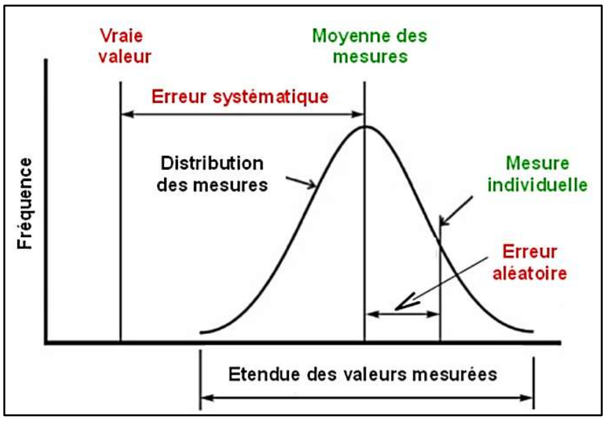
Mesures et incertitudes

1. Distinguer la mesure de la vraie valeur



1.1. Philosophie de la mesure

Pour modéliser le monde qui nous entoure, il est nécessaire de faire des mesures.

Lors de la mesure d'une grandeur X, on souhaiterait obtenir sa vraie valeur. Malheureusement cette vraie valeur n'est pas accessible et nous ne pouvons que l'estimer du mieux que nous le pouvons.

Le résultat d'une mesure doit donc refléter le fait qu'il existe une incertitude sur la vraie valeur de la grandeur mesurée.

1.2. Les erreurs possibles

➢ L'erreur aléatoire

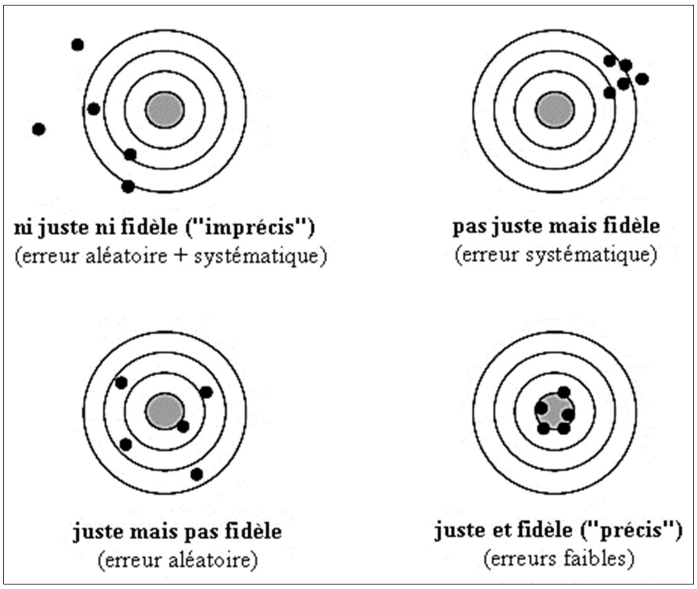
Lorsqu'on réalise un grand nombre de mesures, dans les mêmes conditions, de la même grandeur, les valeurs mesurées peuvent être différentes. Cette dispersion est due à la qualité du mesurage réalisé par l'opérateur, à la qualité de l'instrument de mesure mais aussi à la variabilité du phénomène mesuré.

Plus les erreurs aléatoires sont petites, plus la fidélité de la mesure est grande.

➢ L'erreur systématique

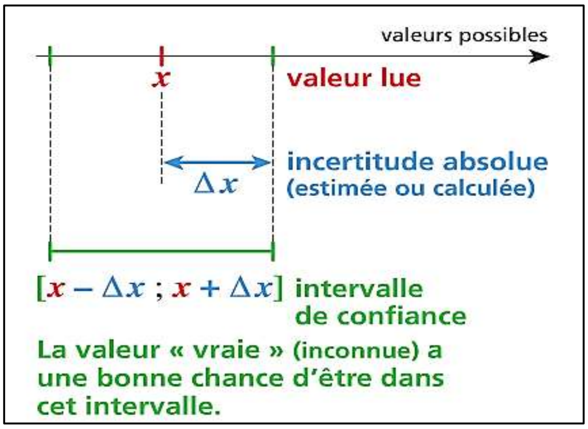
Erreur qui prend toujours la même valeur sur chaque mesure répétée.
Elle est due à un défaut de l'appareil de mesure ou à un défaut du protocole expérimental.
En général, ces erreurs peuvent être réduites voire éliminées par un calibrage de l'appareil.

Plus l'erreur systématique est petite, plus la justesse de la mesure est grande.



✋ *On suppose toujours que l'erreur systématique a été éliminée et qu'elle est donc nulle.*

1.3. Savoir exprimer le résultat d'une mesure



Une mesure de la grandeur $\boldsymbol{X}$ s'exprime en donnant la valeur mesurée $\boldsymbol{x}$ assortie de l'incertitude $U(\boldsymbol{x})$ (notée parfois en français $\Delta \boldsymbol{x}$) qui lui est associée :

$$\boldsymbol{x \pm U(x)}$$

Cela indique que la vraie valeur a toutes les chances de se situer entre $\boldsymbol{x} - U(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{x} + U(\boldsymbol{x})$.

Le résultat de la mesure peut ainsi être donné sous forme d'un intervalle $[\boldsymbol{x} - U(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{x} + U(\boldsymbol{x})]$ des valeurs probables de la vraie valeur. On parle alors d'***intervalle de confiance***. On précise en général le niveau de confiance associée, c'est-à-dire le pourcentage de chance de trouver la valeur vraie dans l'intervalle.

Pour comparer la qualité de différentes mesures, l'incertitude $U(X)$ ne suffit plus.

On utilise alors l'***incertitude relative*** $\frac{U(x)}{x}$ (appelée parfois la précision de la mesure).

2. Savoir déterminer l'incertitude

2.1. Incertitude associée à une mesure unique (incertitude de type B)

Pour déterminer l'incertitude $U(x)$ **(ou** Δx) d'une mesure unique, il faut conjuguer deux sources d'informations :

- Les informations techniques sur l'instrument de mesure, données par le fabriquant ou bien connues conventionnellement (par exemple une demi-unité de graduation pour une règle graduée).
- Les informations subjectives sur l'appréciation de la façon dont la mesure a été effectuée.

Remarque : L'incertitude-type (voir ci-dessous) associée à une mesure unique vaut $\boxed{u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}}$.

2.2. Incertitude associée à une série de mesures (incertitude de type A)

Une mesure peut être répétée à quelques reprises ou un grand nombre de fois, par exemple par des systèmes d'acquisition automatique. La répétition des mesures améliore la précision de la mesure, ce qui est indispensable pour un dispositif de mesure peu fidèle.

a) Estimation de la mesure

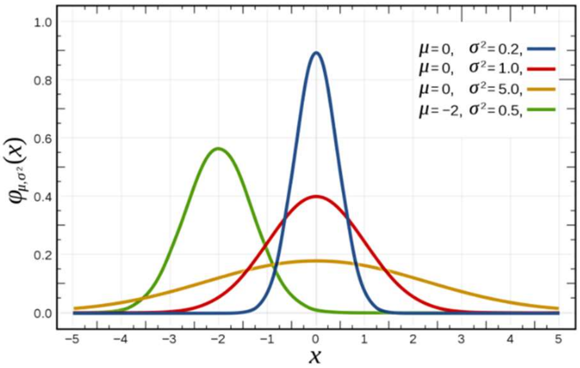
Une ***moyenne des valeurs mesurées***, notée $\bar{x}$**,** est la meilleure des estimations qui puisse être faite.

b) Estimation de l'incertitude-type $u(x)$

Les causes des erreurs aléatoires étant quasiment toujours nombreuses, variées et indépendantes, la distribution des mesures suit très souvent une loi normale, aussi appelée gaussienne (voir ci-contre), centrée sur la valeur moyenne $\bar{x}$ des mesures. L'expression mathématique de cette loi est :

$$\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2.\sigma^2}}}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est l'écart-type de la distribution.



Le paramètre important pour déterminer l'incertitude associée à cette distribution, nommée ***incertitude-type***, est « l'ouverture » de cette distribution : plus le pic est large, plus l'incertitude est importante. Or la largeur à mi-hauteur du pic est directement reliée à l'écart-type $\boldsymbol{\sigma}$ de la distribution.

➢ **Etape 1** : estimation de l'écart-type *expérimental* $\boldsymbol{s}$ de la distribution des valeurs de $\boldsymbol{x}$

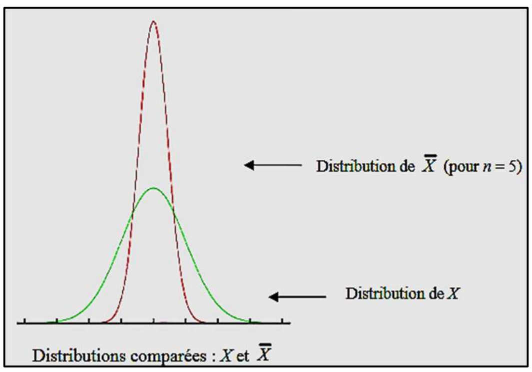
En maths, l'écart-type $\boldsymbol{\sigma_x}$ d'une série de valeurs correspond à la racine carrée de la variance.
Cependant l'écart-type calculé pour la série de mesure ne correspond pas forcément tout à fait à celui de la distribution (qui serait obtenue pour un nombre infini de point) : un nombre limité de points de mesure peut induire une mauvaise estimation de l'écart-type. Pour prendre en compte l'influence du nombre de points de mesure $\boldsymbol{n}$, on se tourne vers l'***écart-type échantillon*** $\boldsymbol{s}$ qui s'obtient en appliquant un facteur $\boldsymbol{\frac{n}{n-1}}$ à la variance (correction de Bessel, c'est un résultat mathématique admis).

En pratique : votre calculatrice vous donne directement la valeur de $\boldsymbol{s}$ (parfois noté σ_{n-1}).

➢ **Etape 2** : estimation de l'écart-type $\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}}$ de la distribution de la valeur moyenne $\boldsymbol{\bar{x}}$

On cherche en réalité à associer une incertitude à la valeur mesurée, donc à la moyenne $\boldsymbol{\bar{x}}$ des différentes mesures. La variabilité de la moyenne dépend à la fois de la variabilité de la grandeur mesurée, quantifiée par l'écart-type expérimental $\boldsymbol{s}$, mais également du nombre de points de mesure $\boldsymbol{n}$. En effet, plus le nombre de points de mesure est important moins la variation d'une mesure unique parmi la série a d'impact sur la valeur de la moyenne. Ainsi l'incertitude-type $\boldsymbol{u(x)}$ de la valeur mesurée, qui n'est autre que l'incertitude-type associée à la distribution de la moyenne $\boldsymbol{\bar{x}}$, vaut :

$$\boldsymbol{u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}}$$



c) Estimation de l'incertitude élargie $U(\boldsymbol{x})$

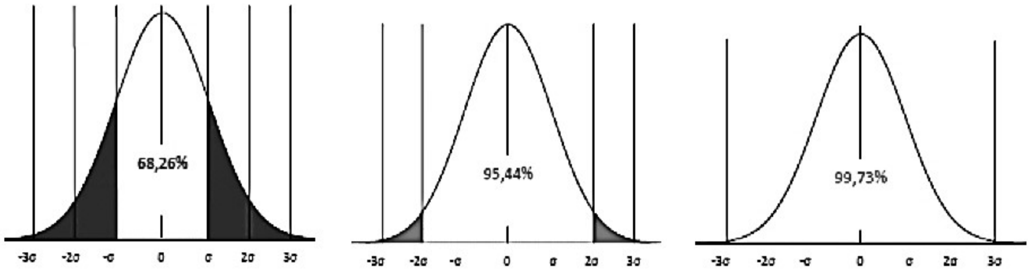
L'incertitude-type $u(\overline{\boldsymbol{x}})$ caractérise la distribution aléatoire des mesures autour de la valeur moyenne. Cependant, la valeur vraie n'a que 68 % de chance de se trouver dans l'intervalle $\overline{\boldsymbol{x}} \pm u(\overline{\boldsymbol{x}})$. Cela laisse une probabilité non négligeable de trouver la valeur vraie en dehors de cet intervalle. Pour augmenter le niveau de confiance associée à l'incertitude, c'est-à-dire le pourcentage de chance de trouver la valeur vraie dans l'intervalle, on peut choisir de considérer un intervalle plus large. On parle alors d'***incertitude élargie***, notée $U(\overline{\boldsymbol{x}})$. On choisit en général de prendre un nombre entier de fois l'incertitude-type :

$$U(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{k}.u(\overline{\boldsymbol{x}})$$

Avec $\boldsymbol{k}$ le facteur d'élargissement.

Pour une distribution gaussienne :

- $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$ correspond à un niveau de confiance de 95 % (le plus utilisé en pratique) ;
- $\boldsymbol{k} = \mathbf{3}$ correspond à un niveau de confiance de 99,7 %.



d) Présentation du résultat pour une série de mesure

$$\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}} \pm \frac{\boldsymbol{k}.\boldsymbol{s}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

Avec
- $\overline{\boldsymbol{x}}$ la moyenne des valeurs mesurées ;
- $\boldsymbol{k}$ le facteur d'élargissement (donné par le niveau de confiance), souvent $\boldsymbol{k}$ = 2 ;
- $\boldsymbol{s}$ l'écart-type expérimental de la série de mesure (parfois noté σ_{n-1}) ;
- $\boldsymbol{n}$ le nombre de points de mesure.

2.3. Incertitude associée à une valeur issue d'un calcul

Il arrive souvent que l'on utilise des données issues de mesure, et donc associées à des incertitudes, pour calculer une nouvelle grandeur. La grandeur ainsi calculée doit être elle aussi associée à une incertitude. Evidemment, cette dernière dépend des incertitudes sur les données. Les mathématiques nous permettent de déterminer cette dépendance (relations données pour les incertitudes-types).

Si une grandeur $\boldsymbol{C}$ dépend de deux grandeurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, alors l'incertitude-types $u(\boldsymbol{c})$ dépend pour la valeur de $\boldsymbol{c}$ est directement des incertitudes-type $u(\boldsymbol{a})$ et $u(\boldsymbol{b})$.

Type de relation pour calculer la grandeur $\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{C} = \mathbf{A} + \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C} = \mathbf{A} - \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C} = \frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{B}}$	$\boldsymbol{C} = \mathbf{A} \times \boldsymbol{B}$
Calcul de l'incertitude-type $u(\boldsymbol{c})$	$u(\boldsymbol{c}) = \sqrt{u(\boldsymbol{a})^2 + u(\boldsymbol{b})^2}$		$\frac{u(\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{c}} = \sqrt{\left(\frac{u(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{a}}\right)^2 + \left(\frac{u(\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{b}}\right)^2}$	

Il est possible de généraliser ces relations à plus de 2 grandeurs en sommant de la même manière les termes associés aux grandeurs supplémentaires.

3. Comparaison avec une valeur de référence

On peut conclure simplement en utilisant l'intervalle de confiance associée à la mesure :

- Si la valeur de référence est dans l'intervalle de confiance, alors la/les mesures sont compatibles avec la valeur de référence,
- Si la valeur de référence n'est pas dans l'intervalle de confiance, alors la/les mesures sont incompatibles avec la valeur de référence.

☝ Incompatibles ne signifie pas que seules les mesures sont à remettre en cause : choix du modèle ? validité de la théorie utilisée dans les conditions de l'expérience ? …

4. Comparaison entre deux valeurs : écart normalisé

Considérons deux valeurs mesurées $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$ assorties de leurs incertitudes-types $u(\boldsymbol{x_1})$ et $u(\boldsymbol{x_2})$. On définit l'***écart normalisé*** $\boldsymbol{z}$ par :

$$\boxed{\boldsymbol{z} = \frac{|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|}{\sqrt{u(\boldsymbol{x_1})^2 + u(\boldsymbol{x_2})^2}}}$$

De nombreux domaines scientifiques ont convenu d'un seuil de 2 pour cet écart normalisé :

- Si $\boldsymbol{z} < 2$, alors les résultats de mesure sont compatibles,
- Si $\boldsymbol{z} \geq 2$, alors les résultats de mesure sont incompatibles.

<u>Cas particulier où $\boldsymbol{x_2}$ est une valeur de référence connue avec beaucoup de précision ($u(\boldsymbol{x_2}) \approx 0$)</u> :
On compare alors $\boldsymbol{x_1}$ à cette valeur de référence en utilisant l'écart normalisé :

$$\boldsymbol{z} = \frac{|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x}_{\text{ref}}|}{u(\boldsymbol{x_1})}$$

Les critères définis précédemment restent valables.

Remarque : Si la distribution est gaussienne et le facteur d'élargissement $\boldsymbol{k}$ vaut 2, alors ces critères reviennent à dire que la valeur de référence n'est compatible avec les mesures que si elle se situe dans l'intervalle de confiance de $\boldsymbol{x_1}$.

5. Comment améliorer les mesures ?

- Certaines données aberrantes doivent être éliminées quand il est évident qu'elles résultent d'une erreur.
- Pour réduire l'influence des erreurs aléatoires, il est possible d'augmenter le nombre de mesures $\boldsymbol{n}$ d'une série de mesures (nous avons vu que l'incertitude diminue lorsque $\boldsymbol{n}$ augmente).
- Il faut vérifier chaque étape de la mesure pour éviter les biais (erreurs systématiques).
- Il faut adapter le calibre de l'instrument pour maximiser la précision.