Sol D1. Systèmes linéaires

Exercice D1.1

La forme échelonnée après pivot de Gauß et les solutions.

1. $\begin{cases} x+2y=5 \\ -3y=-6 \end{cases}$ $S=\{(1,2)\}$.
2. $\begin{cases} x+(1+i)y=i \\ 0=0 \end{cases}$ $S=\{(i-(1+i)t,t) \mid t\in\mathbb{C}\}$.
3. $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 5y-2z=1 \\ 11z=7 \end{cases}$ $S=\left\{\left(-\frac{2}{11},\frac{5}{11},\frac{7}{11}\right)\right\}$.
4. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y=0 \\ 0=0 \end{cases}$ $S=\{(1-t,0,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$.
5. $\begin{cases} x-y=0 \\ 2z=2 \\ 0=0 \end{cases}$ $S=\{(t,t,1) \mid t\in\mathbb{R}\}$.
6. $\begin{cases} x+y=0 \\ -y=1 \\ 0=0 \end{cases}$ $S=\{(1,-1)\}$.
7. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -6y-z=1 \end{cases}$ $S=\left\{\left(\frac{7-5t}{6},-\frac{1+t}{6},t\right) \mid t\in\mathbb{R}\right\}$.
8. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0=0 \end{cases}$ $S=\{(1-s-t,s,t) \mid (s,t)\in\mathbb{R}^2\}$.

Exercice D1.2

La forme échelonnée après pivot de Gauß et les solutions.

1. $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3y-7z=1 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$ $S=\left\{\left(-\frac{1+13t}{3},\frac{1+7t}{3},t\right) \mid t\in\mathbb{R}\right\}$.
2. $\begin{cases} x+3y+2z+t=-2 \\ y-z-2t=-1 \\ 6t=18 \\ 0=0 \end{cases}$ $S=\{(-20-5u,5+u,u,3) \mid u\in\mathbb{R}\}$.

3. $\begin{cases} x+y-z-s+t=0 \\ -y-2z+2s+2t=0 \\ -4z+4s=0 \end{cases}$ $S=\{(2u-3v,2v,u,u,v) \mid (u,v)\in\mathbb{R}^2\}$.

Exercice D1.3

Résoudre les systèmes suivants, en fonction du paramètre $a\in\mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} x+y=a \\ -x+ay=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ (a+1)y=a+1 \end{cases}$.

1er cas : $a\neq -1$. Le système équivaut à $\begin{cases} x+y=a \\ y=1 \end{cases}$, donc $S=\{(a-1,1)\}$.

2e cas : $a=-1$. Le système équivaut à $\begin{cases} x+y=-1 \\ 0=0 \end{cases}$, donc $S=\{(-1-t,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

2. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \\ 2x+2y+3z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ (a-1)y=1 \\ z=1 \end{cases}$.

1er cas : $a\neq 1$. Le système équivaut à $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y=\dfrac{1}{a-1} \\ z=1 \end{cases}$, donc $S=\left\{\left(-\dfrac{1}{a-1},\dfrac{1}{a-1},1\right)\right\}$.

2e cas : $a=1$. La deuxième équation devient $0=1$, donc le système est incompatible. $S=\emptyset$.

3. $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+3y-4z=2 \\ 2x+3y-5z=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ y-z=1 \\ 0=a-1 \end{cases}$. Le système est de rang 2 avec une équation de compatibilité.

1er cas : $a\neq 1$. Le système est incompatible, donc $S=\emptyset$.

2e cas : $a=1$. Le système équivaut à $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ y-z=1 \\ 0=0 \end{cases}$, donc $S=\{(t-1,t+1,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

4. $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x+3y-2z=2 \\ 7x-4y-a^2z=a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z=2 \\ -5y+z=-3 \\ (9-a^2)z=a-3 \end{cases}$.

1er cas : $a\notin\{-3,3\}$. Le système admet une unique solution.

$$S=\left\{\left(\frac{a-4}{5(a+3)},\frac{3a+8}{5(a+3)},-\frac{1}{a+3}\right)\right\}.$$

2e cas : $a=3$. Le système équivaut à $\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ -5y+z=-3 \\ 0=0 \end{cases}$, donc $S=\left\{\left(\dfrac{1+7t}{5},\dfrac{3+t}{5},t\right) \mid t\in\mathbb{R}\right\}$.

CC BY NC SA

3e cas : $a = -3$. La dernière équation devient $0 = -6$, donc $S = \emptyset$.

5. $\begin{cases} x + ay + 2z = a \\ -2x + y + (a-2)z = 1 \\ ax + y + 2z = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + 2z = a \\ (2a+1)y + (a+2)z = 2a + 1 \\ (1-a^2)y + 2(1-a)z = -(a-1)^2 \end{cases}$.

1er cas : $a \neq -\dfrac{1}{2}$.

Le système équivaut à $\begin{cases} x + ay + 2z = a \\ (2a+1)y + (a+2)z = 2a+1 \\ a(a-1)^2 z = 2(a-1)(2a+1) \ L_3 \leftarrow (2a+1)L_3 - (1-a^2)L_2 \end{cases}$.

- Si $a \notin \{0, 1\}$, le système admet une unique solution.

$$S = \left\{ \left(\frac{2(a^2-2a-2)}{a(a-1)}, \frac{(a-4)(a+1)}{a(a-1)}, \frac{2(2a+1)}{a(a-1)} \right) \right\}.$$

- Si $a = 0$, la dernière équation devient $0 = -2$, donc $S = \emptyset$.
- Si $a = 1$, le système équivaut à $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3y + 3z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$, donc $S = \{(-t, 1-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2e cas : $a = -\dfrac{1}{2}$. Arpès $L_2 \leftrightarrow L_3$, le système équivaut à $\begin{cases} x - \dfrac{1}{2}y + 2z = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{4}y + 3z = -\dfrac{9}{4} \\ 3z = 0 \end{cases}$, donc $S = \{(-2, -3, 0)\}$.

6. $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = 1 \\ x + y + z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ (a-1)y = 0 \\ (a-1)z = 1 - a \\ 0 = (a-1)(a+2) \end{cases}$.

1er cas : $a = 1$. Le système équivaut à $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$, donc $S = \{(1 - s - t, s, t) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$.

2e cas : $a = -2$. Le système équivaut à $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ -3y = 0 \\ -3z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$, donc $S = \{(-1, 0, -1)\}$.

3e cas : $a \notin \{-2, 1\}$. La dernière équation est incompatible, donc $S = \emptyset$.

CC BY NC SA