Les résultats devront être encadrés.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

On considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}x) \text{ et } g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}\right).$$

Le but du problème est de montrer, par deux méthodes différentes, que $f = g$.

A Première méthode (utilisant les dérivées)

1. Rappeler la relation liant $\operatorname{ch}^2 x$ et $\operatorname{sh}^2 x$ pour tout réel x.
2. Donner, en justifiant, les domaines de définition de f et de g.
3. Préciser les points où f est dérivable et montrer que $f' = \dfrac{1}{2\operatorname{ch}}$.
4. Faire de même avec la fonction g. (On justifiera le calcul effectué.)
5. En déduire que $f = g$.

B Deuxième méthode (trigonométrique)

6. Donner un exemple de deux réels distincts avec $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $b \in]-\pi, \pi[$ et tels que $\tan a = \tan b$.
7. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ puis que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(2f(x)) = \operatorname{sh}(x)$.

On considère maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}$.

8. En étudiant la fonction h, montrer que $h(x) \in]-1, 1[$ pour tout réel x et en déduire que pour tout réel x, $g(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.
9. Montrer que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a : $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$.
10. En déduire que pour tout réel x, $\tan(2g(x)) = \operatorname{sh}(x)$.
11. En déduire que $f = g$ (on pourra méditer sur la question a).

C Applications

12. En utilisant la définition de ch et sh, donner une expression simple de $\mathrm{ch}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$ et de $\mathrm{sh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$. De quel angle peut-on déduire la tangente ?
13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\, x) = 2\,\mathrm{Arctan}(\frac{1}{2})$.

Problème 2

Dans tout le problème, on pose $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/7}$.

A Estimation d'un cosinus

On considère l'équation (E) : $z^7 = 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et donner ses solutions sous forme exponentielle.
2. Calculer la somme des solutions de l'équation (E).
3. En déduire que
$$1 + 2\cos(\frac{2\pi}{7}) + 2\cos(\frac{4\pi}{7}) + 2\cos(\frac{6\pi}{7}) = 0.$$
4. Exprimer $\cos(2x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.
5. En déduire que les trois réels $\cos(\frac{2\pi}{7})$, $\cos(\frac{4\pi}{7})$ et $\cos(\frac{6\pi}{7})$ sont solutions de l'équation
$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$
6. En étudiant la fonction $h : x \mapsto 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$, montrer que
$$\frac{3}{5} < \cos(\frac{2\pi}{7}) < \frac{5}{8}.$$

B Deux sommes de nombres complexes

On pose $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

7. Montrer que $B = \overline{A}$ et $\mathrm{Im}(A) > 0$.
8. Calculer $A + B$ et AB. En déduire A et B.
9. Exprimer $\mathrm{Re}(A)$ en fonction de $\cos(\frac{2\pi}{7})$ et retrouver l'égalité 3.
10. En considérant la partie imaginaire de A, montrer que
$$\sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7}) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$
11. En déduire $\sin(\frac{\pi}{7})\sin(\frac{2\pi}{7})\sin(\frac{3\pi}{7})$.

C Les complexes au service de la trigonométrie

Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, 6\}$, on pose $S_k = \sum_{j=0}^{6} \omega^{jk}$ et $T_k = \sum_{j=0}^{6} j\omega^{jk}$.

12. Calculer S_k.
13. Montrer que $T_k = \dfrac{-7}{1-\omega^k}$.
14. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer si possible le module et l'argument de $1 - e^{ix}$ puis montrer que, pour tout réel $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,
$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{ix}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}.$$
15. En déduire les valeurs des sommes $\sum_{j=1}^{6} j\cos(\frac{2j\pi}{7})$ et $\sum_{j=1}^{6} j\sin(\frac{2j\pi}{7})$.
16. Montrer que, pour tout entier $k \in \{1, \ldots, 6\}$,
$$\sum_{j=0}^{6} \cos^2(\frac{2jk\pi}{7}) = \frac{7}{2}.$$
17. En déduire la valeur de $\cos^2(\frac{2\pi}{7}) + \cos^2(\frac{4\pi}{7}) + \cos^2(\frac{6\pi}{7})$.

Problème 3

Dans tout le problème, $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité (pour $n \geqslant 1$). Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on appelle $S_n(z)$ la somme
$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$
En particulier, on remarque que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S_1(z) = 1$.

1. Déterminer les points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ du plan tels que $|S_2(z)| = |z|$.
2. Déterminer les points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ du plan tels que $S_3(z) \in \mathbb{R}$.
3. Majoration du module
   (a) Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour le module des nombres complexes.
   (b) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $z \in \mathbb{U}$, on a $|S_n(z)| \leqslant n$.
   (c) Existe-t-il un $z \in \mathbb{U}$ tel que cette borne soit atteinte ? Justifier.
4. Dans cette question, on pose $a = e^{i\frac{\pi}{n}}$ avec n entier supérieur ou égal à 2.
   (a) Trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $a \in \mathbb{U}_N$.
   (b) Montrer que $S_n(a) = \dfrac{2}{1-a}$.
   (c) Déterminer le module et l'argument de $S_n(a)$.
5. Dans cette question enfin, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et on cherche l'ensemble $\mathcal{E}$ des $z \in \mathbb{U}$ tels que $|S_n(z)| = 1$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ contient $(\mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}) \setminus \{1\}$.
   (b) Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $|S_n(z)| = 1$. Montrer que $|z^n - 1| = |z - 1|$. En déduire
   $$z^n + \overline{z}^n = z + \overline{z}.$$
   (c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.