

Filtrage

Travaux Dirigés

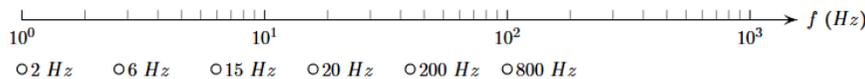
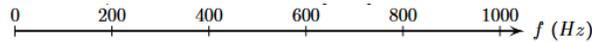
Exemples de questions de cours

- On peut représenter graphiquement une fonction de transfert à l'aide d'un diagramme de Bode. De quoi est-il constitué ? Quel est son intérêt ?
- Citer les quatre types de filtres et représenter leurs gabarits respectifs.
- Filtre passe-bas du premier ordre : donner sa fonction de transfert canonique $H(jx)$, un exemple simple, son comportement asymptotique en hautes et basses fréquences. Donner l'allure du diagramme de Bode et préciser la pulsation de coupure.
- Mêmes questions pour un filtre passe-haut du premier ordre.
- Filtre passe-bande du second ordre : Tracer la forme du diagramme de Bode asymptotique et l'allure du diagramme réel pour différentes valeurs du facteur de qualité Q. Comment s'exprimer la bande-passante en fonction de Q ?
- Filtre passe-bas du second ordre : rappeler la condition de résonance et la valeur de la pulsation de résonance. Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain pour différentes valeurs de Q.
- Quel filtre choisir pour obtenir un comportement : a) intégrateur, b) dérivateur, c) moyenneur ? Dans quelles limites ?

Savoir-faire

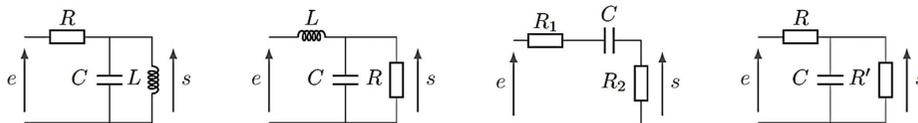
Savoir-faire 1 – Comprendre l'intérêt et savoir utiliser une échelle logarithmique

Q1. Sur la figure ci-dessous, placer sur les deux axes les différentes fréquences en utilisant une couleur pour chaque fréquence.



Savoir-faire 2 – Reconnaître qualitativement la nature d'un filtre

Q1. Déterminer la nature des filtres ci-dessous.

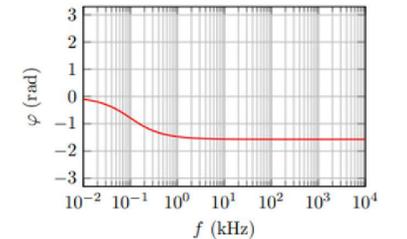
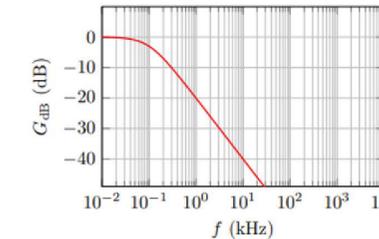
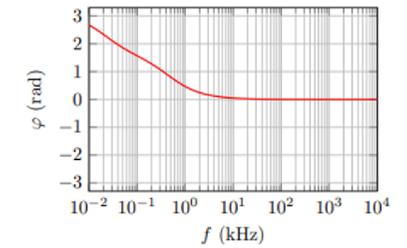
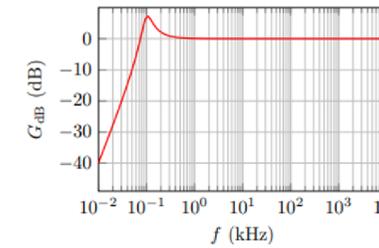
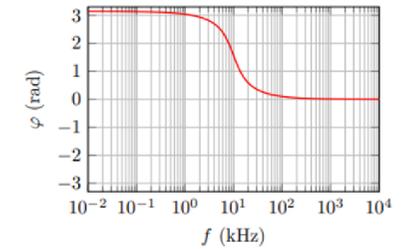
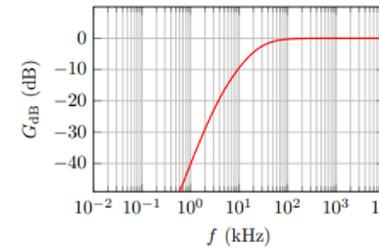


Savoir-faire 3 – Déterminer une fonction de transfert

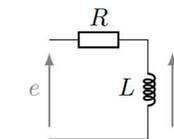
Q1. Établir les fonctions de transfert des filtres du SF2.

Savoir-faire 4 – Savoir extraire les informations d'un diagramme de Bode

- Q1. Pour les quatre diagrammes de Bode ci-dessous, indiquer le type de filtre dont il s'agit.
 Q2. Identifier l'ordre du filtre et sa fréquence caractéristique.



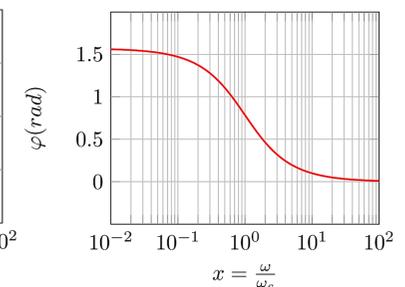
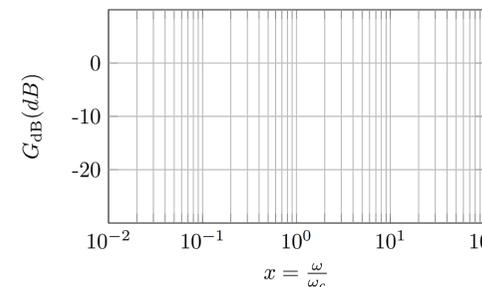
Savoir-faire 5 – Tracer un diagramme de Bode asymptotique



On considère le circuit ci-contre avec $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $L = 10 \text{ mH}$ dont la fonction de transfert est de la forme :

$$H(j\omega) = H_0 \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

- Q1. Déterminer les pentes des asymptotes en gain dans les limites haute et basse fréquence, ainsi que leur ordonnée « à l'origine » en $x = 1$.
 Q2. Construire le diagramme de Bode asymptotique en gain sur la figure ci-après et en déduire l'allure du diagramme réel.



Savoir-faire 6 – Exploiter une fonction de transfert et ses représentations graphiques pour déterminer la réponse d'un filtre à un signal donné

On considère le filtre du SF précédent.

- Q1.** Donner la forme du signal d'entrée et du signal de sortie si le signal d'entrée est :
- une sinusoïde d'amplitude 4 V, centrée autour de 0 V, de fréquence $f = 2$ kHz.
 - une sinusoïde d'amplitude 4 V, centrée autour de 1 V, de fréquence $f = 2$ kHz.
 - la somme de trois harmoniques de même amplitude (1 V), même phase initiale (qu'on prendra nulle) et de fréquences respectives $f_1 = 50$ Hz, $f_2 = 1$ kHz et $f_3 = 10$ kHz.
 - un signal triangle de fréquence 60 Hz.

Savoir-faire 7 – Comprendre et utiliser un gabarit

Le cahier des charges d'un filtre passe-bas indique les caractéristiques suivantes :

- Gain maximal : 0 dB ;
- Atténuation des fréquences inférieures à 1 kHz : pas plus de 3 dB.
- Atténuation des fréquences supérieures à 10 kHz : au moins 30 dB.

- Q1.** Construire le gabarit d'un tel filtre.
Q2. Proposer un montage permettant de satisfaire ce cahier des charges.

Exercices d'entraînement

Exercice 1 : Filtre moyenneur

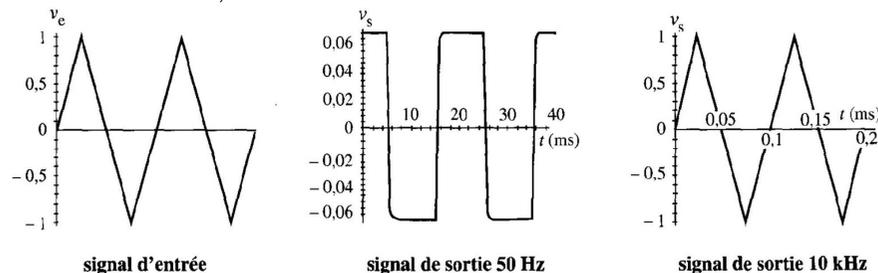
Un montage à base de photo-diode délivre une tension $u(t)$ proportionnelle à l'intensité lumineuse reçue. On souhaite mesurer l'intensité lumineuse moyenne émise par un néon branché sur le secteur. Toutefois, l'analyse du signal $u(t)$ montre que l'intensité lumineuse varie à une fréquence de 100 Hz.

On souhaite utiliser un filtre pour ne récupérer que la valeur moyenne de la tension $u(t)$.

- Q1.** Expliquer le phénomène. Pourquoi notre œil ne voit-il pas l'intensité lumineuse osciller ?
Q2. Représenter le spectre de $u(t)$.
Q3. Quel type de filtre permettra d'atténuer la composante à 100 Hz de $u(t)$ tout en préservant sa composante continue ?
Q4. Comment proposez-vous de choisir la fréquence de coupure ? Justifier.

Exercice 2 : Détermination des caractéristiques d'un filtre du 1^{er} ordre

On dispose d'un filtre du premier ordre. On l'alimente par un signal triangulaire (première courbe ci-dessous) d'amplitude 1 V. Dans le premier cas la fréquence du signal d'entrée est de 50 Hz, on obtient en sortie du filtre la deuxième courbe. Lorsque la fréquence du signal d'entrée est de 10 kHz, on obtient la troisième courbe.



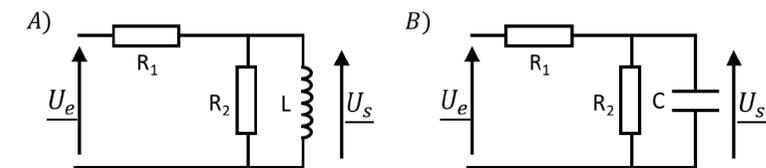
- Q1.** Déterminer le type de filtre et évaluer sa fréquence caractéristique.

Exercice 3 : Modélisation d'un récepteur radio

Un récepteur radio doit capter les signaux sur une gamme de fréquence allant de 150 à 300 kHz. Il peut être modélisé par un circuit RLC série avec $R = 2$ k Ω et $L = 1$ mH.

- Q1.** Quel type de filtrage doit-il réaliser ? En déduire le dipôle aux bornes duquel la tension de sortie doit être mesurée.
Q2. Établir la fonction de transfert du filtre.
Q3. Déterminer les valeurs de C répondant aux attentes.

Exercice 4 : Détermination des caractéristiques d'un filtre du 1^{er} ordre



On a : $R = 200 \Omega$; $L = 60$ mH ; $R_1 = 2$ k Ω ; $R_2 = 1,3$ k Ω ; $C = 0,1$ mF.

U_0 est une constante homogène à une tension on considérera $f_1 = 200$ Hz, $\omega_1 = 2\pi f_1$.

Répondre aux questions suivantes pour les montages A et B :

- Q1.** Déterminer sans calculs la nature du filtre.
Q2. Déterminer la fonction de transfert du circuit.
Q3. Tracer son diagramme de Bode asymptotique.
Q4. Déterminer la (les) fréquence(s) de coupure et la bande passante.
Q5. $u_e(t)$ est une tension constante. Déterminer $u_s(t)$.
 On envoie en entrée du filtre le signal : $u_e(t) = U_0 \cdot (1 + \cos(2\pi f_1 \cdot t))$
Q6. Déterminer une approximation raisonnable de l'expression du signal $u_s(t)$ de sortie du filtre.

On envoie cette fois en entrée du filtre le signal :

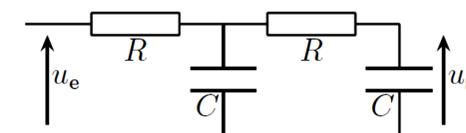
$$u_e(t) = U_0 + U_0 \cdot \cos(\omega_1 t) + U_0 \cdot \cos\left(10 \cdot \omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right) + U_0 \cdot \cos\left(100 \cdot \omega_1 t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- Q7.** Donner une approximation raisonnable de l'expression du signal $u_s(t)$ de sortie du filtre.

Exercices d'entraînement

Exercice 5 : Circuits RC en cascade

On étudie le filtre réalisé par le circuit ci-dessous :



- Q1.** Déterminer sans calculs la nature du filtre.
Q2. Déterminer la fonction de transfert du circuit.
Q3. Identifier à une fonction de transfert canonique, et trouver l'expression des paramètres caractéristiques du filtre.
Q4. Tracer son diagramme de Bode asymptotique, avec un minimum de calcul.
Q5. Tracer l'allure du diagramme de Bode réel.

Exercice 7 : Filtrés en cascade sans et avec suiveur

On considère le quadripôle ci-contre :

Q1. Prévoir le comportement asymptotique de ce filtre.

Q2. Calculer la fonction de transfert

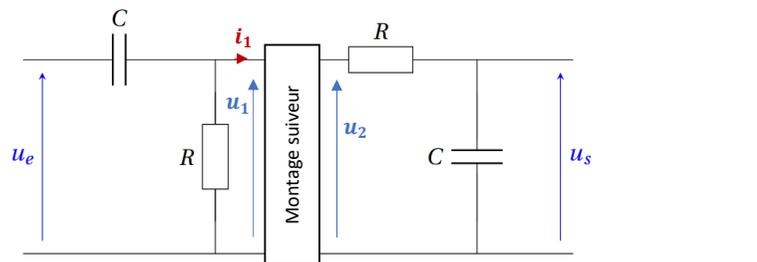
$$H(j\omega) = \frac{U_E}{U_S}$$

en fonction de ω et ω_0 avec $\omega_0 = 1/RC$.

Q3. Montrer que le dénominateur peut se mettre sous la forme d'un produit de fonctions du premier ordre : $(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})$, ω_1 et ω_2 s'exprimant en fonction de ω_0 .

Q4. Etablir le diagramme de Bode asymptotique.

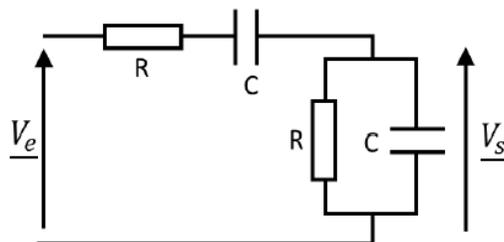
On sépare par un montage suiveur les deux circuits RC mis en cascade pour réaliser ce filtre. Le montage suiveur (vu en deuxième année) permet de considérer qu'aucun courant n'est absorbé par le second circuit RC : $i_1 = 0$ et $u_1 = u_2$.



Q5. Donner la nouvelle fonction de transfert de l'ensemble.

Exercice 8 : Filtre de Wien

On étudie le filtre réalisé par le circuit suivant :



Q1. Déterminer sans calculs la nature du filtre.

Q2. Déterminer la fonction de transfert du circuit.

Q3. Identifier à une fonction de transfert canonique, et trouver l'expression des paramètres caractéristiques du filtre.

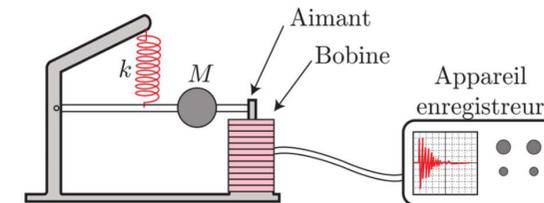
Q4. Tracer son diagramme de Bode asymptotique, avec un minimum de calcul.

Q5. Tracer l'allure du diagramme de Bode réel.

Q6. Pour $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 15,9 \text{ nF}$, déterminer la fréquence de résonance du filtre et la largeur de sa bande passante. Commenter.

Etude documentaire : le sismographe

La surveillance des mouvements du sol dus à la sismicité est importante car elle permet de détecter l'apparition de phénomènes dont les conséquences peuvent être tragiques (tremblements de terre, tsunamis...). Dans les cas où la détection est trop tardive pour permettre une alerte efficace, les enregistrements peuvent tout de même être utilisés à posteriori pour mieux comprendre la nature de l'événement et tenter d'anticiper les prochains. L'appareil incontournable pour suivre les mouvements du sol est le sismomètre, et on se propose ici d'en décrire le principe de fonctionnement comme illustration d'une application pratique de filtrage.



Un sismomètre est un appareil capable de détecter de très petits mouvements du sol et de les enregistrer, analogiquement ou numériquement, en suivant une base de temps très précise. Il fonctionne sur le même principe qu'un oscillateur amorti. L'enregistrement du mouvement de la masse en fonction du temps correspond au sismogramme. Un sismomètre est constitué d'un oscillateur mécanique ; l'excitation de cet oscillateur étant due aux mouvements du sol. Les mouvements de la partie mobile engendrent un courant électrique dans un bobinage, ce qui a deux effets importants :

- amortir les oscillations mécaniques et éviter donc une prolongation excessive du mouvement après une excitation brève ;
- fournir un signal électrique qui peut être aisément amplifié, enregistré et transmis.

Le mouvement du sol $x_{sol}(t)$ est lié au mouvement de la masse décrit par $s(t)$ par l'équation suivante, caractéristique des oscillateurs amortis :

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s} + \omega_0^2 s = A \ddot{x}_{sol}$$

où Q est le facteur de qualité du système, ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur et A est l'amplification.

Vu la forme du second membre, on peut remarquer que déplacer le sismomètre à vitesse constante n'engendre aucune détection : ce sont les accélérations qui provoquent une réponse. Un sismomètre est donc simplement un accéléromètre.

Un sismomètre ne doit pas privilégier de fréquence : il ne doit pas y avoir de phénomène de résonance. Le choix du sismologue est donc de se rapprocher juste en dessous de l'amortissement critique pour que l'oscillation repasse par zéro rapidement. Comme la masse revient assez vite vers sa position d'équilibre, elle est prête pour réagir à l'arrivée du train d'onde suivant. Le sismologue doit tenir compte de l'environnement d'où une large gamme de sismomètres dont les caractéristiques varient sensiblement. Diverses causes vont contribuer à mettre en oscillation le sol et vont donc intervenir dans la réponse du sismomètre.

Exemples :

- phénomènes de marée (période : demi-journée, 10–5 Hz),
- perturbations liées à l'activité humaine, qu'il s'agisse de la circulation de véhicules, de travaux de terrassement lors de constructions...

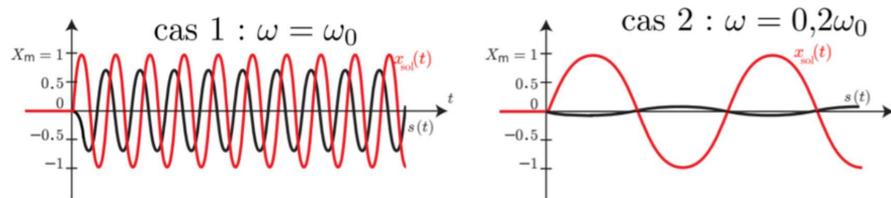
- la houle, qui est un train régulier de vagues formées au large, est également un phénomène périodique auquel vont être sensibles les sismomètres verticaux (périodicité de quelques secondes à quelques dizaines de secondes).

La prise en compte de l'environnement permet au sismologue de définir dans quel intervalle spectral se situe l'information utile et il définit la bande passante des sismomètres à utiliser.

Examen d'oscillogrammes tests :

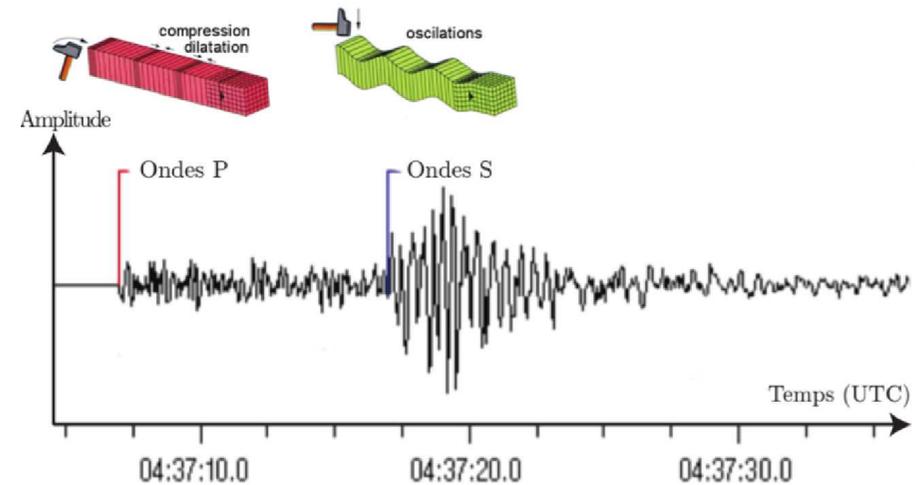
On poursuit l'étude par l'examen d'un oscillogramme correspondant à un signal test usuel dans le domaine de la sismologie : le train d'onde. Le signal $x_{sol}(t)$ correspondant est représenté ci-dessous : il est nul aux instants négatifs, puis il oscille à la pulsation ω à partir de $t = 0$, avec l'expression $x_{sol}(t) = X_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ (on considère donc une seule composante harmonique).

Comparons les réponses simulées pour la valeur $Q = 1/\sqrt{2}$ et différentes pulsations d'excitation (ici $A = 1$, et les ordonnées sont en unités arbitraires : $X_m = 1$) :



Application aux ondes sismiques :

Les ondes sismiques sont des ondes mécaniques. Les vibrations engendrées par un séisme se propagent dans toutes les directions. On distingue les ondes de volume qui traversent la Terre et les ondes de surface qui se propagent parallèlement à sa surface. On ne considère par la suite que les ondes de volume. Elles se propagent à l'intérieur du globe. Leur vitesse de propagation dépend du matériau traversé et d'une manière générale elle augmente avec la profondeur. L'onde P, ou onde primaire est, comme son nom l'indique, l'onde qui arrive la première, elle est aussi appelée onde de compression ou onde longitudinale. Le déplacement du sol qui accompagne son passage se fait par dilatation et compression successives, parallèlement à la direction de propagation de l'onde. C'est la plus rapide (environ 6,15 km/s près de la surface). Elle est responsable du grondement sourd que l'on peut entendre au début d'un tremblement de terre. C'est cette onde qui sonne l'alerte du tremblement de terre, mais ce n'est pas la plus dangereuse. En effet c'est l'onde S secondaire qui arrive quelques secondes plus tard qui est plus destructrice car elle est transversale et non longitudinale comme l'onde P. À son passage, les mouvements du sol s'effectuent perpendiculairement au sens de propagation de l'onde. Cette onde ne se propage pas dans les milieux liquides, elle est en particulier arrêtée par le noyau liquide de la Terre. Sa vitesse est plus faible que celle des ondes P (environ 3,6 km/s).



Questions :

- À partir de l'équation du mouvement, établir l'expression de la fonction de transfert $H(\omega) = \frac{s}{x_{sol}}$ du sismomètre.
- De quel type de filtre s'agit-il ? Quel est son ordre ?
- Déterminer les équations des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude et en phase. Que vaut $\arg(H)$ en $\omega = \omega_0$? Donner ensuite l'allure de ces deux diagrammes (on admet qu'il y a une résonance pour Q assez grand : tracer un cas avec résonance et un cas sans résonance).
- D'après le texte, comment faut-il choisir le facteur de qualité d'un sismomètre ?
- Calculer le gain et le déphasage théoriques pour $\omega = \omega_0$. On s'intéresse alors aux courbes $x(t)$ et $s(t)$ sur l'oscillogramme correspondant à $\omega = \omega_0$: ces courbes sont-elles en accord avec la théorie ? (en termes d'amplitude et de déphasage)
- Même question pour l'oscillogramme correspondant à $\omega = 0,2 \cdot \omega_0$.
- Comment pourra-t-on distinguer les ondes de type P et de type S sur un oscillogramme ?
- Donner un ordre de grandeur de la fréquence de l'onde S à partir du sismogramme présenté dans le document. En déduire une contrainte sur la pulsation propre du sismomètre. Avec ce choix, le sismomètre sera-t-il sensible aux perturbations des marées et de la houle ?
- Trouver la distance entre l'épicentre et le sismomètre dans le cas du sismogramme présenté dans le document.