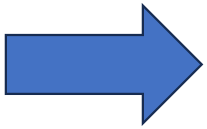
# Approche énergétique de la mécanique

Mouvement conservatif à 1 degré de liberté

# Mouvement conservatif

Mouvement conservatif

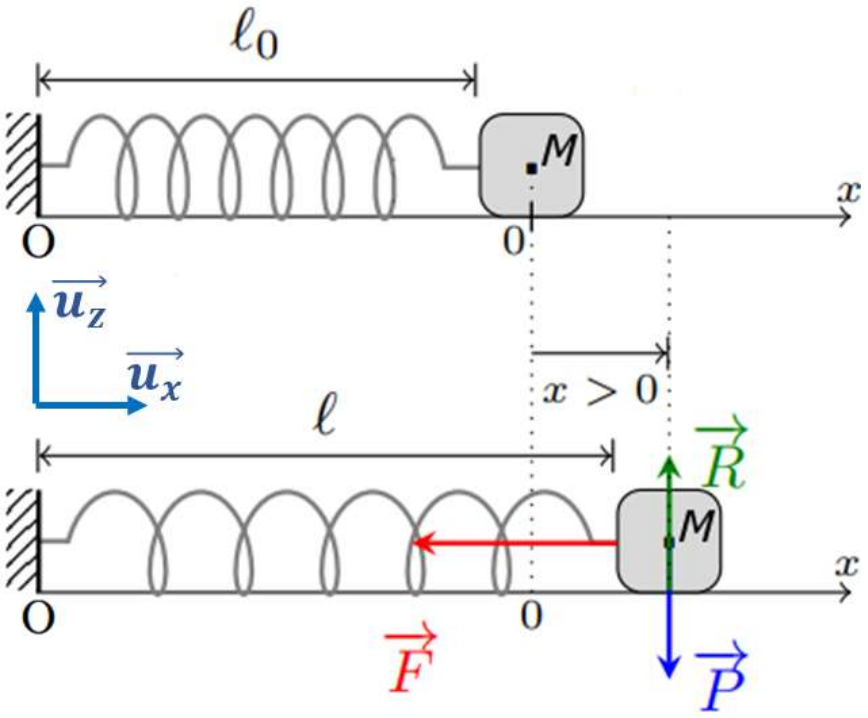
$\overrightarrow{f_{ext,nc}} = 0$

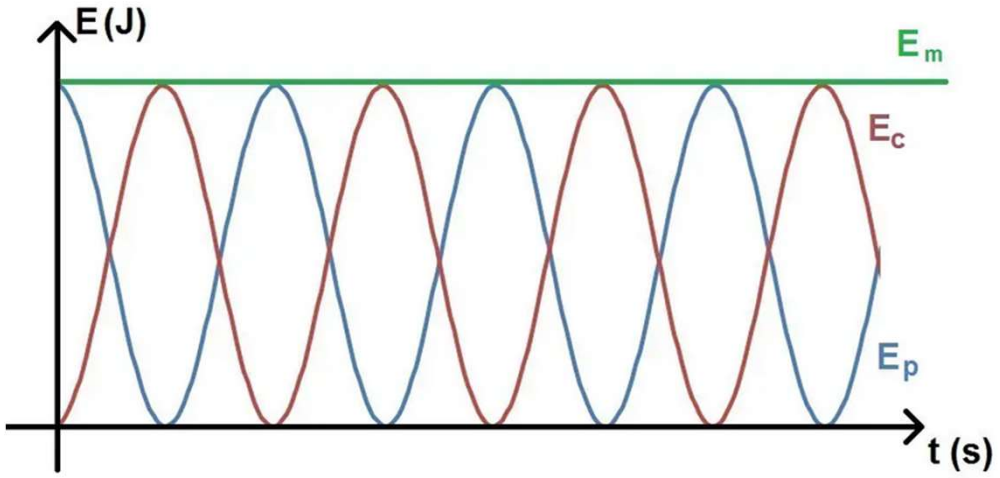


$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = O$$

# Exemple : {ressort-masse} sans frottements

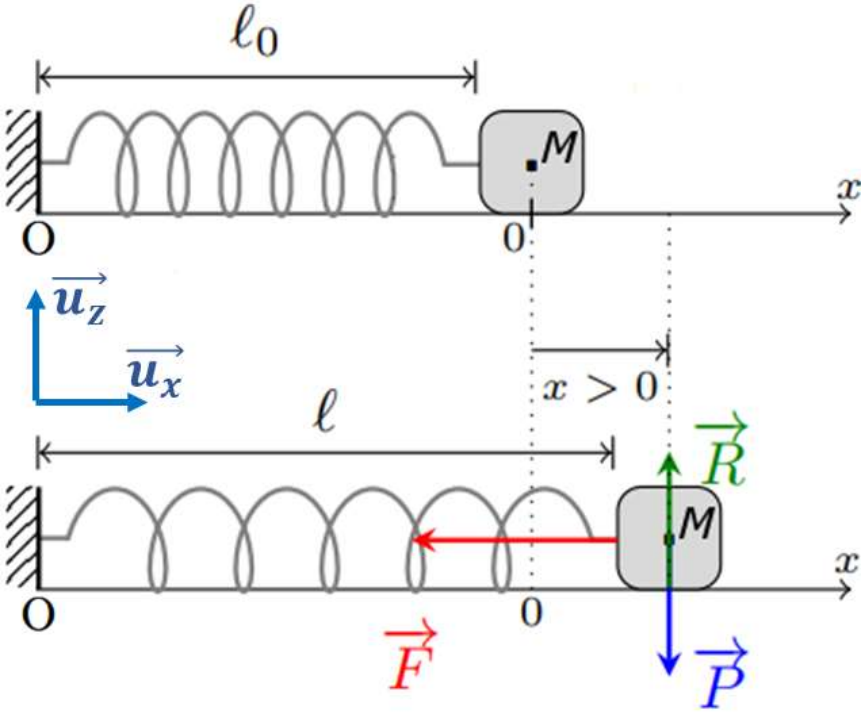
Oscillateur harmonique

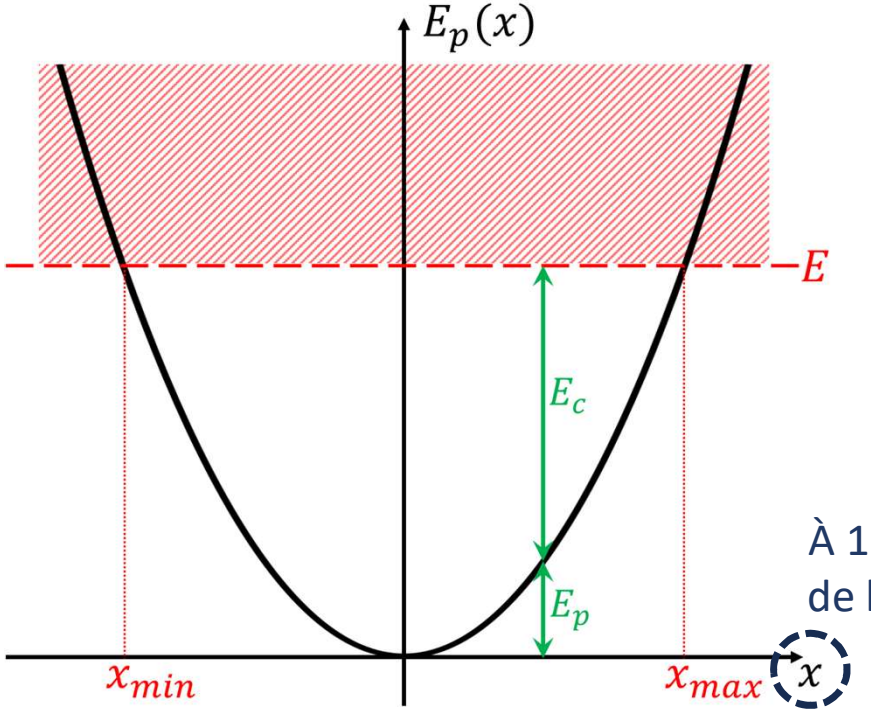



$$E_c + E_{pe} = E_m = E_{m,ini}$$

# Exemple : {ressort-masse} sans frottements



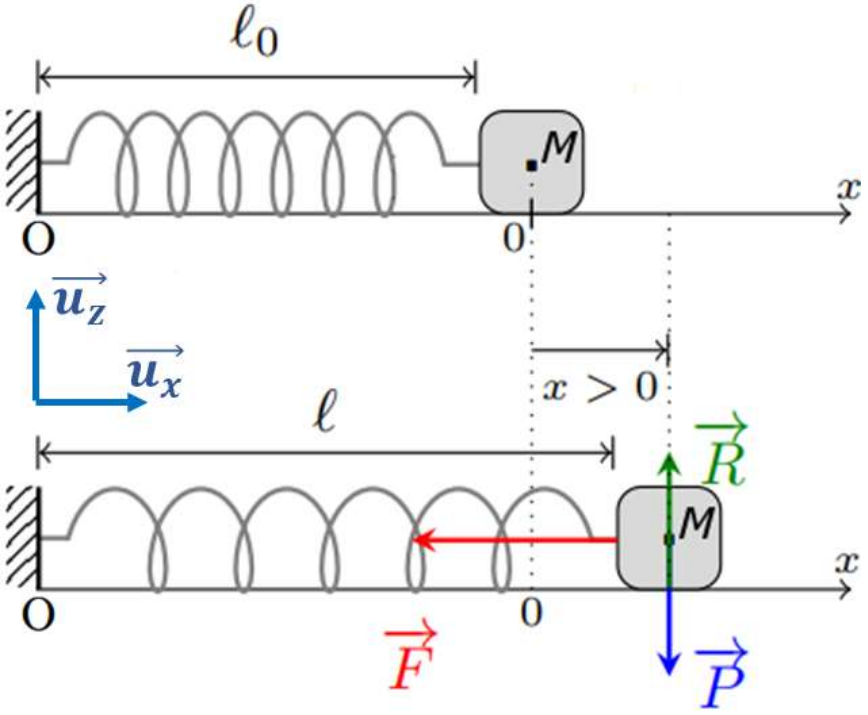




À 1 degré de liberté

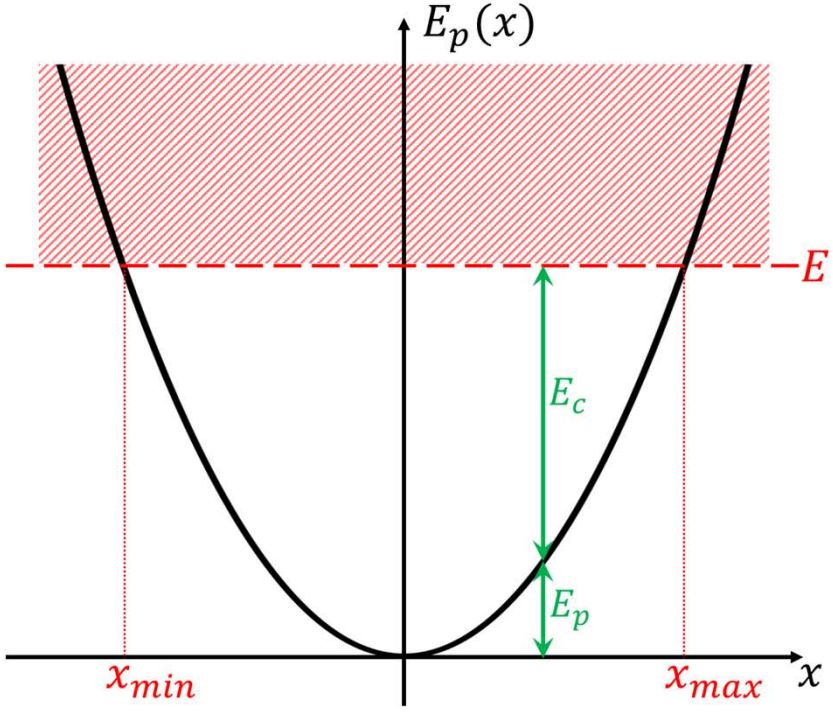
$$E_c + E_{pe} = E_m$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2}.k.x^2 = E_m - \frac{1}{2}m.v^2$$

# Exemple : {ressort-masse} sans frottements




$$E_c + E_{pe} = E_m$$

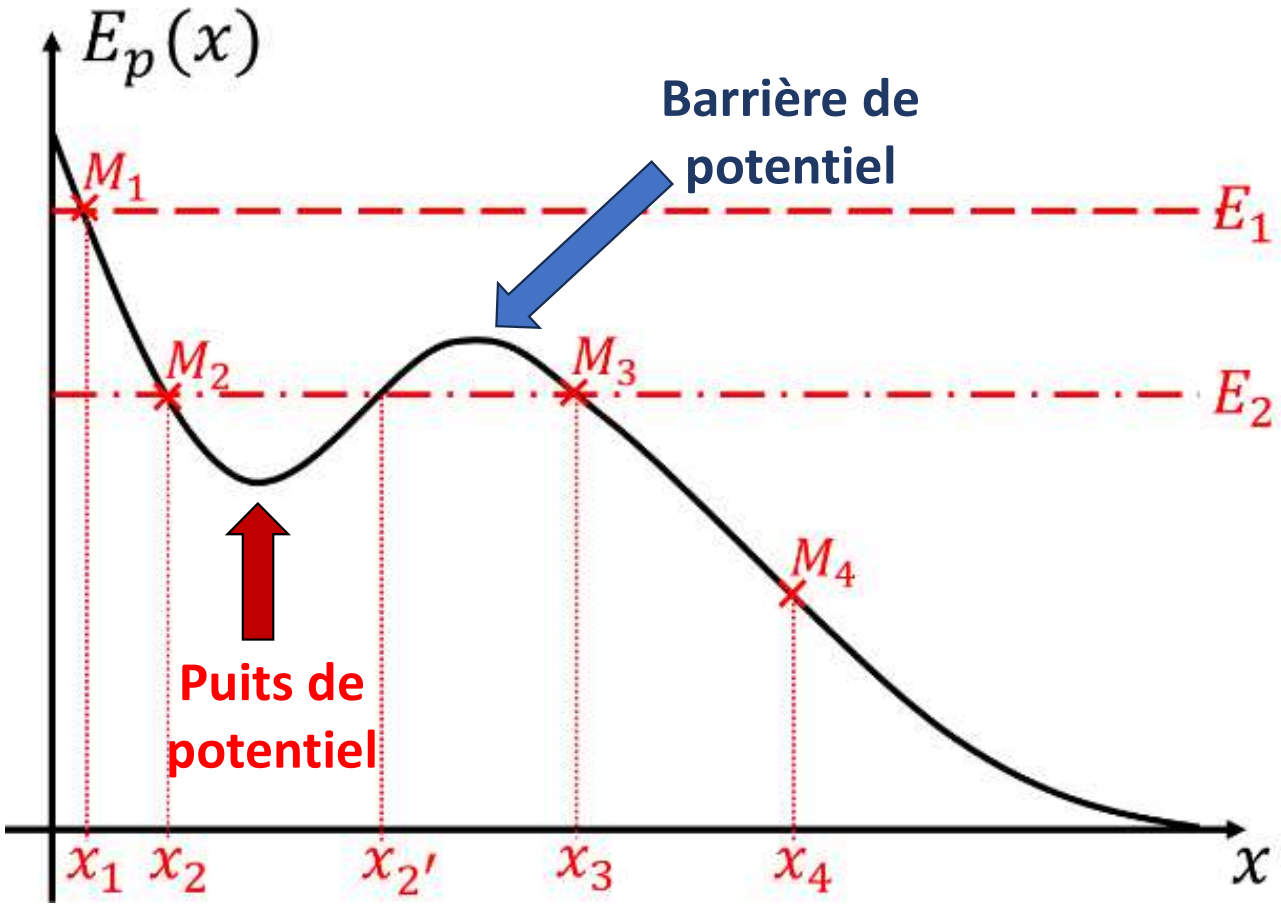



$$E_{pe} \leq E_{m,ini}$$

Puits de potentiel

# Généralisation

## Méthode : Analyser la courbe $E_p(x)$ pour un mouvement conservatif

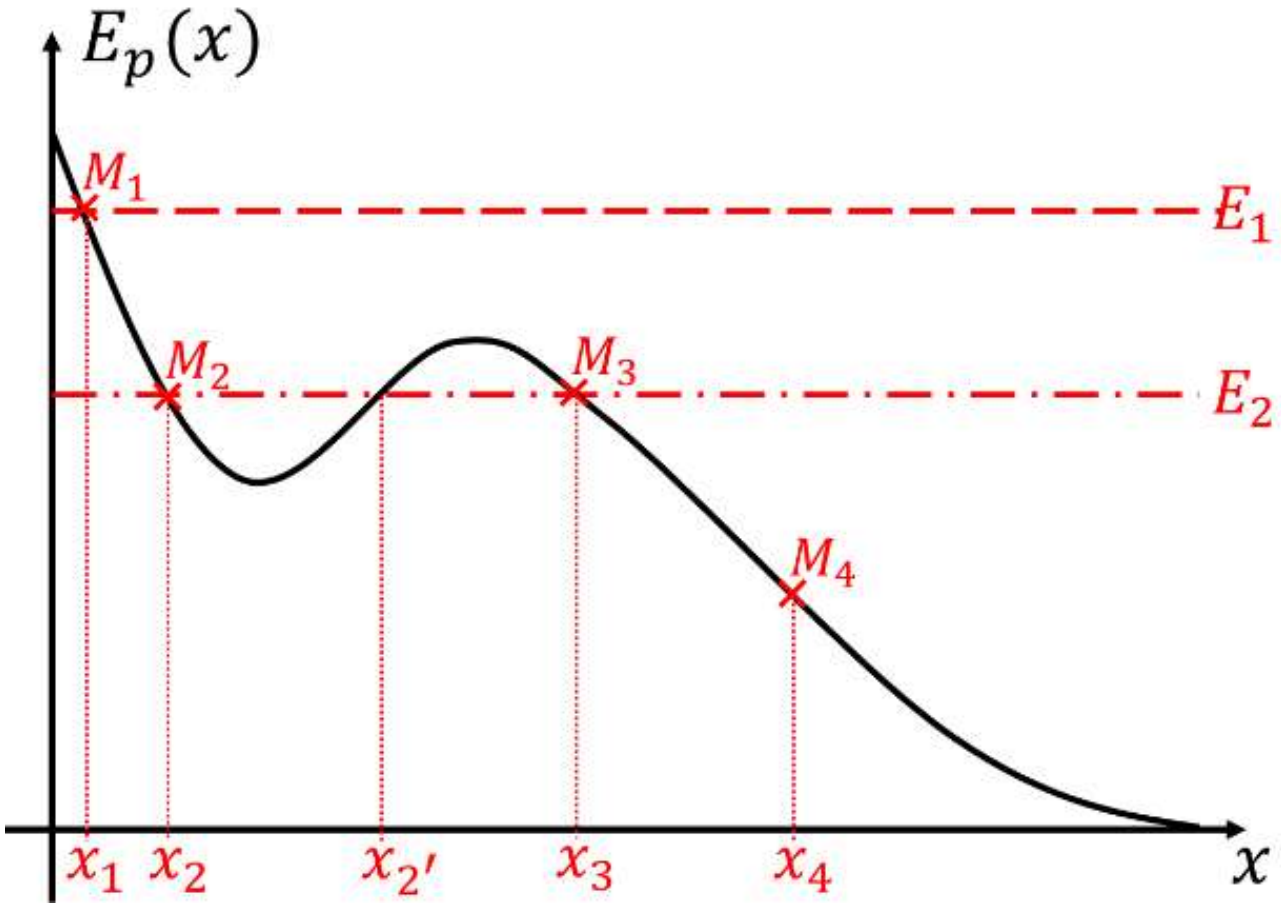



**Définitions : Un peu de jargon**

- ***Etat lié*** : le système oscille autour d'un minimum d'énergie sans pouvoir s'en éloigner.
- ***Etat de diffusion*** : le système est capable de transformer l'intégralité de son énergie potentielle en énergie cinétique en s'éloignant à l'infini.

# Généralisation

**Méthode :** Déterminer qualitativement les propriétés de la force sur le graphe $E_p(x)$




$$\vec{F}_{cons}(x) = F(x).\vec{u}_x$$

Par définition:

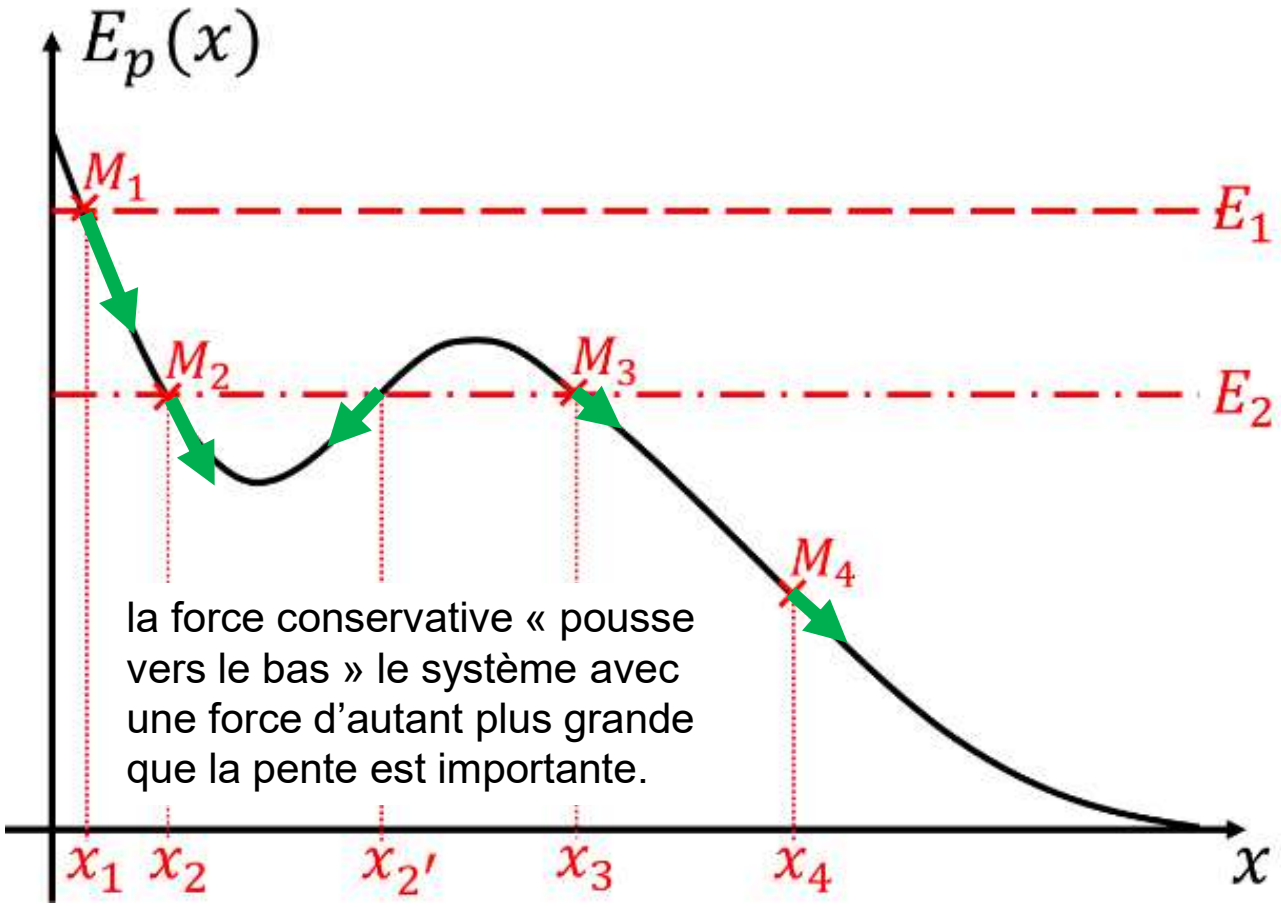
$$dE_p = -\delta W(\vec{F}_{cons})$$
$$= -F_{cons}(x).\vec{u}_x.dx.\vec{u}_x$$

$$\boxed{F_{cons}(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}}$$

La force $\vec{F}_{cons}$ ***dérive de l'énergie potentielle*** $E_p(x)$.

# Généralisation

**Méthode :** Déterminer qualitativement les propriétés de la force sur le graphe $E_p(x)$




$$\vec{F}_{cons}(x) = F(x).\vec{u}_x$$

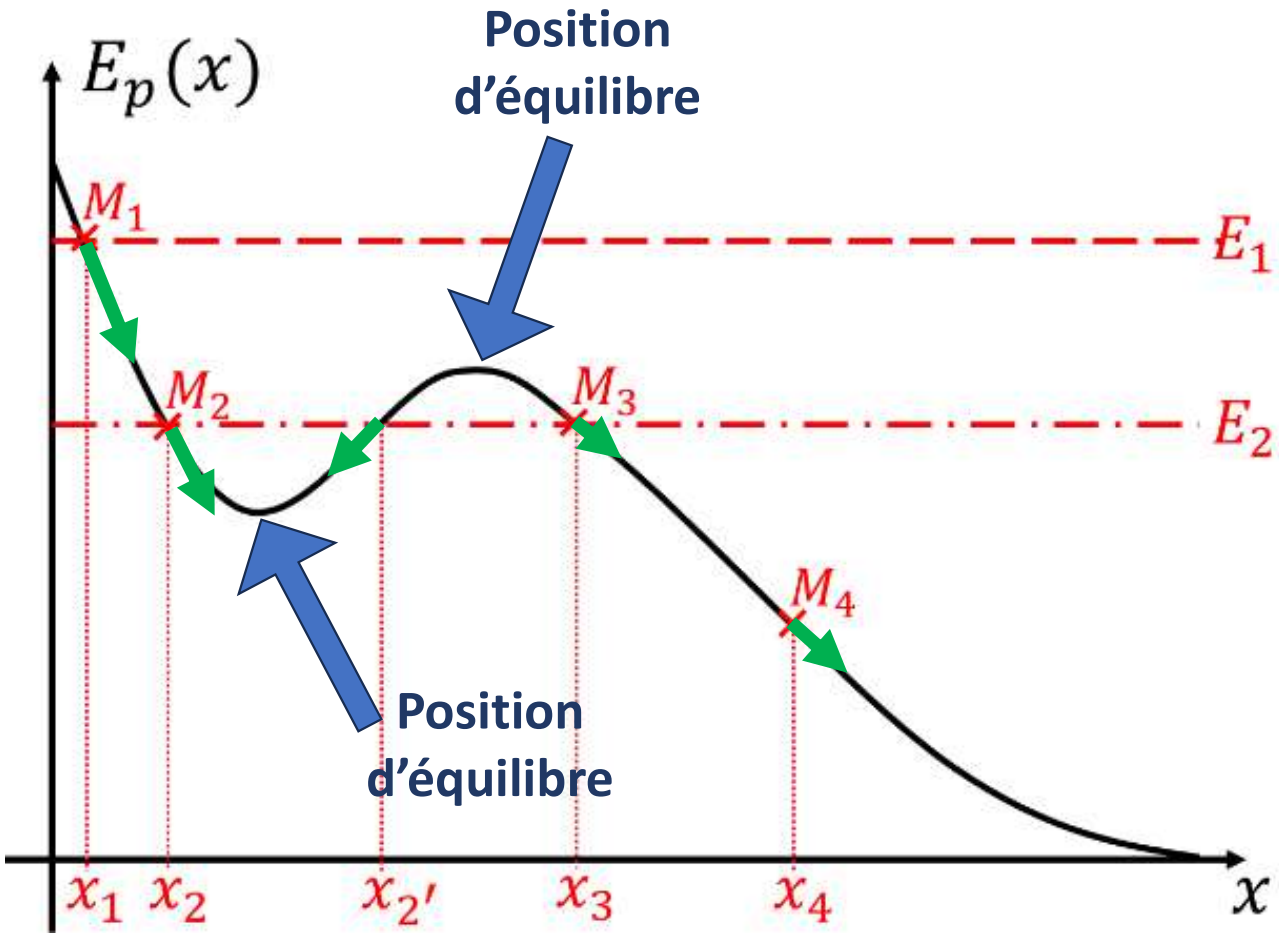
Par définition:

$$dE_p = -\delta W(\vec{F}_{cons})$$
$$= -F_{cons}(x).\vec{u}_x.dx.\vec{u}_x$$

$$\boxed{F_{cons}(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}}$$

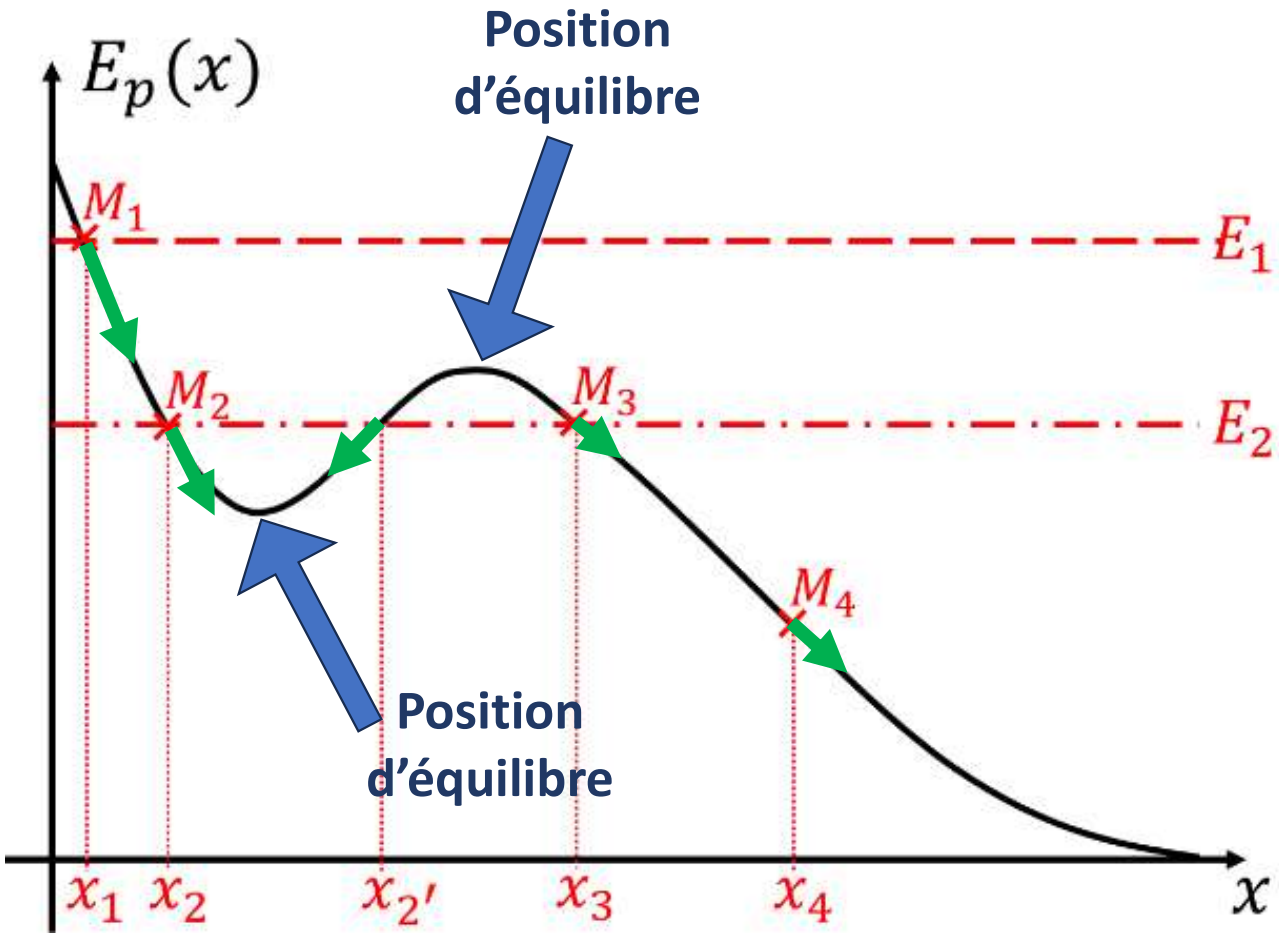
La force $\vec{F}_{cons}$ ***dérive de l'énergie potentielle*** $E_p(x)$.

# Quelle position est une position équilibre?




Equilibre si
$F_{cons}(x) = 0$

# Quelles positions sont des positions d'équilibre?



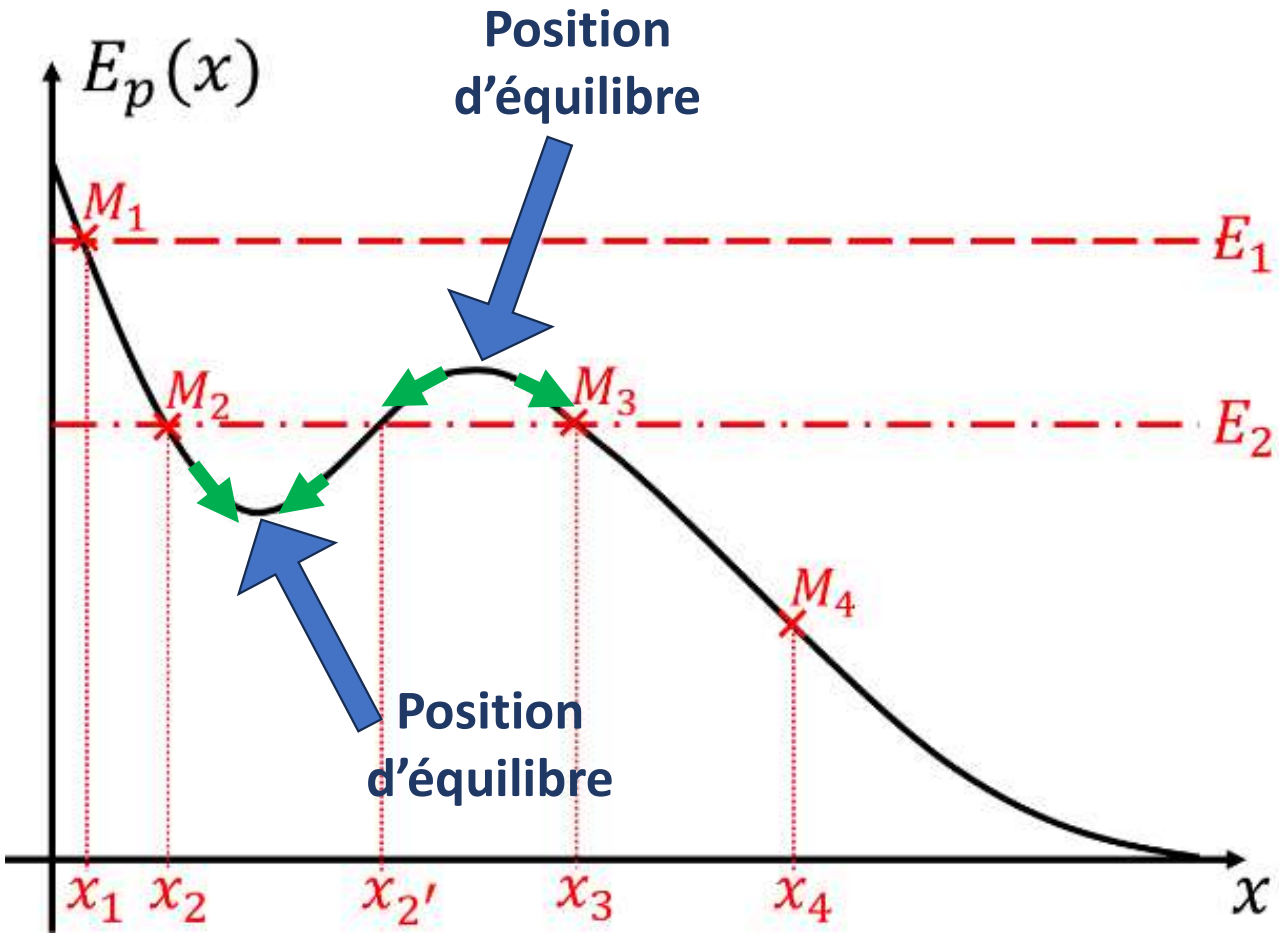

Equilibre si

$$F_{cons}(x) = 0$$

donc

$$\left(\frac{dE_p(x)}{dx} = 0\right)$$

# L’équilibre est-il stable?

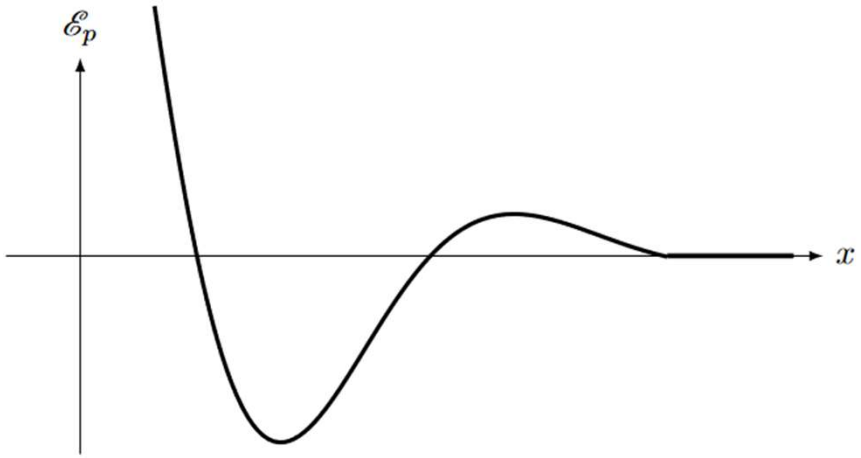



- Stable si minimum de la courbe
- Instable si maximum de la courbe

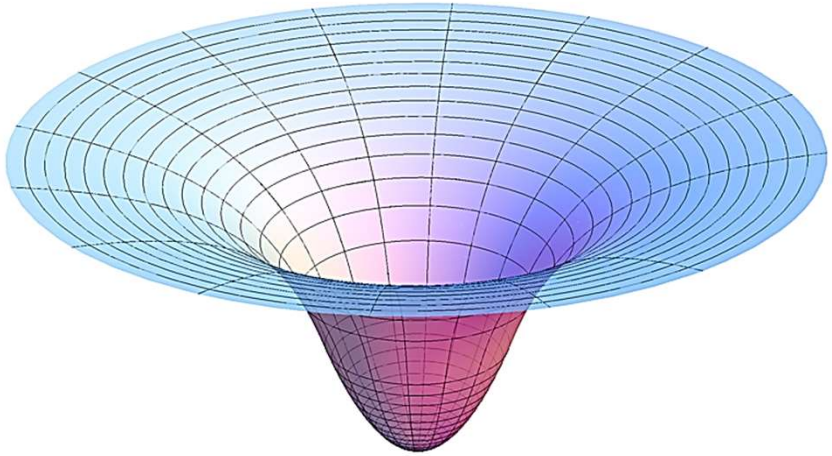
## *Savoir-faire 4 – Savoir exploiter un graphe d'énergie potentielle pour un mouvement à 1 degré de liberté*

On considère un mouvement à un degré de liberté, noté $x$.

1. Déterminer les positions d'équilibre et donner leur stabilité.
2. Sous quelles conditions le point M sera-t-il dans un état lié ?
3. Donner la direction de la résultante des forces et indiquer qualitativement les zones de forte et de faible intensité de la force.



**Méthode :** Déterminer qualitativement les propriétés de la force sur le graphe $E_p(x)$



**Puits de potentiel avec 2 degrés de liberté**

**Définition : L'opérateur gradient**

On admettra que pour une force $\vec{F}$ conservative dont l'énergie potentielle associée est donnée par $E_p(x,y,z)$, on peut écrire la relation :

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x}.\vec{u}_x + \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y}.\vec{u}_y + \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial z}.\vec{u}_z\right)$$

et on définira ***l'opérateur « gradient »*** tel que :

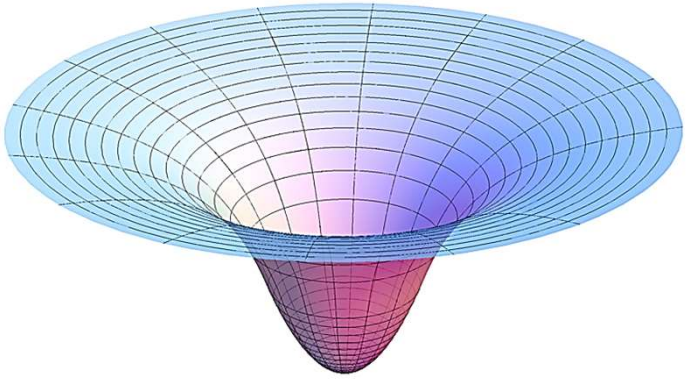
$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}.\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{u}_z\right)\left(E_p(x,y,z)\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(E_p(x,y,z)\right)}$$

## *Savoir-faire 5 – Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.*

L'attraction exercée par la Terre sur ses satellites est associée à une énergie potentielle :

$$E_p(r,\theta\ ,\phi) = -G.\frac{m.M_T}{r} + C$$



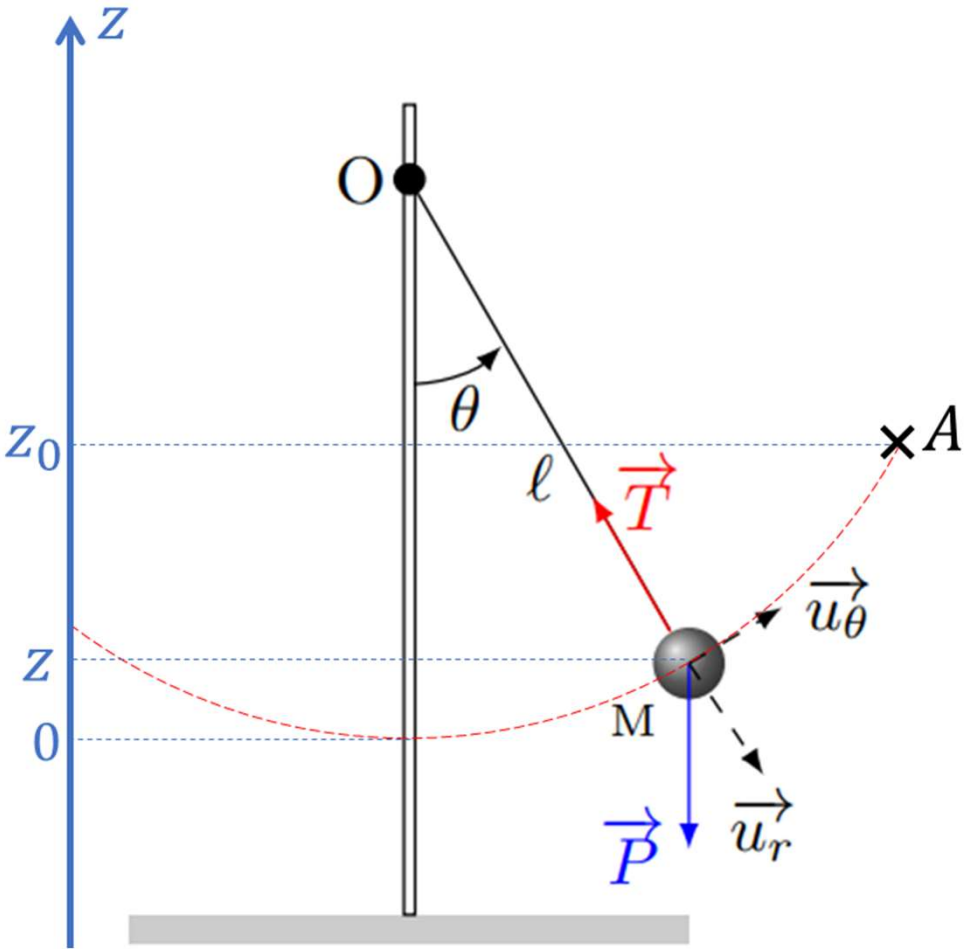
avec $C$ une constante, $m$ la masse du satellite et $M_T$ la masse de la Terre.

1. En déduire l'expression de la force dans le référentiel géocentrique associé à la base sphérique d'origine O.

Donnée : expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\big(f(r,\theta,\phi)\big) = \frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial r}.\vec{u}_r + \frac{1}{r}.\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}.\vec{u}_\theta + \frac{1}{r.\sin(\theta)}.\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}.\vec{u}_\phi$$

# Le pendule simple




**Approche type PFD à savoir faire !**

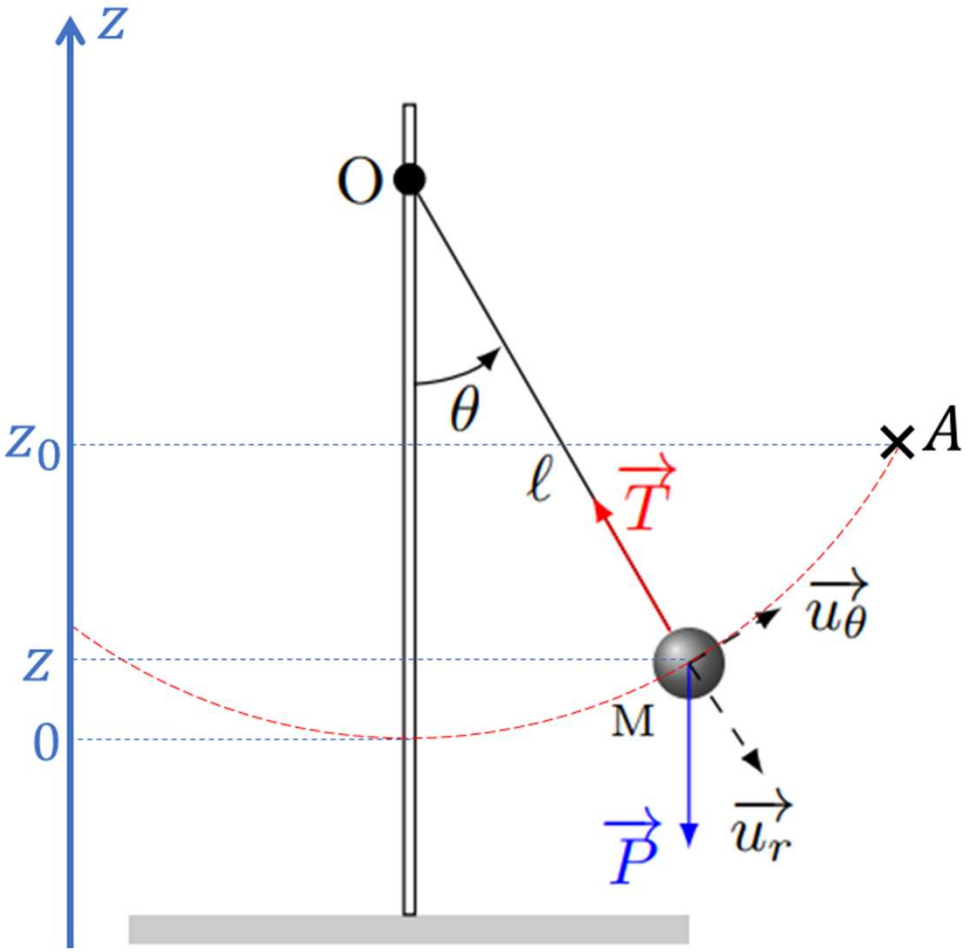
Equation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\sin(\theta) = 0$$

**Non-linéaire**

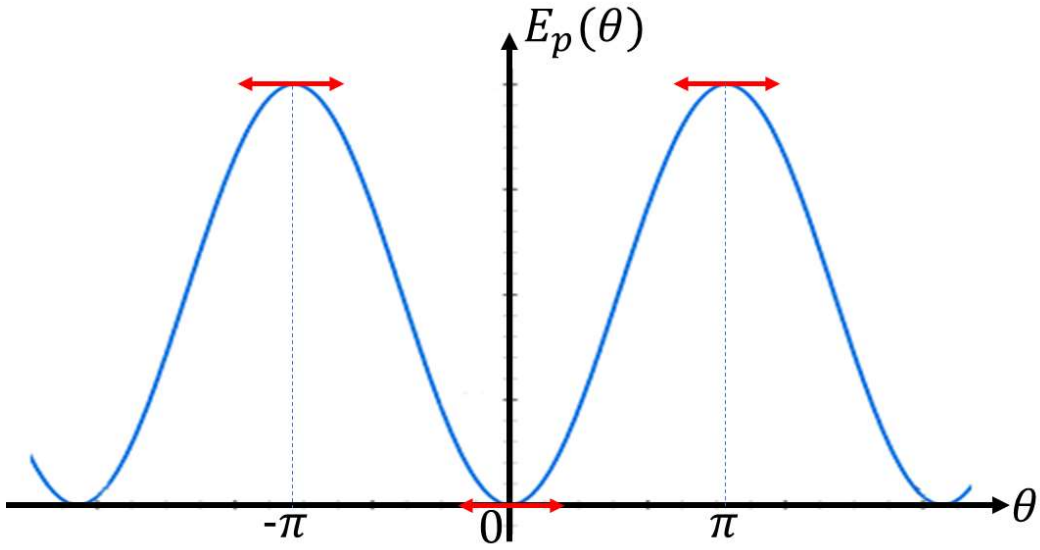
**Approche énergétique à savoir faire aussi !**
**→ exercice 4 du TD**

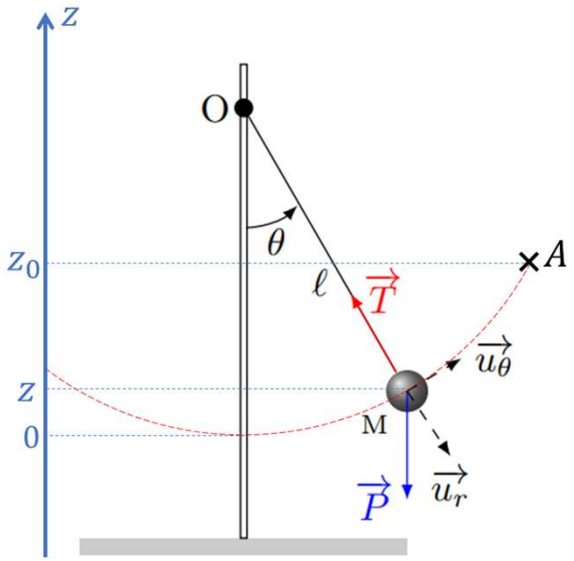
# Le pendule simple



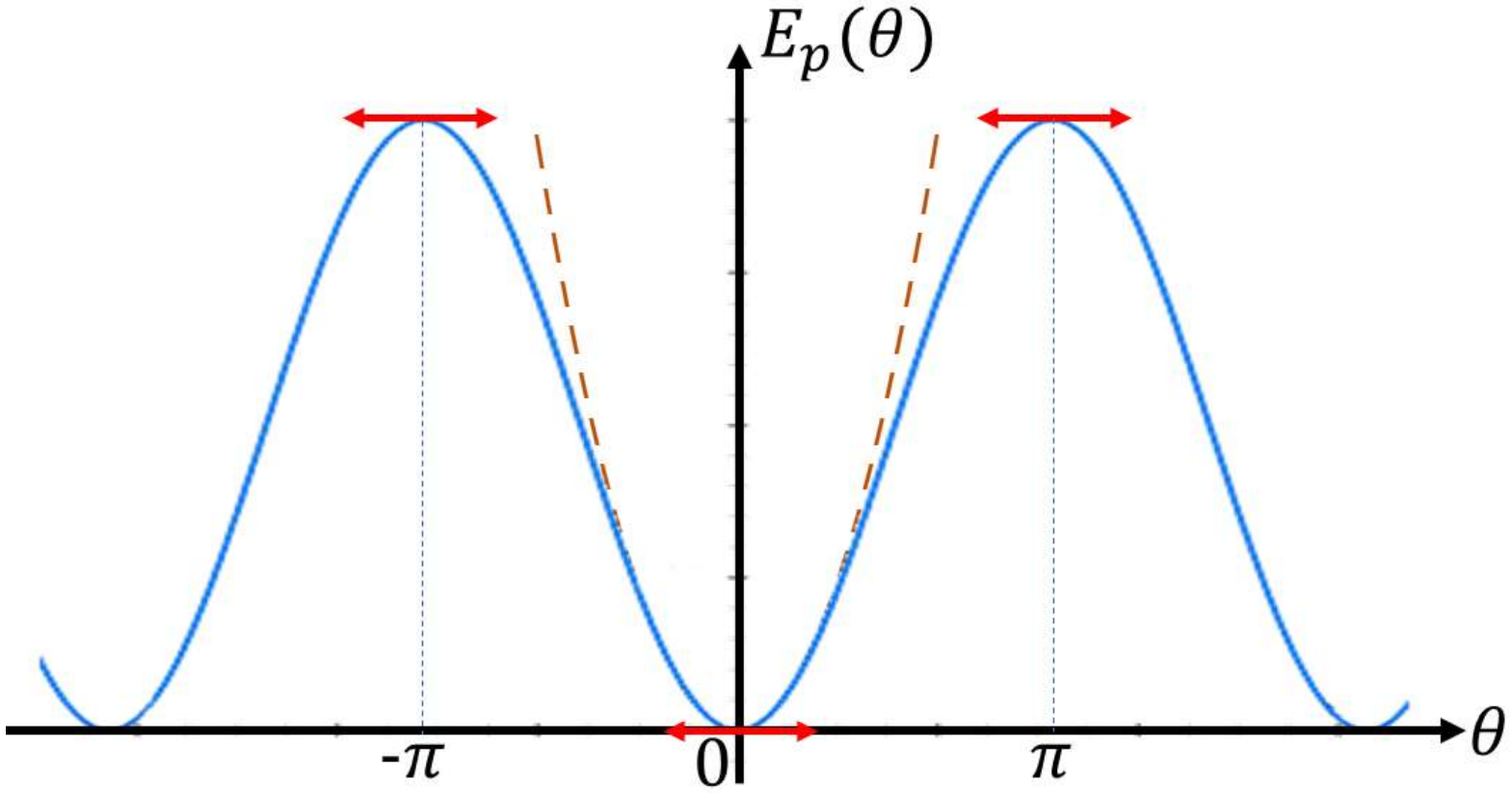

Energie potentielle

$$E_{pp} = m.g.\ell.(1-\cos(\theta))$$



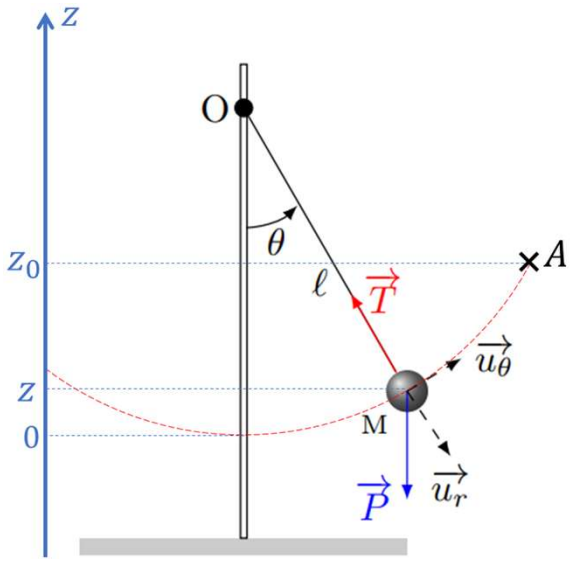



# Le pendule simple



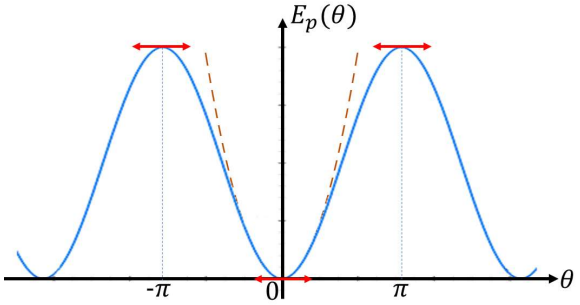

**Approximation harmonique**

➔ Le fond du puits ressemble à une parabole!




# Le pendule simple

## Approximation harmonique




**Point maths : Développement limité**

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0).f'(x_0)}_{\text{terme d'ordre 1}} + \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{2!}.f''(x_0)}_{\text{terme d'ordre 2}} + \underbrace{o\left((x - x_0)^2\right)}_{\text{termes négligeables devant les autres}}$$

Energie potentielle

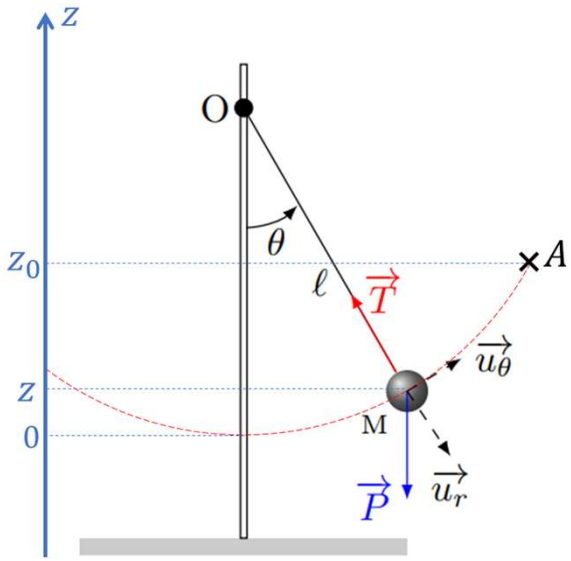
$$E_{pp} = m.g.\ell.(1 - \cos(\theta))$$

**Approximation harmonique**

Energie potentielle autour du fond du puits ($x = 0$)

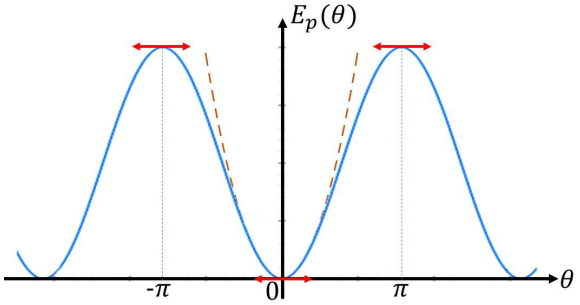
$$E_{pp} = m.g.\ell.\frac{x^2}{2}$$

**Une parabole !**




# Le pendule simple

## Approximation harmonique




**Point maths : Développement limité**

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0).f'(x_0)}_{\text{terme d'ordre 1}} + \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{2!}.f''(x_0)}_{\text{terme d'ordre 2}} + \underbrace{o\left((x - x_0)^2\right)}_{\text{termes négligeables devant les autres}}$$

## Equation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\sin(\theta) = 0$$

**Approximation harmonique**

## Equation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\theta = 0$$

Oscillateur harmonique!

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2.\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$