Problème 1

On considère les deux fonctions f et g définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}x) \text{ et } g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}\right).$$

Le but du problème est de montrer, par deux méthodes différentes, que $f = g$.

A Première méthode (utilisant les dérivées)

1. on a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$.
2. sh, ch et Arctan sont définies sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x) \in \mathbb{R}$ donc par composition, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + \operatorname{ch} x \neq 0$ car $\operatorname{ch} x \geqslant 1$. Par quotient puis par composition, $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.
3. Par les mêmes arguments, f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 x} \cdot \operatorname{ch}x = \frac{\operatorname{ch}x}{2(1+\operatorname{sh}^2 x)} = \boxed{\frac{1}{2\operatorname{ch}x}}.$$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}\right)^2} \cdot \frac{\operatorname{ch}x(1+\operatorname{ch}x) - \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}x}{(1+\operatorname{ch}x)^2}.$$
   En simplifiant, comme $1 + \operatorname{ch} x \neq 0$, on obtient également $\boxed{g'(x) = \frac{1}{2\operatorname{ch}x}}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x)$, *i.e.* $(f-g)'(x) = 0$, donc $f - g$ est constante. Comme $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que $f - g$ est constante égale à 0, donc $\boxed{f = g}$.

B Deuxième méthode (trigonométrique)

1. Par exemple $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}$.
2. $\operatorname{Im}(\operatorname{Arctan}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) < \frac{\pi}{2}$.
   Ainsi $\boxed{f(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[}$.
   $\tan(2f(x)) = \tan(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))) = \boxed{\operatorname{sh}(x)}$.
3. La fonction $h : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}$ est définie et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec, comme au début, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + \operatorname{ch} x \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}x(1+\mathrm{ch}x) - \mathrm{sh}^2 x}{(1+\mathrm{ch}x)^2} = \dfrac{1}{1+\mathrm{ch}\,x}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) > 0$, donc $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.
Un calcul de limites (à détailler) donne $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $h(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$.
Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \in]-1,1[}$.

4. La fonction Arctan est strictement croissante et ses valeurs particulières en 1 et -1 donnent $\mathrm{Arctan}(]-1,1[) = \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$.
Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[}$

5. Voir cours. $\boxed{\forall \theta \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[,\ \tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\tan(2g(x)) = \dfrac{2\tan(g(x))}{1-\tan^2(g(x))}$. Or $\tan(g(x)) = \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{1+\mathrm{ch}\,x}$. Donc $\tan(2g(x)) = \dfrac{2\frac{\mathrm{sh}\,x}{1+\mathrm{ch}\,x}}{1-\left(\frac{\mathrm{sh}\,x}{1+\mathrm{ch}\,x}\right)^2}$.
On simplifie : $\tan(2g(x)) = \dfrac{2\,\mathrm{sh}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}{(1+\mathrm{ch}(x))^2 - \mathrm{sh}^2(x)} = \boxed{\mathrm{sh}(x)}$.

7. On a montré $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(2f(x)) = \tan(2g(x))$, donc $\mathrm{Arctan}\,(\tan(2f(x))) = \mathrm{Arctan}\,(\tan(2g(x)))$.
Or $2f(x)$ et $2g(x)$ sont des éléments de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Donc $\mathrm{Arctan}\,(\tan(2f(x))) = 2f(x)$ et $\mathrm{Arctan}\,(\tan(2g(x))) = 2g(x)$.
Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$, *i.e.* $\boxed{f = g}$.

C Applications

1. $\mathrm{ch}\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$ et $\mathrm{sh}\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$.
En utilisant l'égalité $f\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right) = g\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right)$, on obtient $\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$.
Cela donne $\dfrac{\pi}{12} = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$, soit $\boxed{\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}+2} = 2-\sqrt{3}}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $f(x) = g(x)$ donne $\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\,x) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{1+\mathrm{ch}\,x}\right)$.
Comme Arctan est une bijection, l'équation proposée équivaut à $\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{1+\mathrm{ch}\,x} = \dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{1}{2}$, puis $\mathrm{e}^x = 3$.
L'unique solution est donc $\boxed{x = \ln 3}$.

Problème 2

Dans tout le problème, on pose $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/7}$.

A Racines septièmes de l'unité

On considère l'équation (E) : $z^7 = 1$.

1. $\boxed{\{e^{\frac{2ik\pi}{7}},\, k \in \{0,\dots,6\}\}}$.
2. $\boxed{\sum_{k=0}^{6} e^{\frac{2ik\pi}{7}} = 0}$.
3. En regroupant les termes conjugués, la somme précédente donne $1 + e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{-i\frac{2\pi}{7}} + e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{-i\frac{4\pi}{7}} + e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{-i\frac{6\pi}{7}} = 0$, soit, grâce à la formule d'Euler,
$$\boxed{1 + 2\cos(\frac{2\pi}{7}) + 2\cos(\frac{4\pi}{7}) + 2\cos(\frac{6\pi}{7}) = 0}.$$
4. En identifiant les parties réelles de la formule de Moivre, on obtient $\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1}$ et $\boxed{\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x}$.
5. On applique ces formules avec $x = \dfrac{2\pi}{7}$.
Ainsi, $\cos(\frac{4\pi}{7}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{7}) - 1$ et $\cos(\frac{6\pi}{7}) = 4\cos^3(\frac{2\pi}{7}) - 3\cos(\frac{2\pi}{7})$. En remplaçant dans l'égalité de la question 3, on obtient
$$\boxed{8\cos^3(\frac{2\pi}{7}) + 4\cos^2(\frac{2\pi}{7}) - 4\cos(\frac{2\pi}{7}) - 1 = 0}.$$
De même, pour $x = \dfrac{4\pi}{7}$, on a $\cos(2x) = \cos(\frac{6\pi}{7})$ et $\cos(3x) = \cos(\frac{2\pi}{7})$; pour $x = \dfrac{6\pi}{7}$, on a $\cos(2x) = \cos(\frac{2\pi}{7})$ et $\cos(3x) = \cos(\frac{4\pi}{7})$. On retrouve donc la même égalité dans les deux cas. Ainsi, $\boxed{\text{les trois cosinus sont solutions de } 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0}$.
6. $h : x \mapsto 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 24x^2 + 8x - 4 = 4(6x^2 + 2x - 1)$.
$h'(x) = 0$ pour $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$. Le signe de h' montre que h est décroissante sur $[x_1, x_2]$ puis strictement croissante sur $[x_2, +\infty[$. Comme $0 < x_2 < \dfrac{3}{5}$ et $h(0) = -1 < 0$, h ne s'annule pas sur $[0, x_2]$ et possède au plus un zéro sur $[x_2, +\infty[$.
Or $\cos(\frac{2\pi}{7}) \in]0,1[$ est un zéro de h. Enfin, $h(\frac{3}{5}) = -\dfrac{29}{125} < 0$ et $h(\frac{5}{8}) = \dfrac{1}{64} > 0$. Par stricte croissance de h sur $[x_2, +\infty[$, on en déduit $\boxed{\dfrac{3}{5} < \cos(\frac{2\pi}{7}) < \dfrac{5}{8}}$.

B Deux sommes de nombres complexes

On pose $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

1. D'après ce qui précède, on a $\omega^7 = 1$ et donc $\overline{\omega} = \omega^{-1} = \omega^6$. De même, $\overline{\omega^2} = \omega^5$ et $\overline{\omega^4} = \omega^3$.
Donc $\boxed{\overline{A} = B}$.
Par ailleurs $\mathrm{Im}(A) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7})$.
$\sin(\frac{8\pi}{7}) < 0$, mais $\sin(\frac{8\pi}{7}) = -\sin(\frac{\pi}{7})$ et $\sin(\frac{\pi}{7}) < \sin(\frac{2\pi}{7})$.
Donc $\sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) > 0$ et donc $\boxed{\mathrm{Im}(A) > 0}$.

2. On a montré (et c'est dans le cours) que $\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$. Or $A + B = \sum_{k=1}^{6} \omega^k$. Donc $\boxed{A+B=-1}$.

   $AB = \omega^4 + \omega^6 + \omega^5 + \omega^8 + \omega^9 + \omega^{10} + 3\omega^7$. Or $\omega^7 = 1$. Donc $AB = 2\omega^7 + \sum_{k=0}^{6} \omega^k$. D'où $\boxed{AB=2}$.

   A et B sont donc les deux racines du trinôme $x^2 + x + 2$, à savoir $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

   Comme $\mathrm{Im}(A) > 0$, on a $\boxed{A = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } B = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}}$.

3. On a $\frac{-1}{2} = \mathrm{Re}(A) = \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{8\pi}{7})$, d'où $2(\cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{8\pi}{7})) + 1 = 0$, ce qui revient à l'égalité vue en 3.

4. On a $\mathrm{Im}(A) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Or $\sin(\frac{8\pi}{7}) = -\sin(\frac{\pi}{7})$.

   Donc $\boxed{\sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7}) = \frac{\sqrt{7}}{2}}$.

5. En posant $\alpha = \frac{\pi}{7}$ et en utilisant les formules d'Euler, on obtient

   $\sin(\alpha)\sin(2\alpha)\sin(3\alpha) = \frac{(\mathrm{e}^{i\alpha} - \mathrm{e}^{-i\alpha})(\mathrm{e}^{2i\alpha} - \mathrm{e}^{-2i\alpha})(\mathrm{e}^{3i\alpha} - \mathrm{e}^{-3i\alpha})}{(2i)^3}$

   $= \frac{\mathrm{e}^{6i\alpha} - \mathrm{e}^{4i\alpha} - \mathrm{e}^{2i\alpha} + \mathrm{e}^{-2i\alpha} + \mathrm{e}^{-4i\alpha} - \mathrm{e}^{-6i\alpha}}{-8i} = \frac{\sin(2\alpha) + \sin(4\alpha) - \sin(6\alpha)}{4}$.

   Or $\sin(4\alpha) = \sin(3\alpha)$ et $\sin(6\alpha) = \sin(\alpha)$, donc $\sin(\alpha)\sin(2\alpha)\sin(3\alpha) = \frac{\sin(2\alpha) + \sin(3\alpha) - \sin(\alpha)}{4}$.

   D'après la question précédente, on en déduit $\boxed{\sin(\frac{\pi}{7})\sin(\frac{2\pi}{7})\sin(\frac{3\pi}{7}) = \frac{\sqrt{7}}{8}}$.

C Sommes géométriques et trigonométrie

Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, 6\}$, on pose $S_k = \sum_{j=0}^{6} \omega^{jk}$ et $T_k = \sum_{j=0}^{6} j\omega^{jk}$.

1. Puisque $\omega^k \neq 1$ et $(\omega^k)^7 = 1$, la formule de la somme géométrique donne $S_k = \frac{1-(\omega^k)^7}{1-\omega^k} = 0$. Donc $\boxed{S_k = 0}$.

2. On a $T_k = \omega^k + 2\omega^{2k} + \cdots + 6\omega^{6k}$ et $\omega^k T_k = \omega^{2k} + 2\omega^{3k} + \cdots + 5\omega^{6k} + 6\omega^{7k}$.
   Par différence, $(1-\omega^k)T_k = \omega^k + \omega^{2k} + \cdots + \omega^{6k} - 6\omega^{7k}$. Or $\omega^{7k} = 1$ et $S_k = 0$, donc $\omega^k + \cdots + \omega^{6k} = -1$.
   Ainsi $(1-\omega^k)T_k = -7$, d'où $\boxed{T_k = \frac{-7}{1-\omega^k}}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - \mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{ix/2}(\mathrm{e}^{-ix/2} - \mathrm{e}^{ix/2}) = -2i\mathrm{e}^{ix/2}\sin(x/2)$.
   Ainsi, $\boxed{|1 - \mathrm{e}^{ix}| = 2|\sin(x/2)|}$.
   Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $1 - \mathrm{e}^{ix} = 0$, qui n'admet pas d'argument.
   Sinon, on distingue deux cas.

   - Si $\sin(x/2) > 0$, alors $1 - \mathrm{e}^{ix} = 2\sin(x/2)\mathrm{e}^{i(x-\pi)/2}$, donc $\boxed{\frac{x-\pi}{2} \text{ est un argument de } 1 - \mathrm{e}^{ix}}$.

- Si $\sin(x/2) < 0$, alors $1 - \mathrm{e}^{ix} = -2\sin(x/2)\mathrm{e}^{i(x+\pi)/2}$, donc $\boxed{\frac{x+\pi}{2} \text{ est un argument de } 1-\mathrm{e}^{ix}}$.

Enfin, pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{ix}} = \dfrac{i\mathrm{e}^{-ix/2}}{2\sin(x/2)} = \dfrac{i(\cos(x/2) - i\sin(x/2))}{2\sin(x/2)}$.

Finalement, $\boxed{\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{ix}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\dfrac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}}$.

4. En appliquant les résultats précédents avec $k = 1$, on obtient $T_1 = -\dfrac{7}{2} - \dfrac{7i}{2}\dfrac{\cos(\pi/7)}{\sin(\pi/7)}$.

Or $T_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{6} j\cos(\frac{2j\pi}{7}) + i\sum_{j=1}^{6} j\sin(\frac{2j\pi}{7})$. En identifiant les parties réelle et imaginaire, on en déduit $\boxed{\displaystyle\sum_{j=1}^{6} j\cos(\frac{2j\pi}{7}) = -\frac{7}{2}}$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{j=1}^{6} j\sin(\frac{2j\pi}{7}) = -\frac{7}{2}\frac{\cos(\pi/7)}{\sin(\pi/7)}}$.

5. Soit $k \in \{1, \dots, 6\}$. Pour tout entier j, on a $\cos^2(\dfrac{2jk\pi}{7}) = \dfrac{1 + \cos(\frac{4jk\pi}{7})}{2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{6} \cos^2(\frac{2jk\pi}{7}) = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{6} \cos(\frac{4jk\pi}{7})$.

Or $\displaystyle\sum_{j=0}^{6} \cos(\frac{4jk\pi}{7}) = \mathrm{Re}(S_{2k}) = 0$, puisque 7 ne divise pas $2k$ et que la formule de la somme géométrique s'applique encore. Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{6} \cos^2(\frac{2jk\pi}{7}) = \frac{7}{2}}$.

6. En prenant $k = 1$ dans l'égalité précédente et en utilisant la parité et la périodicité du cosinus, on obtient $1 + 2\cos^2(\dfrac{2\pi}{7}) + 2\cos^2(\dfrac{4\pi}{7}) + 2\cos^2(\dfrac{6\pi}{7}) = \dfrac{7}{2}$.

Finalement, $\boxed{\cos^2(\dfrac{2\pi}{7}) + \cos^2(\dfrac{4\pi}{7}) + \cos^2(\dfrac{6\pi}{7}) = \dfrac{5}{4}}$.

Problème 3

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} |S_2(z)| = |z| &\Leftrightarrow |1+z|^2 = |z|^2 \\ &\Leftrightarrow (1+z)(1+\overline{z}) = z\overline{z} \\ &\Leftrightarrow 1 + z + \overline{z} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc $\boxed{\text{la droite d'équation } x = -\dfrac{1}{2}.}$

2. Soit $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $S_3(z) = 1 + z + z^2 = 1 + x + x^2 - y^2 + iy(1 + 2x)$, donc

$$S_3(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(1+2x) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

L'ensemble cherché est donc $\boxed{\text{la réunion de l'axe des abscisses et de la droite d'équation } x = -\dfrac{1}{2}.}$

3. (a) Voir cours.

(b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\forall z \in \mathbb{U},\ |S_n(z)| \leqslant n$ ».

Init. Pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|S_1(z)| = 1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

Soit $z \in \mathbb{U}$. Par inégalité triangulaire et hypothèse de récurrence,

$$|S_{n+1}(z)| = |S_n(z) + z^n| \leqslant |S_n(z)| + |z|^n \leqslant n + 1.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{U},\ |S_n(z)| \leqslant n.}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \in \mathbb{U}$ et $|S_n(1)| = n$. Ainsi, $\boxed{\text{la borne est atteinte pour } z = 1.}$

4. (a) On a $a^{2n} = e^{2i\pi} = 1$, donc $\boxed{a \in \mathbb{U}_{2n}.}$

(b) Puisque $n \geqslant 2$, on a $a \neq 1$. Par la formule de la somme géométrique, $S_n(a) = \dfrac{1-a^n}{1-a}$. Or $a^n = e^{i\pi} = -1$, d'où $\boxed{S_n(a) = \dfrac{2}{1-a}.}$

(c) On a

$$\begin{aligned} 1 - a &= e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right) \\ &= -2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}} \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{2})}. \end{aligned}$$

Comme $\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) > 0$, on en déduit

$$S_n(a) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n})}.$$

Ainsi, $\boxed{|S_n(a)| = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$ et $\boxed{\operatorname{Arg}(S_n(a)) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\ [2\pi].}$

5. (a) Soit $z \in (\mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}) \setminus \{1\}$.

- Si $z \in \mathbb{U}_{n-1}$, alors $z^{n-1} = 1$, donc $z^n = z$ et, comme $z \neq 1$, $S_n(z) = \dfrac{1-z^n}{1-z} = 1$.
- Si $z \in \mathbb{U}_{n+1}$, alors $z^{n+1} = 1$, donc $z^n = \dfrac{1}{z}$ et, comme $z \neq 1$,

$$S_n(z) = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-\frac{1}{z}}{z-1} = \frac{z-1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z}.$$

Dans les deux cas, $|S_n(z)| = 1$ puisque $|z| = 1$. Ainsi

$$\boxed{(\mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}) \setminus \{1\} \subset \mathcal{E}.}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $|S_n(z)| = 1$. Puisque $S_n(1) = n > 1$, on a nécessairement $z \neq 1$. Par conséquent, $|S_n(z)| = \left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| = 1$ donne $|z^n - 1| = |z - 1|$.
En élevant au carré, on obtient $(z^n - 1)(\overline{z}^n - 1) = (z-1)(\overline{z} - 1)$. Or $|z| = 1 = |z|^n$, donc $z^n\overline{z}^n = z\overline{z} = 1$. Ainsi, $2 - z^n - \overline{z}^n = 2 - z - \overline{z}$, d'où

$$\boxed{z^n + \overline{z}^n = z + \overline{z}.}$$

(c) Soit $z \in \mathcal{E}$. D'après la question précédente, $z^n + \overline{z}^n = z + \overline{z}$. Puisque $z \in \mathbb{U}$, on a $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, donc

$$z^n + \frac{1}{z^n} = z + \frac{1}{z}$$

Ceci donne $z^{2n} + 1 = z^{n+1} + z^{n-1}$, *i.e.* $(z^{n-1} - 1)(z^{n+1} - 1) = 0$ *i.e.* $z^{n-1} = 1$ ou $z^{n+1} = 1$.
Ainsi, $z \in \mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}$. De plus, $z \neq 1$, donc $\mathcal{E} \subset (\mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}) \setminus \{1\}$.
L'inclusion réciproque ayant été établie à la première question, on conclut que

$$\boxed{\mathcal{E} = (\mathbb{U}_{n-1} \cup \mathbb{U}_{n+1}) \setminus \{1\}.}$$