Sol B2. Nombres réels et suites numériques

Exercice B2.1

1. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, de raison 3 et de point fixe $\frac{5}{2}$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3^n + 5}{2}}$.
2. Classique modèle d'évolution. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-C)u_n + C$. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, de raison $1-C$ et de point fixe 1. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + \left(\frac{1}{N} - 1\right)(1-C)^n}$.

Exercice B2.2

1. L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$, de racines 1 et -2.
   Les suites vérifiant la relation de récurrence sont exactement les suites
   $$\left\{(lambda + \mu(-2)^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
   Les conditions initiales donnent $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - 2\mu = 1 \end{cases}$, d'où $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\mu = -\frac{1}{3}$.
   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1 - (-2)^n}{3}}$.
2. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r - 1 = 0$, de racines $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$.
   Les suites vérifiant la relation de récurrence sont exactement les suites
   $$\left\{\left(\lambda(1+\sqrt{2})^n + \mu(1-\sqrt{2})^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
   Les conditions initiales donnent $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ (1+\sqrt{2})\lambda + (1-\sqrt{2})\mu = 0 \end{cases}$, d'où $\lambda = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $\mu = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.
   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2-\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n + \frac{2+\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n}$.
3. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, de racine double 2.
   Les suites vérifiant la relation de récurrence sont exactement les suites
   $$\left\{((\lambda + \mu n)2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
   Les conditions initiales donnent $\begin{cases} \lambda = 1 \\ 2(\lambda + \mu) = 0 \end{cases}$, d'où $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.
   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1-n)2^n}$.
4. L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$, de racines complexes conjuguées $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\pi/3}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{-i\pi/3}$.

Dans $\mathbb{C}$: Les suites vérifiant la relation de récurrence sont exactement les suites

$$\left\{\left(\lambda e^{in\pi/3}+\mu e^{-in\pi/3}\right)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

Les conditions initiales donnent $\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda e^{i\pi/3}+\mu e^{-i\pi/3}=2\end{cases}$, d'où $\lambda=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ et $\mu=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

Dans $\mathbb{R}$: Les suites réelles vérifiant la relation de récurrence sont exactement les suites

$$\left\{\left(\lambda\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\mu\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Les conditions initiales donnent $\begin{cases}\lambda=1\\ \dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu=2\end{cases}$, d'où $\lambda=1$ et $\mu=\sqrt{3}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}$.

Exercice B2.3

Indications et solutions.

1. Effectuer la somme et la différence des deux relations pour exprimer (u_n+v_n) (arithmético géométrique) et (u_n-v_n) (arithmétique). Puis exprimer ces deux suites en fonction de n. En déduire les expressions de u_n et v_n pour tout n.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et v_n. On obtient $v_{n+2}=\dfrac{1}{3}v_n+\dfrac{2}{3}v_{n+1}$.
   Exprimer alors v_n en fonction de n pour tout n, puis utiliser $u_n=\dfrac{3}{4}\left(v_{n+1}-\dfrac{5}{3}v_n\right)$.
   Finalement (sauf erreur), $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{3}{4}\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n-1\right)$ et $v_n=-\dfrac{1}{2}\left(\left(-\dfrac{1}{3}\right)+3\right)$.

cc BY NC SA