1.6

Déterminer le rang des matrices suivantes.

1. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$, 2. $B=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\2&-1&1&-1\\3&3&-2&4\\4&3&-1&1\end{pmatrix}$, 3. $C=\begin{pmatrix}2&2&1&0&1&1\\1&2&1&0&-1&2\\2&3&1&-1&0&1\\-1&0&1&2&3&1\end{pmatrix}$.

Exercice C1.7 ⚙

Déterminer en fonction des paramètres le rang des matrices suivantes :

1. $A=\begin{pmatrix}1-a&0&0\\-1&2-a&1\\2&0&3-a\end{pmatrix}$, 2. $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\b+c&c+a&a+b\\bc&ca&ab\end{pmatrix}$, 3. $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{pmatrix}$.

Exercice C1.8 ⚙⚙

Soit $n\geqslant 2$ un entier et $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1+x_2=2b_1 \\ x_2+x_3=2b_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}+x_n=2b_{n-1} \\ x_1+x_n=2b_n \end{cases}.$$

cc BY NC SA