Oscillateurs linéaires
Régime transitoire des systèmes du 2ème ordre

Plan du cours

Objectif du chapitre : décrire le régime transitoire des systèmes oscillants.

1. L'oscillateur harmonique

1.1. Présentation

Définition : Oscillateur harmonique

On appelle ***oscillateur harmonique*** à une dimension tout système physique dont la grandeur $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ évoluant dans le temps (position, angle, tension, courant, ...) est décrite par ***une équation différentielle linéaire d'ordre 2*** de la forme :

$$\frac{d^2\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})}{dt^2} + {\omega_0}^2.\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = {\omega_0}^2.Y_{éq}$$

où ω_0 est appelée ***pulsation propre*** de l'oscillateur, et $Y_{éq}$ est une constante réelle.

Un choix ingénieux de l'origine du référentiel (i.e. de la grandeur étudiée) : $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) - Y_{éq}$ permet d'obtenir une équation différentielle dans sa forme la plus simple :

$$\boxed{\frac{d^2\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})}{dt^2} + {\omega_0}^2.\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}) = 0}$$

Cette équation est la ***forme canonique*** de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

1.2. Obtention de l'équation différentielle

Méthode : Établir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique (mécanique)

- Définir le ***système*** et le référentiel d'étude.
- Dessiner un ***schéma*** pour définir les axes, les vecteurs de bases, les coordonnées
- Place les forces extérieures sur le schéma.
- Faire le ***bilan des forces extérieures***.
- Déterminer la position d'équilibre à partir du principe d'inertie.
- Faire un changement de variable pour étudier les oscillations autour de la position d'équilibre.
- Etablir l'équation différentielle du mouvement à partir du ***principe fondamental de la dynamique***.
- Définir la pulsation propre du système et mettre l'***équation sous forme canonique***.

Méthode : Établir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique (électrique)

- (Re)dessiner le schéma du circuit en indiquant bien les différentes tensions et les courants.
- Exprimer les différentes lois des mailles, les lois des nœuds et donner la loi de comportement pour chaque dipôle.
- Combiner les différentes équations pour faire apparaitre seulement l'une des variable inconnue (tension ou courant) afin d'établir l'équation différentielle pour le courant dans la bobine ou la tension aux bornes du condensateur.
- Définir la pulsation propre du système et mettre l'équation sous forme canonique.

1.3. Résolution

Méthode : Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

Les solutions $\boldsymbol{y}$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec second membre sont la somme :

- des solutions "homogènes " $\boldsymbol{y_H}$ l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène :

$$\boldsymbol{y_H}(t) = A.\cos(\omega_0.t) + B.\sin(\omega_0.t), \qquad (A,B) \in R\,;$$

- d'une solution particulière $\boldsymbol{y_P}$ de l'équation différentielle avec second membre.
  Or le second membre étant une constante, la solution particulière la plus simple est :

$$\boldsymbol{y_P}(t) = Y_{éq}$$

Les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 s'écrivent donc

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y_H}(t) + \boldsymbol{y_P}(t) = A.\cos(\omega_0.t) + B.\sin(\omega_0.t) + Y_{éq}}, \qquad (A,B) \in R\,;$$

• Détermination des réels à l'aide des ***conditions initiales*** (2 inconnues → 2 conditions) :

- À $t = 0$, $\boldsymbol{y}(0) = Y_0$ donc $A.cos(0) + B.sin(0) + Y_{éq} = Y_0 \Leftrightarrow A = Y_0 - Y_{éq}$

- À $t = 0$, $v_0 = \frac{dy}{dt}(0)$ donc $-\omega_0.A.\sin(0) + \omega_0.B.\cos(0) = v_0 \Leftrightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$

• Finalement, l'***unique solution*** de l'équation différentielle est :

$$\boxed{\boldsymbol{y(t)} = \left(Y_0 - Y_{éq}\right).\cos(\omega_0.t) + \frac{v_0}{\omega_0}.\sin(\omega_0.t) + Y_{éq}}$$

• Tracer la ***courbe*** (voir paragraphe suivant).

Grâce aux relations de trigonométrie, la solution peut également s'exprimer, de manière équivalente, comme un cosinus seul :

$$\boldsymbol{y(t)} = Y.\cos(\omega_0.t + \Phi) + Y_{éq} \text{ avec une phase à l'origine } \Phi$$

ou un sinus seul :

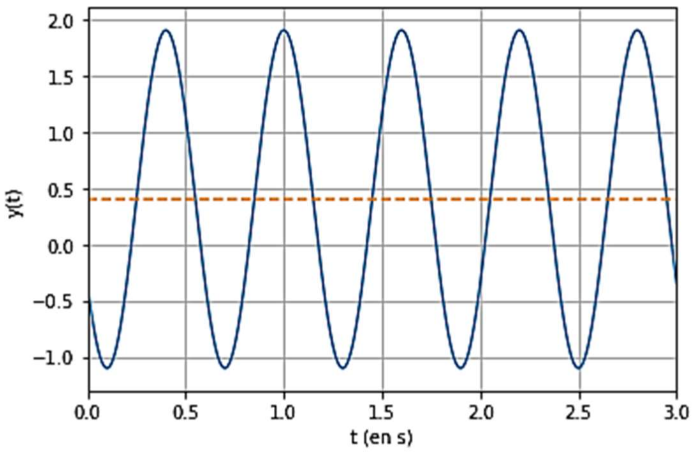
$$\boldsymbol{y(t)} = Y.\sin(\omega_0.t + \varphi) + Y_{éq} \text{ avec une phase à l'origine } \varphi$$

1.4. Caractéristiques des oscillations

1.4.1. Caractérisation temporelle

Considérons la solution générale suivante : $\boldsymbol{y(t)} = Y.\cos(\omega_0.t + \Phi) + Y_{éq}$
Le mouvement décrit par l'oscillateur harmonique correspond à des oscillations :

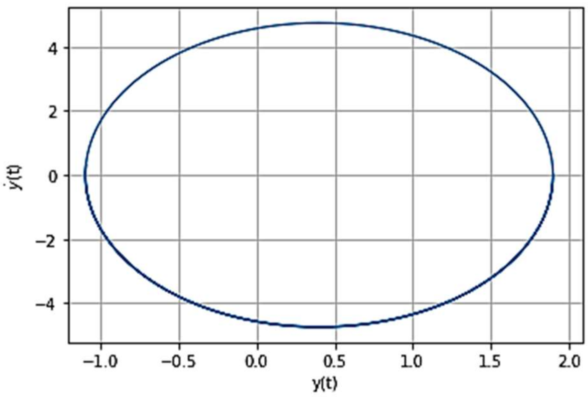
- d'amplitude Y,
- de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$,
- de valeur moyenne $Y_{éq}$,
- de fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$.
- de phase à l'origine Φ,



ω_0 est donc bien la ***pulsation des oscillations*** de la grandeur $\boldsymbol{y}(t)$. Cette pulsation est liée aux propriétés du système et ne dépend pas des conditions initiales.

$Y_{éq}$ est la ***valeur d'équilibre*** autour de laquelle la grandeur oscille, sans pour autant converger vers cette valeur.

1.4.2. Portrait de phase



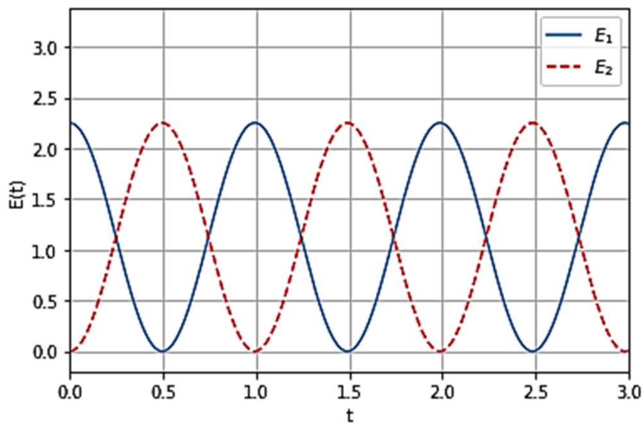
Définition : Portrait de phase

Un ***portrait de phase*** est une représentation géométrique des trajectoires d'un système dynamique. Il représente l'évolution de la dérivée temporelle $\dot{y}(t)$ de la variable suivie en fonction de la variable $y(t)$ elle-même.

Pour un oscillateur harmonique, le portrait de phase est une ellipse.

1.4.3. Aspect énergétique

L'oscillateur harmonique peut s'interpréter comme un transfert périodique d'énergie d'une forme d'énergie à une autre :



- *Dans le cas du ressort oscillant* :
  E_1 est l'énergie potentielle totale (énergie potentielle élastique du ressort, $\frac{1}{2}.k.(y-y_0)^2$, et énergie potentielle de pesanteur, $m.g.y$)
  E_2 est l'énergie cinétique de la masse accrochée au ressort ($E_2 = \frac{1}{2}.m.\dot{y}^2 = \frac{1}{2}.m.v^2$).
- *Dans le cas du circuit LC* :
  E_1 est l'énergie stockée dans le condensateur ($E_1 = \frac{1}{2}.C.{u_c}^2$)
  E_2 est l'énergie cinétique de la masse accrochée au ressort ($E_2 = \frac{1}{2}.L.i^2$).

2. L'oscillateur amorti

2.1. Mise en équation

Définition : Oscillateur amorti

On appelle ***oscillateur amorti*** à une dimension tout système physique dont la grandeur $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ évoluant dans le temps (position, angle, tension, courant, ...) est décrite par ***une équation différentielle linéaire d'ordre 2*** de la forme :

$$\boxed{\frac{d^2\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}.\frac{d\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})}{dt}+\omega_0{}^2.\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=\omega_0{}^2.Y_\infty}$$

- ω_0 est la ***pulsation propre*** de l'oscillateur (en rad.s^{-1}), (à toujours identifier en 1er)
- Q est appelé **facteur de qualité** (sans dimension) (à identifier en 2ème)
- Y_∞ est la valeur prise par la fonction $\boldsymbol{y}$ lorsque $t \to \infty$ (« régime permanent »).

Il existe une autre forme canonique, utilisée notamment en S.I. :

$$\frac{d^2\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})}{dt^2}+2.\xi.\omega_0.\frac{d\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})}{dt}+\omega_0{}^2.\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=\omega_0{}^2.Y_\infty$$

On retiendra la relation $Q=\frac{1}{2.\xi}$.

2.2. Résolution

Méthode : Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur amorti

1. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique.

La solution générale $\boldsymbol{y}(t)$ est la somme de la solution « homogène » (sans second membre) $\boldsymbol{y_H}(t)$ et d'une solution particulière $\boldsymbol{y_P}(t)$: $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y_H}(t)+\boldsymbol{y_P}(t)$

2. Chercher une **solution particulière** constante. On obtient : $\boldsymbol{y_P}(t)=Y_\infty$.

3. Résolution de l'équation homogène : donner l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}.r+\omega_0{}^2 = 0$$

On résout en calculant le discriminant : $\boldsymbol{\Delta}=\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2-4.\omega_0{}^2 = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2.(1-4.Q^2)$

Le type de solutions de l'équation différentielle dépend alors du signe de $\boldsymbol{\Delta}$:

- <u>Le cas $\boldsymbol{\Delta}$ > 0 ($Q<1/2$)</u> : ***solution « apériodique »***

  Les racines sont alors réelles et négatives : $r_{+/-}=\frac{\omega_0}{2.Q}.\left(-1\pm\sqrt{1-4.Q^2}\right)<0$

  Et les solutions générales de l'équation différentielle sont de la forme :

  $$\boxed{\boldsymbol{y}(t)=A.e^{r_+.t}+B.e^{r_-.t}+Y_\infty} \qquad A\ et\ B\ \in\ \mathbb{R}\,;$$

- <u>Le cas $\boldsymbol{\Delta}$ = 0 ($Q=1/2$)</u> : ***solution « critique »***

  Il y a alors une racine double, réelle et négative : $r=-\frac{\omega_0}{2.Q}<0$

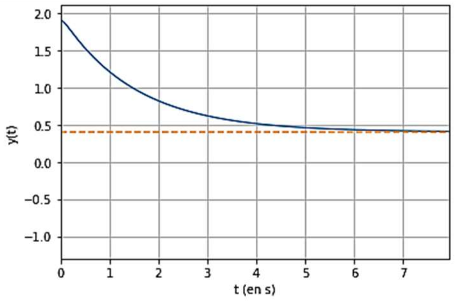
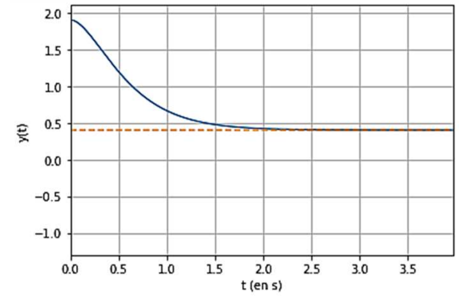
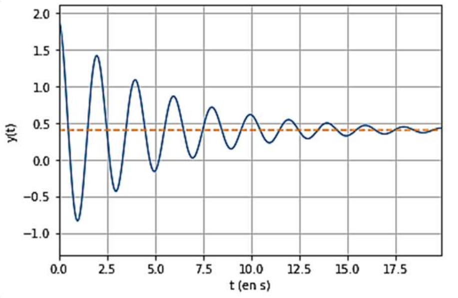
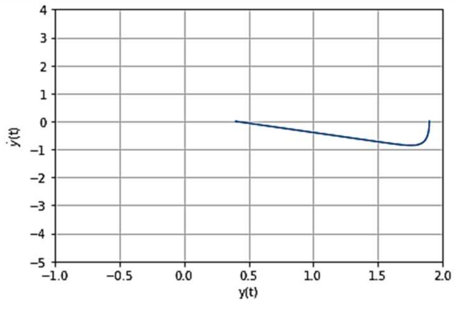
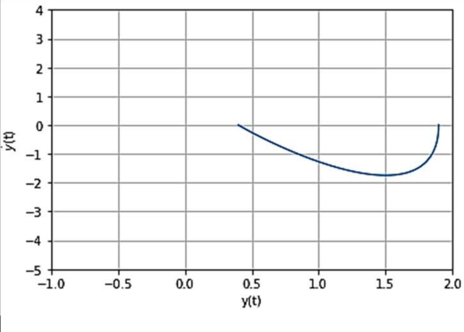
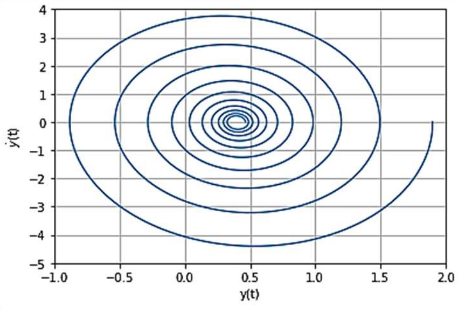
  Et les solutions générales de l'équation différentielle sont de la forme :

  $$\boxed{\boldsymbol{y}(t)=(A.t+B).e^{-\frac{\omega_0.t}{2.Q}}+Y_\infty} \qquad A\ et\ B\ \in\ \mathbb{R}\,;$$

- <u>Le cas $\boldsymbol{\Delta} < 0$ $(Q > 1/2)$</u> : ***solution « pseudo-périodique »***
  Les racines sont alors complexes, de partie réelle négative : $r_{+/-} = \frac{\omega_0}{2.Q}.\left(-1 \pm i.\sqrt{4.Q^2 - 1}\right)$
  Et les solutions générales de l'équation différentielle sont de la forme :
  $$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = A.e^{-\lambda.t}.\cos\left(\omega_p.t + \Phi\right) + Y_\infty} \qquad A \ et \ \Phi \ \in \ \mathbb{R} \ ;$$
  avec :
  $\lambda = \frac{\omega_0}{2.Q}$ appelé ***facteur d'amortissement***
  $\omega_p = \frac{\omega_0}{2.Q}.\sqrt{4.Q^2 - 1} = \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}$ appelée ***pseudo-pulsation***
  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ appelée ***pseudo-période***

4. Les constantes indéterminées sont déterminées à l'aide de deux conditions initiales associées à l'équation. Généralement, on les déduira des continuités des différentes grandeurs (ou l'énoncé donnera des informations sur la valeur $\boldsymbol{y}(t = 0)$ et sur la valeur $\frac{dy}{dx}(t = 0)$).

2.3. Les différents régimes

	Régime apériodique $(\boldsymbol{Q = 0,2})$	***Régime critique*** $(\boldsymbol{Q = 0,5})$	***Régime pseudo-périodique*** $(\boldsymbol{Q = 10})$
Temporel			
Portrait de phase			

Contrairement aux oscillateurs harmoniques, les courbes des portraits de phase sont cette fois « ouvertes » et convergent vers le point d'équilibre. En effet de l'énergie est perdue à chaque oscillation.

- Lorsque le portrait de phase se limite à un seul cadran, alors le facteur de qualité $Q < 1/2$.
- Plus le nombre de tours est important avant d'atteindre l'équilibre, plus le facteur de qualité est grand. Le nombre de tours visibles dans le portrait de phase est de l'ordre de grandeur de Q.

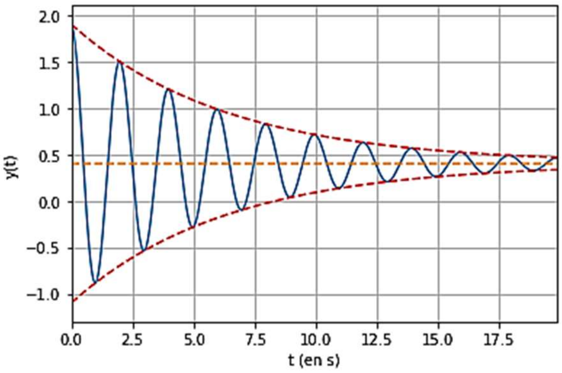
2.4. Étude du régime pseudo-périodique (Q élevé)

Dans le cas où le facteur de qualité est important, $Q \gg 1$, la mesure de la réponse en régime pseudo-périodique peut permettre de remonter facilement aux paramètres du système, à l'aide de quelques approximations à connaître.

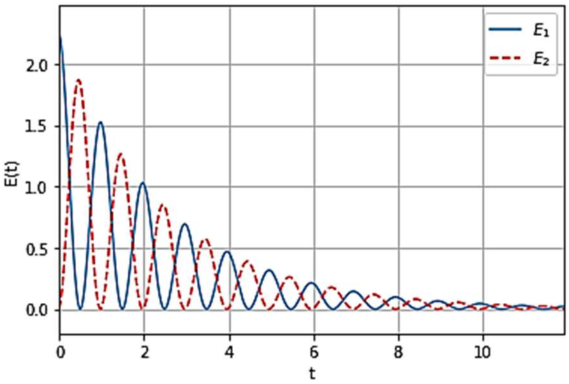
Méthode : Déterminer les caractéristiques du système

- $Q \gg 1 \Rightarrow \lambda \ll \omega_0 \Rightarrow \omega_p \approx \omega_0 \ \Rightarrow T_p \approx T_0$
  La mesure de la pseudo-période T_p permet d'estimer la période propre T_0.
- On peut évaluer le facteur d'amortissement λ, et donc le facteur de qualité Q en mesurant le ***décrément logarithmique*** D :

$$D = \ln\left(\frac{y(t)-Y_\infty}{y(t+n.T_p)-Y_\infty}\right) = n.\lambda.T_p \approx n.\lambda.T_0 = n.\frac{\pi}{Q}$$



2.5. Aspect énergétique



On constate que pour l'oscillateur amorti l'énergie totale diminue au cours du temps à cause de l'amortissement qui dissipe de l'énergie.

Pour le régime pseudo-périodique, on constate comme pour l'oscillateur harmonique un échange (pseudo-)périodique entre deux formes d'énergies.

2.6. Estimation du temps de réponse

Définition : temps de réponse à 5%

Le temps de réponse à 5%, noté $tr_{5\%}$, est le temps nécessaire pour que l'écart entre la grandeur suivie $\boldsymbol{y}$ et sa valeur en régime permanent Y_∞ reste inférieur à 5% de l'écart initial $|Y_0 - Y_\infty|$.

Pour un système du 1er ordre, le temps de réponse à 5% vaut environ trois fois le temps caractéristique τ du système : $\boxed{tr_{5\%} \approx 3.\tau}$.

Cas $Q \gg 1$: régime pseudo-périodique.
L'amplitude des oscillations suit une décroissance loi de décroissance exponentielle donnée par $e^{-\lambda.t}$. On identifie ce comportement à celui d'un premier ordre où le temps caractéristique est $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{T_0.Q}{\pi}$. L'ordre de grandeur du temps de réponse est donc de $tr_{5\%} \approx T_0.Q$.

→ Plus le facteur de qualité Q est grand plus le temps de réponse est important.

Cas $Q \ll 1$: régime apériodique
Dans l'équation différentielle, le terme du second ordre $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ devient rapidement négligeable devant les autres termes. Le système se comporte alors comme un premier ordre de temps caractéristique $\tau = \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{T_0}{2\pi.Q}$. L'ordre de grandeur du temps de réponse est donc de $tr_{5\%} \approx \frac{T_0}{2Q}$.

→ Plus le facteur de qualité Q est petit plus le temps de réponse est important.

➔ Il faut faire un ***compromis*** sur la valeur du facteur de qualité Q pour minimiser le temps de réponse à 5 % : ce dernier est minimal pour un facteur de qualité Q proche de 1.
L'ordre de grandeur du temps de réponse est alors donné par la période propre du système T_0.

3. Analogie électromécanique

On constate une similarité entre les études du ressort amorti et du circuit RLC série : il existe une analogie entre les systèmes électriques et mécaniques. On retiendra les équivalences suivantes :

Électricité	Mécanique (Ressort oscillant)
Charge électrique du condensateur $q = C.u_C$	Position par rapport à la position d'équilibre $x = y - y_\infty$
Intensité $i = \frac{dq}{dt}$	Vitesse $v = \frac{dx}{dt}$
Capacité C	Raideur du ressort k
Résistance R	Coefficient de frottement α
Inductance L	Masse m
Énergie magnétique $\frac{1}{2}.L.i^2$	Énergie cinétique $\frac{1}{2}.m.v^2$
Énergie électrostatique $\frac{1}{2}.\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}.C.{u_C}^2$	Énergie potentielle $\frac{1}{2}.k.x^2$

À l'aide de cette équivalence, on peut construire des systèmes électriques pour tester des modèles mécaniques. Les systèmes électriques sont plus simples à réaliser en pratique, et surtout plus rapides.

AU PROGRAMME

Notions et contenus	Capacités exigibles	Dans les exercices
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique.	▪ Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. ▪ Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. ▪ Réaliser un bilan énergétique.	
Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	▪ Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. ▪ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. ▪ Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. ▪ Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. ▪ Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. ▪ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. ▪ ***Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.*** ▪ ***Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.***	
Stockage et dissipation d'énergie.	▪ Réaliser un bilan énergétique.	